АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVIII 1972 Вып. 2

УДК 534.213

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛЯ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ БЕРЕГОВОГО КЛИНА

*Н. Н. Комиссарова*

Решение задачи о поле точечного источника в клине с одной абсолютно мягкой, другой абсолютно жесткой гранями представлено в виде суммы нормальных волн. Для высоких частот найдено асимптотическое представление поля нормальной волны произвольного номера.

Известно, что задача о дифракции волн на клине является важной с точки зрения многих физических приложений. В частности, к ней иногда удается свести интересную для акустики моря задачу о распространении звука в прибрежной зоне. При этом в зависимости от акустических свойств грунта оказывается возможным использовать ту или иную идеализированную модель берегового клина. Ниже в качестве такой модели будет рассмотрен клин с одной абсолютно мягкой, другой абсолютно жесткой гранями.

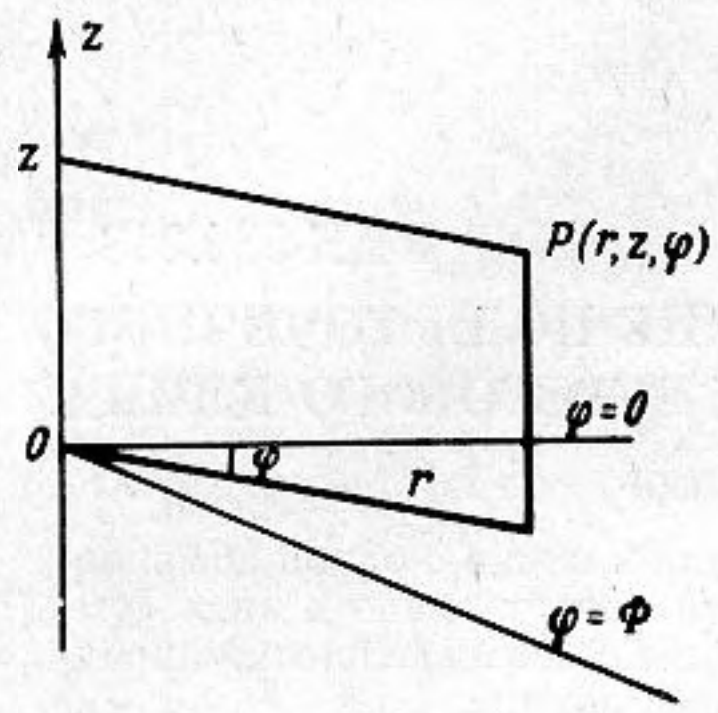
Так как обычно решение дифракционной задачи, когда оно может быть получено, имеет вид некоторого интегрального соотношения, то для выяснения качественного характера поля источника и для проведения количественных расчетов необходимо найти какое-либо удобное асимптотическое представление. Часто при расчете поля точечного источника в береговом клине сразу используют метод лучевой акустики [1, 2]. Однако этот метод приводит к ряду трудностей, связанных с необходимостью учета большого числа мнимых источников при малых углах раствора клина $\Phi$ (число мнимых источников, например, при $\Phi = 10'$ оказывается порядка $2 \cdot 10^3$). Недостатком его является также и отсутствие явного аналитического выражения для поля. В некоторых областях, в частности, когда точка наблюдения находится вблизи ребра клина, геометрическое приближение неприменимо вообще.

Другим подходом к решению задачи может служить использование метода нормальных волн. Этим методом в работе [3] приближенно решена задача о распространении звука в мелком море с медленно изменяющейся глубиной. Однако в этой работе воздействие берега не учитывается.

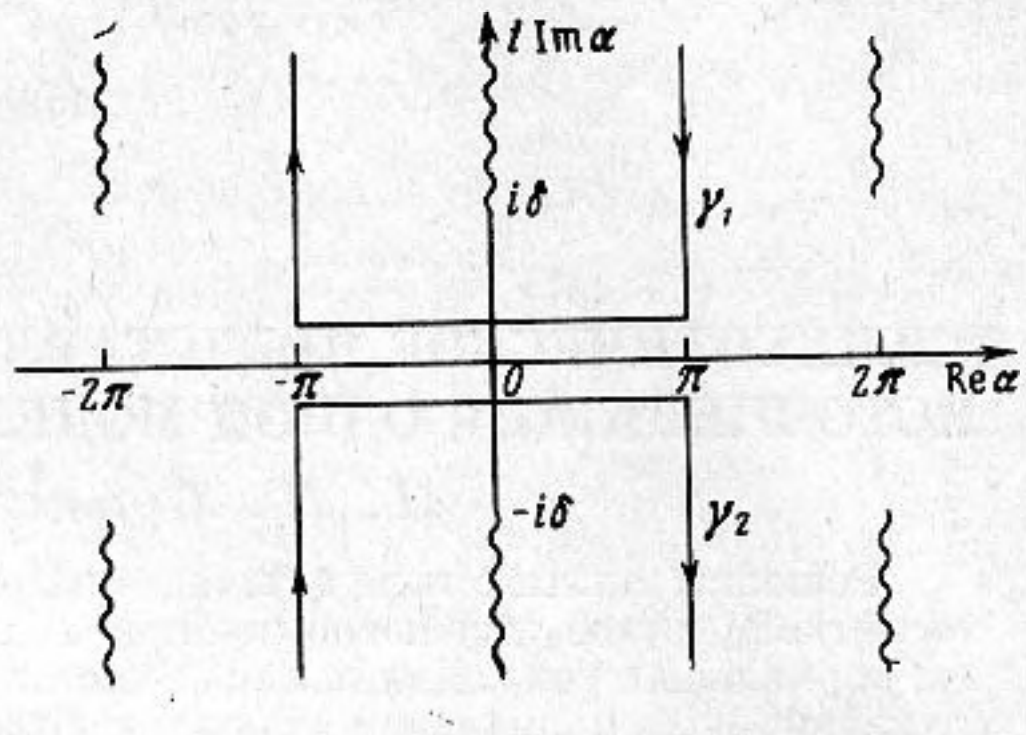
В настоящее время известно много различных представлений точного решения задачи о дифракции на клине. Особенно большое число работ посвящено решению задач Дирихле или Неймана в клиновидной области. Задача же о поле источника в клине с одной абсолютно мягкой, другой абсолютно жесткой гранями рассматривалась реже. Известно асимптотическое представление поля гармонического источника в таком клине на расстояниях от ребра, значительно превышающих расстояние от ребра до источника [4, 5]. Это асимптотическое представление имеет вид поля расположенного в безграничной среде точечного источника с некоторой диаграммой направленности. Нами получено другое справедливое везде асимптотическое представление поля точечного источника в клине. Оно оказывается особенно удобным, когда точка наблюдения находится вблизи ребра клина.

1. Рассмотрим клиновидную область $D$, определяемую в цилиндрической системе координат $(r, z, \varphi)$ неравенствами: $0 < r < \infty$, $|z| < \infty$, $0 < \varphi < \Phi$ (фиг. 1). Грань клина $\varphi = 0$ — абсолютно мягкая, грань

$\varphi = \Phi$ — абсолютно жесткая. Пусть в точке $Q(r_0, 0, \varphi_0)$ расположен точечный гармонический излучатель с объемной скоростью равной $-1/4\pi$. Потенциал скоростей $\psi(r, z, \varphi)$ ($\psi \sim e^{-i\omega t}$) всюду в области $D$, кроме точ-




Фиг. 1




Фиг. 2

ки $Q$, должен быть однозначной, непрерывной, ограниченной (в том числе и на границах области) функцией, удовлетворяющей волновому уравнению

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0, \tag{1}$$

граничным условиям

$$\psi = 0 \text{ при } \varphi = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \text{ при } \varphi = \Phi. \tag{2}$$

и условию излучения. Особенность функции $\psi(P)$ в точке $P = Q$ должна быть такой, что $\lim\limits_{P\to Q} \psi_1(P)R(\varphi - \varphi_0) = 0$, где

$$\psi_1(P) = \psi(P) - \frac{e^{ikR(\varphi-\varphi_0)}}{R(\varphi-\varphi_0)} \text{ и } R(\alpha) = \sqrt{r^2 + r_0^2 + z^2 - 2rr_0\cos\alpha}.$$

Известно, что поле точечного источника в клиновидной области можно представить в виде интеграла Зоммерфельда — Малюжинца [6, 7]:

$$\psi(r, z, \varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{e^{ikR(\alpha)}}{R(\alpha)} S(\alpha + \varphi)\, d\alpha. \tag{3}$$

Нетрудно показать, что для поставленной задачи функция $S(\alpha)$ имеет вид

$$S(\alpha) = \frac{\pi}{4\Phi}\left[\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2\Phi}(\alpha - \varphi_0) - \operatorname{cosec}\frac{\pi}{2\Phi}(\alpha + \varphi_0)\right]. \tag{4}$$

Контур интегрирования $\gamma$ состоит из ветвей $\gamma_1$ и $\gamma_2$ (фиг. 2); на этой же фигуре волнистой линией указаны разрезы, идущие в бесконечность из точек $\alpha = 2\pi m \pm i\delta$, где $\delta = \operatorname{arch}\dfrac{r^2 + r_0^2 + z^2}{2rr_0}$, $m = 0, \pm 1, \ldots$, соответствующие выбору ветви корня $\operatorname{Re} R(\alpha) > 0$.

После некоторых преобразований интеграла (3), подобных тем, которые проводились в работе [8] для клина с обеими абсолютно мягкими или с обеими абсолютно жесткими гранями, получим следующее представление звукового потенциала $\psi(r, z, \varphi)$ в виде суммы нормальных волн:

$$\psi(r, z, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(r, z, \varphi),$$

$$\psi_n(r, z, \varphi) = -\frac{2}{\Phi}\sin\mu_n\varphi \sin\mu_n\varphi_0 \int\limits_{\gamma_1} \frac{e^{ikR(\alpha)+i\mu_n\alpha}}{R(\alpha)}\, d\alpha. \tag{5}$$

Этим выражением особенно удобно пользоваться при расчете поля в области, примыкающей к ребру клина. Множитель $\sin \mu_n \varphi_0$, входящий в выражение для $\psi_n(r, z, \varphi)$ (5), является мерой интенсивности возбуждения нормальной волны номера $n$ источником, расположенным в плоскости $\varphi = \varphi_0$. Множитель $\sin \mu_n \varphi$ описывает распределение поля $n$-й нормальной волны по координате $\varphi$. Зависимость $\psi_n$ от $r$ и $z$ определяется интегралом $I = \int\limits_{\gamma_1} \frac{e^{ikR(\alpha)+i\mu_n\alpha}}{R(\alpha)} d\alpha$, для которого в случае $kr_0 \gg 1$ методом перевала можно получить удобное асимптотическое представление.

Обозначим $L_n = \mu_n / k$, $f_n(\alpha) = R(\alpha) + L_n\alpha$ и рассмотрим сначала случай, когда $\mu_n < kr_0$. Если точка наблюдения $P$ находится внутри области $S_n$, определяемой неравенством $(r^2 - L_n^2)(r_0^2 - L_n^2) - L_n^2 z^2 > 0$, то в полосе $|\mathrm{Re}\,\alpha| \leqslant \pi$ расположены две перевальные точки

$$\alpha_\pm = -\arccos \frac{1}{rr_0}\left(L_n^2 \mp \sqrt{(r^2 + L_n^2)(r_0^2 - L_n^2) - L_n^2 z^2}\right). \tag{6}$$

Обычным способом вычисляя первый член асимптотики интеграла $I$, мы получаем для функции $\psi_n$ следующее асимптотическое представление:

$$\psi_n = \frac{2\sqrt{2\pi}}{\Phi} \sin \mu_n \varphi \sin \mu_n \varphi_0 e^{i\pi/4} \times$$

$$\times \left[ \frac{e^{ikR(\alpha_+)+i\mu_n\alpha_+}}{R(\alpha_+)\sqrt{k|f''(\alpha_+)|}} + \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}+ikR(\alpha_-)+i\mu_n\alpha_-}}{R(\alpha_-)\sqrt{k|f''(\alpha_-)|}} \right], \tag{7}$$

где $R(\alpha_\pm) = \sqrt{2rr_0(\mathrm{ch}\,\delta - \cos\alpha_\pm)}$, $f''(\alpha_\pm) = r^2 r_0^2 R^{-3}(\alpha_\pm)(2\mathrm{ch}\,\delta \cos\alpha_\pm - 1 - \cos^2\alpha_\pm)$.

Заметим, что функцию $\psi_n$ можно интерпретировать как вычисленное в геометрическом приближении поле некоторого цилиндрического источника, помещенного в точку $(r_0, 0)$ слоисто-неоднородной среды со скоростью звука $c(r) = c[1 - (\mu_n^2 - 1/4)/k^2r^2]^{-1/2}$. В этом случае в точку наблюдения приходят два луча: один — коснувшийся, другой — не коснувшийся каустики. Гипербола

$$(r^2 - L_n^2)(r_0^2 - L_n^2) - L_n^2 z^2 = 0 \tag{8}$$

является каустикой для этих лучей. Область между ребром клина и каустикой является зоной геометрической тени для данной нормальной волны. Вне этой области расположена освещенная область $S_n$. Такое представление поля нормальной волны можно получить другим путем, если функцию $\psi(r, z, \varphi)$ сразу искать в виде суммы нормальных волн $\sin \mu_n \varphi T_n(r, z)$, а возникающее для $T_n(r, z)$ уравнение решать в геометрическом приближении. Такой подход был использован в работах [3, 9] при решении задачи о распространении звука в мелком море с переменной глубиной и в работе [10] при изучении рефракции нормальных волн в клине.

2. Асимптотическое представление (7) применимо до тех пор, пока производная $f''(\alpha_\pm)$ не слишком мала. Когда $f''(\alpha_\pm) = 0$ (точка наблюдения $P = P_к$ находится на каустике) можно получить другое асимптотическое представление. Координаты точки $P_к(r_к, z_к)$ удовлетворяют уравнению (8). При этом обе перевальные точки стягиваются в точку $\alpha_к$:

$$\alpha_к = -\arccos \frac{L_n^2}{r_0 r_к}. \tag{9}$$

Из точки $\alpha_к$ берут начало три кривые быстрейшего спуска. Преобразуем контур $\gamma_1$ в контур $\Gamma_к$, составленный из двух таких кривых. Функцию $f(\alpha)$ разложим в ряд Тейлора в окрестности точки $\alpha_к$ до члена, содержащего третью производную этой функции включительно. Вычисляя далее интеграл $I$ по контуру $\Gamma_к$, мы придем к следующему асимптотическому представлению поля $n$-ой нормальной волны в точке на каустике:

$$\psi_n(r_к, z_к \varphi) = \frac{2\sqrt[3]{6}}{\sqrt{3}\,\Phi\,\sqrt[3]{\mu_n}}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\sin\mu_n\varphi\sin\mu_n\varphi_0\times$$
$$\times\frac{\exp\left[ik\sqrt{\frac{r_0^2}{L_n^2}r_к^2 - L_n^2} + i\mu_n\alpha_к\right]}{\sqrt{\frac{r_0^2}{L_n^2}r_к^2 - L_n^2}}. \tag{10}$$

3. Получим теперь равномерную асимптотику поля $n$-й нормальной волны, которая хорошо описывает поле в освещенной области, на каустике и в ее окрестности, а также в зоне тени (номер $n$ опять таков, что $\mu_n < kr_0$). Подчеркивая зависимость функции $f(\alpha)$ также и от параметра $P$, будем, где это необходимо, писать $f(\alpha, P)$. Если точка наблюдения $P$ находится в некоторой окрестности точки $P_к$, то структура поверхности $\exp[\mathrm{Re}\, ikf(\alpha, P)]$ такова, что, хотя контур $\Gamma_к$ и не образован теперь линиями быстрейшего спуска, тем не менее подынтегральная функция в $I$ быстро стремится на нем к нулю. По координатам точки $P$ выберем на каустике соответствующую точку $P_к$ и вычислим интеграл $I$ по контуру $\Gamma_к$, который состоит из линий быстрейшего спуска для точки $P_к$. Для дальнейших вычислений точку $P_к$ удобно выбирать так, чтобы выполнялось соотношение $f''(\alpha_0, P_к) = 0$, где $\alpha_0$ определяется из уравнения $f''(\alpha_0, P) = 0$. При этом $\alpha_к = \alpha_0$, а разложение функции $f(P, \alpha)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\alpha_к$ не содержит члена со второй производной. Ограничиваясь в этом разложении членом с третьей производной, нетрудно свести полученный интеграл по контуру $\Gamma_к$ к функции Эйри $v(t)$, после чего для функции $\psi_n(r, z, \varphi)$ получим следующее асимптотическое представление:

$$\psi_n(r, z, \varphi) = \frac{4\sqrt[3]{2}\sqrt{\pi}}{\Phi}\sin\mu_n\varphi\sin\mu_n\varphi_0\times$$
$$\times\frac{\exp\left[ik\sqrt{2rr_0\,\mathrm{sh}\,\delta} - i\mu_n\arccos(\mathrm{ch}\,\delta - \mathrm{sh}\,\delta)\right]}{\sqrt[6]{k^2rr_0(\mathrm{ch}\,\delta - \mathrm{sh}\,\delta)}\,\sqrt{2rr_0\,\mathrm{sh}\,\delta}}\,v(t_n), \tag{11}$$

где $t_n = \sqrt[3]{2k^2}\,\dfrac{L_n - \sqrt{rr_0\,(\mathrm{ch}\,\delta - \mathrm{sh}\,\delta)}}{\sqrt[6]{rr_0(\mathrm{ch}\,\delta - \mathrm{sh}\,\delta)}}$.

Если значения $r$ и $z$ связаны соотношением (8), т. е. точка наблюдения находится на каустике, формула (11) переходит в формулу (10).

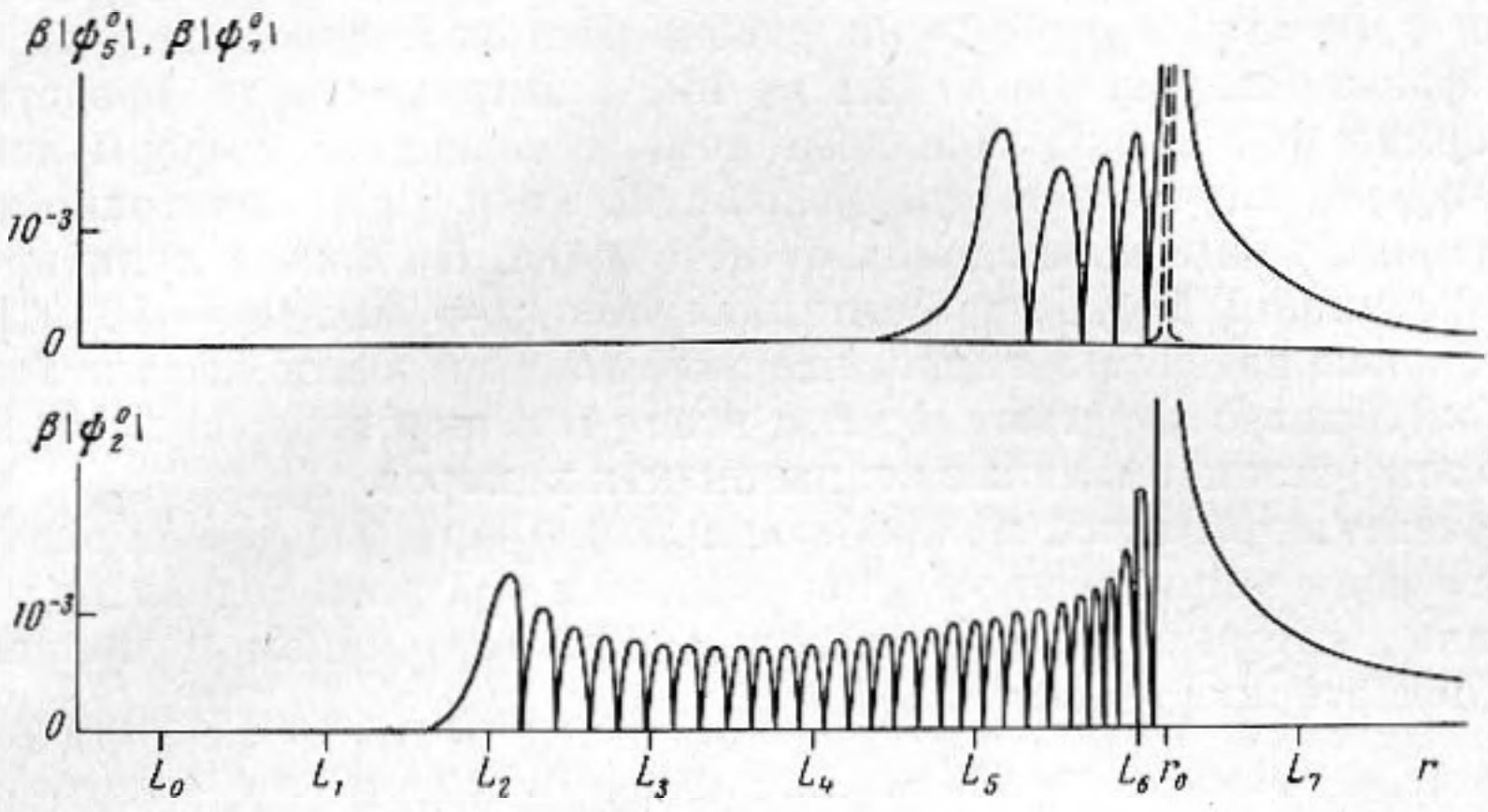
Для функции $\psi_n$ можно получить более простое выражение, если в формуле (11) перейти к новым переменным:

$$r_+ - r_- = 2u, \quad r_+ + r_- = 2w, \tag{12}$$

где $r_- = \sqrt{(r - r_0)^2 + z^2}$, $r_+ = \sqrt{(r + r_0)^2 + z^2}$. В системе координат $r$, $z$ кривыми $u = \mathrm{const}$ являются гиперболы, симметричные относительно оси $r$ и пересекающие ее в точках $r = u$. Гипербола $u = L_n$ совпадает с каустикой (8). Кривыми $w = \mathrm{const}$ является семейство эллипсов с фокусами, расположенными в точке $Q(r_0, 0)$ и зеркально отраженной относительно оси $z$ точке $Q'$. Эллипсы пересекают ось $r$ в точках $r = w$. Легко заметить, что $0 \leqslant u \leqslant r_0$, $r_0 \leqslant w < \infty$. В системе координат $u$ и $w$ формула (11) принимает следующий вид:

$$\psi_n = \frac{4\sqrt[3]{2}\,\sqrt{\pi}}{\Phi}\sin\mu_n\varphi\sin\mu_n\varphi_0\,\frac{\exp\left[ik\sqrt{w^2-u^2}-i\mu_n\arccos\dfrac{u}{w}\right]}{\sqrt[3]{ku}\,\sqrt{w^2-u^2}}\,v(t_n), \tag{13}$$

где $t_n = \sqrt[3]{2k^2}\,\dfrac{L_n-u}{\sqrt[3]{u}}$. Значению $t_n = 0$ соответствует каустика $u = L_n$. При стремлении $u$ к нулю, т. е. при стремлении точки наблюдения к ребру клина, $t_n \to \infty$, а $|\psi_n|$ монотонно убывает до нуля. Область $u < L_n$ соответствует зоне тени. При $L_n < u < r_0$ (освещенная область) $t_n$ отрица-




Фиг. 3

тельно, функция $|v(t_n)|$ осциллирует, а поле нормальной волны $\psi_n$ имеет интерференционный характер. На фиг. 3 приведены графики функций $\dfrac{|v(t_n)|}{\sqrt[3]{ku}\,\sqrt{k^2(w^2-u^2)}} = \beta|\psi_n^\circ|$ ($\psi_n^\circ = \psi_n$ при $z=0$, $\beta = \Phi[4\sqrt[3]{2}\sqrt{\pi}k\sin\mu_n\varphi \times \sin\mu_n\varphi_0]^{-1}$) при $r_0 = 30\lambda$, $\Phi = 10°$ для второй и пятой нормальных волн (сплошные линии). На этой же фигуре отмечены каустики для 0, 1, . . . , 6-й нормальных волн. Расстояния между соседними каустиками постоянны и равны $\lambda/2\Phi$; они превышают расстояния между соседними максимумами нормальной волны. Первая каустика появляется на расстоянии $r = L_0 = \lambda/4\Phi$ от ребра, когда длина окружности с центром в точке $r = 0$, заключенной между гранями клина, станет равной $\lambda/4$. Следующие каустики появятся, когда длина дуги станет равной $3\lambda/4$, $5\lambda/4$ и т. д.

Если точка наблюдения $P$ перемещается по гиперболе $u = \text{const}$ в направлении от оси $r$, то

$$|\psi_n| = |\psi_n^0|\,\frac{\sqrt{r_0^2-u^2}}{\sqrt{w^2-u^2}}, \tag{14}$$

т. е. $|\psi_n|$ монотонно убывает как $(w^2-u^2)^{-1/2}$. Выражение (7) для $\psi_n$ можно также записать в координатах $u$ и $w$:

$$\psi_n = \frac{2\sqrt{2\pi}\sin\mu_n\varphi\sin\mu_n\varphi_0}{\Phi\sqrt[4]{k^2(u^2-L_n^2)(w^2-L_n^2)}}\,e^{i\pi/4}\times$$

$$\times\left[\frac{\exp\left\{ik\left(\sqrt{w^2-L_n^2}-\sqrt{u^2-L_n^2}\right)-i\mu_n\arccos\left[\dfrac{1}{uw}\left[L_n^2+\sqrt{(w^2-L_n^2)(u^2-L_n^2)}\right]\right]\right\}-}{\sqrt{\sqrt{w^2-L_n^2}-\sqrt{u^2-L_n^2}}}+\right.$$

$$\left. + \frac{\exp\left\{-i\frac{\pi}{2} + ik\left(\sqrt{w^2 - L_n^2} + \sqrt{u^2 - L_n^2}\right) - i\mu_n \arccos\left[\frac{1}{uw}\left(L_n^2 - \sqrt{(w^2 - L_n^2)(u^2 - L_n^2)}\right)\right]\right\}}{\sqrt{\sqrt{w^2 - L_n^2} + \sqrt{u^2 - L_n^2}}} \right].$$

Нетрудно показать, что это асимптотическое представление справедливо при $u - L_n \gg \lambda / \mu_n$.

4. До сих пор мы определяли асимптотику нормальных волн низких номеров, для которых $\mu_n < kr_0$. Для получения равномерной асимптотики функции $\psi_n(r, z, \varphi)$ при $\mu_n > kr_0$ удобно воспользоваться методом стационарной фазы. Полученное таким путем асимптотическое представление поля нормальной волны большого номера совпадает с формулой (13). Однако в этом случае $t$ всегда положительно и $|\psi_n|$ монотонно убывает при удалении точки наблюдения от источника. На фиг. 3 пунктиром изображена функция $\beta|\psi_7^0|$, рассчитанная при $r_0 = 30\lambda$, $\Phi = 10°$. Из сравнения кривых на фиг. 3 видно, что нормальные волны высоких номеров ($\mu_n > kr_0$) быстро затухают и дают вклад в общее поле на несколько порядков ниже, чем нормальные волны низких номеров.

Полученные формулы можно использовать при расчете характеристик звукового поля в прибрежной зоне, учитывая при этом только те нормальные волны, которые хорошо возбуждаются источником и проникают в данную область пространства.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Melvin I. Jacobson, John G. Clark. Refrected/reflected ray transmissions in a divergent channel. J. Acoust. Soc. America, 1967, **41**, 1, 167—176.
2. Melvin I. Jacobson, J. Thomas Warfield. Surface — reflected/bottom — reflected ray transmissions in a divergent channel. J. Acoust. Soc. America, 1968, **43**, 1, 15—24.
3. Allan D. Pierce. Extension of the method of normal modes to sound propagation in an almost-stratified medium. J. Acoust. Soc. America, 1965, **37**, 1, 19—27.
4. М. П. Сахарова. Асимптотическое представление звукового поля точечного источника в клиновидной области. Акуст. ж., 1959, **5**, 2, 215—220.
5. М. П. Сахарова. Об одном асимптотическом представлении поля распределенного излучателя с заданным распределением объемной скорости, расположенного в клиновидной области. Акуст. ж., 1965, **11**, 2, 215—221.
6. Ф. Франк, Р. Мизес. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. пятая, М.— Л., 1937.
7. Г. Д. Малюжинец. Некоторые обобщения метода отражений в теории дифракции синусоидальных волн (докт. диссертация). Физический ин-т им. П. Н. Лебедева АН СССР, 1951.
8. А. А. Тужилин. Новые представления дифракционных полей в клиновидных областях с идеальными границами. Акуст. ж., 1963, **9**, 2, 209—214.
9. R. N. Denham. Intensity-decay laws for sound propagation in shallow water of variable depth. J. Acoust. Soc. America, 1966, **39**, 6, 1170—1173.
10. В. К. Кузнецов. Рефракция нормальных волн в клине. Вестн. МГУ, 1967, **3**, 4, 19—21.



Сахалинский комплексный
научно-исследовательский институт
СО АН СССР
Новоалександровск



Поступила в редакцию
5 октября 1970 г.