размерами стенок $a = b = 4\lambda$, возбуждаемого сосредоточенным источником в точке с координатами $x_0 = 2$, $y_0 = {}^4/_3\lambda$. При расчете учитывались первые 8 гармоник ряда в формуле (6). Значения θ_n находились по коэффициентам C_n ряда Фурье заданной функции распределения давления по формуле

$$\theta_n = \operatorname{arc\,tg} \left\{ \frac{\varepsilon_n k \cos\left(\dfrac{\pi n}{b} y_0\right) \cos(k_n x_0)}{C_n k_n \cos(k_n a)} - \operatorname{tg}(k_n a) \right\}.$$

На фигуре представлен расчетный график распределения нормированного реактивного импеданца, а также полученное распределение давления на стенке $x = a$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. М. Морс и Г. Фешбах. Методы теоретической физики, т. 2. М., ИЛ, 1960.

Московский энергетический институт

Поступило в редакцию 6 мая 1970 г.

УДК 534.222

ФЛЮКТУАЦИИ УРОВНЯ И ФАЗЫ ДЛЯ ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ СЛУЧАЙНО НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

В. Н. Черная

В ряде работ [1, 2] при рассмотрении статистических задач о распространении волн в средах со случайными неоднородностями используется корреляционная функция флюктуаций показателя преломления вида

$$N(r') = \exp\left(-|r'| / a'\right), \tag{1}$$

где a' — характерный размер неоднородностей, $r' = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$. Насколько нам известно, расчет флюктуационных характеристик волны в этом случае не производился.

Для определения средних квадратов флюктуаций уровня и фазы плоской волны, распространяющейся в безграничной среде с крупномасштабными неоднородностями $a' \gg 1$, описываемыми функцией корреляции (1), используем выведенные в работе [2] для произвольного коэффициента корреляции $N(r')$ формулы:

$$\langle S^2 \rangle = {}^1/_2 \langle \mu^2 \rangle (I_1 + I_2), \tag{2}$$

$$\langle B^2 \rangle = {}^1/_2 \langle \mu^2 \rangle (I_1 - I_2), \tag{3}$$

где $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ — случайная функция, характеризующая слабые отклонения показателя преломления от среднего значения; I_1 и I_2 в предположении, что коэффициент корреляции есть четная функция относительно ξ, имеют вид

$$I_1 = 2L' \int\limits_0^\infty d\xi \int\limits_0^\infty \frac{1}{\xi} \sin\frac{\rho^2}{2\xi} N(r') \rho\, d\rho, \tag{4}$$

$$I_2 = -\int\limits_0^\infty d\xi \int\limits_0^\infty \sin\left(\frac{\rho^2}{4L'}\right) N(r') \rho\, d\rho. \tag{5}$$

Вычислим интегралы (4) и (5), задаваясь коэффициентом корреляции (1). При нахождении интеграла (4) перейдем к полярным координатам u, φ на плоскости ξ, ρ:

$$I_1 = 2L' \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \operatorname{tg}\varphi \int\limits_0^\infty \sin\left(\frac{1}{2}\sin\varphi \operatorname{tg}\varphi u\right) \exp\left(-\frac{u}{a'}\right) u\, du. \tag{6}$$

Выполняя интегрирование по переменной u в выражении (6), получим [3]

$$I_1 = 2L'a'^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{tg}\varphi \sin\{2 \operatorname{arc\,tg}[(a' \operatorname{tg}\varphi \sin\varphi)/2]\}}{1 + (a'^2 \operatorname{tg}^2\varphi \sin^2\varphi)/4} d\varphi. \tag{7}$$

Подстановкой $t = [a'^2 + (a'^2 \operatorname{tg}^2\varphi \sin^2\varphi)/4](a'^2 - 1)^{-1}$ интеграл (7) можно привести к следующему табличному интегралу:

$$I_1 = 4L'a'^2(a'^2 - 1)^{-3/2} \int_{a'(a'^2-1)^{-1/2}}^{\infty} (1 - t^2)^{-2}\, dt \tag{8}$$

и, следовательно, после интегрирования имеем [3]

$$I_1 = 2L'a' \left[\frac{a'^2}{a'^2 - 1} - \frac{2a' \ln(\sqrt{a'^2 - 1} + a')}{(a'^2 - 1)^{3/2}}\right]. \tag{9}$$

В рассматриваемом случае крупномасштабных неоднородностей членами порядка $1/a'^2$ в формуле (9) можно пренебречь; кроме того, $a' \gg \ln 2a'$, что позволяет окончательно представить интеграл I_1 в виде

$$I_1 = 2L'a'. \tag{10}$$

При вычислении интеграла (5) изменим порядок интегрирования по ρ и ξ, и подстановкой $u = \sqrt{\xi^2 + \rho^2}$ избавимся от иррациональности во внутреннем интеграле, который, как известно [3], выражается через цилиндрическую функцию мнимого аргумента $K_1(\rho/a')$ следующим образом:

$$\int_\rho^\infty \exp(-u/a')(u^2 - \rho^2)^{-1/2} u\, du = \rho K_1(\rho/a') \quad \text{при} \quad \rho > 0. \tag{11}$$

Таким образом, интеграл (5) приводится к виду:

$$I_2 = -\int_0^\infty si(\rho^2/4L')K_1(\rho/a')\rho^2\, d\rho. \tag{12}$$

Несмотря на то, что функция $K_1(\rho/a')$ имеет особенность вида $1/\rho$ в нуле, подынтегральное выражение особенностей не имеет, поскольку $si(\rho^2/4L')K_1(\rho/a')\rho^2 \sim \sim \rho^3 \to 0$ и потому интеграл (12) сходится. Интегрируя по частям, получим

$$I_2 = 2a' \int_0^\infty \rho K_2(\rho/a') \sin(\rho^2/4L')\, d\rho. \tag{13}$$

Воспользовавшись интегральным представлением цилиндрической функции $K_2(\rho/a')$ при $|\arg(\rho/a')| < \pi/4$ [4]

$$K_2 = {}^1/_2(\rho/2a')^2 \int_0^\infty \exp(-t - \rho^2/4a'^2t) \sin(\rho^2/4L')\, d\rho$$

и изменяя порядок интегрирования по переменным ρ и t, преобразуем формулу (13) к следующему виду:

$$I_2 = (4a')^{-1} \int_0^\infty dt\, \exp(-t)t^{-3} \int_0^\infty \rho^3 \exp(-\rho^2/4a'^2t) \sin(\rho^2/4L')\, d\rho. \tag{14}$$

Во внутреннем интеграле формулы (14) можно выполнить интегрирование по переменной $\nu = \rho^2/4L'$ [3]:

$$I_2 = (4a')^{-1} \int_0^\infty \exp(-t) \frac{\sin[2 \operatorname{arc\,tg}(a'^2t/L')]}{1 + L'^2/a'^4t^2} t^{-3}\, dt. \tag{15}$$

Воспользовавшись подстановкой $z = a'^2 t / L'$ после несложных преобразований, получаем

$$I_2 = (a'^3/2L'^2) \int_0^\infty \exp(-L'z/a'^2)\,(1+z^2)^{-2}\,dz. \tag{16}$$

Интеграл (16) табличный [3], так что окончательно

$$I_2 = \frac{4}{a'^2 D} \left\{ ci\left(\frac{D}{4}\right) \sin\frac{D}{4} - si\left(\frac{D}{4}\right) \cos\frac{D}{4} - \right.$$
$$\left. - \frac{D}{4}\left[ci\left(\frac{D}{4}\right) \cos\frac{D}{4} + si\left(\frac{D}{4}\right) \sin\frac{D}{4} \right] \right\}, \tag{17}$$

где $D = 4L' / a'^2$ — волновой параметр, $si(x)$ и $ci(x)$ — интегральные синус и косинус. Формулы (10) и (17) дают решение поставленной задачи при любых значениях волнового параметра.

Оценим величину флюктуаций уровня и фазы в предельных случаях больших и малых значений волнового параметра. Согласно формуле (10), интеграл I_1 при любых значениях волнового параметра имеет один и тот же вид: $I_1 = 0{,}5a'^3 D$. В случае больших значений волнового параметра $D \gg 1$, воспользовавшись приближенными значениями интегрального синуса и косинуса при больших аргументах [4], убеждаемся в том, что интеграл I_2 имеет порядок $1 / a'D^3$ и в формулах (2), (3) их можно пренебречь по сравнению с интегралом I_1, так что

$$\langle S^2 \rangle = \langle B^2 \rangle = \langle \mu^2 \rangle a'L'. \tag{18}$$

Флюктуации уровня и фазы одинаковы и растут прямо пропорционально расстоянию, что в зоне дифракции Фраунгофера, как известно [2], справедливо и в случае гауссовой функции корреляции случайных неоднородностей.

В случае $D \sim 1$ нетрудно убедиться в том, что интеграл $I_2 \ll I_1$, так что флюктуации уровня и фазы также определяются формулами (18).

При малых значениях волнового параметра $D \ll 1$ используя асимптотические значения интегрального синуса и косинуса для малых аргументов [4], интеграл I_2 можно представить в виде $I_2 = \dfrac{\gamma - 4}{3}\dfrac{D}{a'} - \dfrac{16}{Da'}$, где γ — постоянная Эйлера. Отношение первого члена интеграла I_2 к интегралу I_1 имеет порядок $1 / a'^4$, отношение второго члена к I_1 порядка $1 / L'^2$. При выводе формул (2), (3) в работе [2] допущено, что дистанция велика по сравнению с масштабом неоднородностей $L' \gg a'$, следовательно, оба члена интеграла I_2 пренебрежимо малы по сравнению с I_1 и флюктуации уровня и фазы в этом случае также описываются формулами (18). Средний квадрат флюктуаций фазы растет пропорционально расстоянию, что в геометрооптическом приближении справедливо и для гауссовой функции корреляции [2]. Однако существенным отличием является линейная зависимость флюктуаций уровня от расстояния, в то время как для гауссовой функции корреляции флюктуации уровня растут пропорционально кубу расстояния. По-видимому, причиной такого отличия является разрывный характер случайной функции флюктуаций μ, описываемой выбранной нами функции корреляции в виде линейной экспоненты.

В заключение автор благодарит Л. А. Чернова за постановку задачи и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. G. Booker, W. E. Gordon. A theory of radio scattering in the troposphere. P. JRE, 38, 4, 1950, 401.
2. Л. А. Чернов. Распространение волн в среде со случайными неоднородностями. М., Изд-во АН СССР, 1958.
3. И. С. Градштейн, Н. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
4. Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения. М., Физматгиз, 1963.

Крымский педагогический институт
Симферополь

Поступило в редакцию
23 октября 1970 г.