Ниже рассматриваются пространственные биения в звуковом поле, создаваемом суперпозицией продольных $\lambda_1 = \lambda_l$ и поперечных $\lambda_2 = \lambda_t$ волн, излучаемых, например, кварцевой пластинкой y-среза в твердую среду [7]. Фотография ультразвукового пучка в стекле с возникшими в нем пространственными биениями приведена на фиг. 1. Фотоснимок получен при визуализации ультразвука теневым методом с применением поляризационной оптики, позволяющей выявить напряжения, возникающие в поле интерференции рассматриваемых волн. На фотографии видны пространственно-неподвижные волны биений, период которых по экспериментальным данным находится в соответствии с соотношением (1). По разные стороны от продольной оси, проходящей через середину ультразвукового пучка, волны биений, сдвинуты на половину периода (на L) друг относительно друга. Это обстоятельство связано с формой колебаний кварцевой пластинки y-среза, излучающей по разные стороны от средней линии продольные волны, фазы которых отличаются на π.

Ранее нами указывалось на образование третьей каустики внутри возбужденной цилиндрической оболочки, в которой распространяются два типа волн [6], и на связь этой каустики с образованием биений с полупериодом (1).

Если стеклянный брусок, вдоль продольной оси которого пьезокварцем y-среза возбуждается ультразвук, погрузить в воду, то в ней при использовании теневого метода наблюдается звуковое поле, представленное на фиг. 2. На этой фотографии из поля продольных и поперечных волн, распространяющихся в бруске, оптическим методом выделено только поле поперечных волн, плоскость поляризации которых совпадает с плоскостью фотоснимка. В этой же плоскости лежит волновой вектор излучаемого в воду ультразвукового поля, имеющего вид полос, ширина которых $d = L \sin\alpha$, где α — угол наклона полос к боковой поверхности бруска. Измерения показывают также, что $\cos\alpha \neq \lambda_0 / L$, где λ_0 — длина волны в жидкости. Это «боковое излучение» возникает с боковой поверхности ультразвукового пучка в стекле из областей максимумов волны биений и распространяется в направлении, не совпадающем с направлением волн λ_l и λ_t. Интенсивность бокового излучения, как видно из фиг. 2, периодически изменяется вдоль фронтов излучаемых волн. Пространственный период этой модуляции по расчетным и экспериментальным данным равен L. Звуковое поле в промежуточной области твердого тела между границей пучка и границей твердого тела не визуализировано на фотографии в условиях данного опыта.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Ржевкин. К вопросу о волновом поле пьезокварцевого излучателя, Докл. АН СССР, 1937, 16, 275—278.
2. J. Gotz. Über den Schalldurchgang durch Metallplatten in Flüssigkeiten bei schrägen Einfall einer ebenen Welle. Akust. Zs., 1943, 8, 145—152.
3. A. Schoch. Der Schalldruchgang durch Platten. Acustica, 1952, 2, 1—6.
4. Л. М. Лямшев. Отражение звука тонкими пластинками и оболочками в жидкости, М., Изд-во АН СССР, 1955.
5. И. А. Викторов, Р. А. Григорян. Квазирелеевские волны в упругом слое. Акуст. ж., 1959, 5, 3, 366—368.
6. В. И. Макаров, Н. А. Фадеева. Об излучении волн оболочками в звуковом поле. Акуст. ж., 1960, 6, 2, 261—262.
7. Н. А. Андреев. Равновесие и колебания пьезоэлектрического кристалла. Ж. прикл. физ., 1928, 5, 119—132.

Кафедра акустики
Московского государственного университета

Поступила в редакцию
26 октября 1971 г.

УДК 534.231.2

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ СЛОЙ — ПОЛУПРОСТРАНСТВО

А. И. Резанов

Для теоретического исследования различных физических процессов в системе слой — полупространство, протекающих с участием колебательных степеней свободы, полезно иметь аналитическое выражение для собственных частот системы в функции волнового числа, толщины слоя и характеристик свойств слоя и той среды, на которой он расположен. Однако характеристическое уравнение для собственных частот оказывается довольно сложным и полное исследование свойств его решения возможно лишь с помощью электронно-вычислительных машин. В предлагаемой работе строится приближенное решение, правомерное в том случае, когда разности плотностей и упругих постоянных обеих сред достаточно малы, а толщина слоя, выраженная в длинах волн, достаточно велика.

Вектор смещения в среде, заполняющей полупространство ($Z > H$, плотность ρ_2, модуль Юнга E_2, коэффициент Пуассона σ_2) описывается релеевской волной, распространяющейся в направлении оси x. Вектор смещения в слое ($0 < z < H$; ρ_1, E_1,

σ_1) выбирается в виде линейной комбинации двух релеевских волн. Граничными условиями задачи являются условие отсутствия внешних сил на свободной поверхности слоя и условия равенства напряжений и равенства смещений на поверхности контакта.

Характеристическое уравнение можно представить в следующем виде:

$$(q^2+\varkappa^2_{1t})^2/4q^2\varkappa_{1t}\varkappa_{1l}=F(\omega,\ q,\ H) \tag{1}$$

где q — волновое число, $\varkappa^2_{1t}=q^2-\omega^2/v^2_{1t}$; $\varkappa^2_{1l}=q^2-\omega^2/v^2_{1l}$; ω — частота, v_{1t} и v_{1l} — скорость, соответственно поперечных и продольных волн в неограниченном веществе слоя;

$$F=\frac{A_1-A_2\eta_{1t}^2+A_3\eta_{1l}^2-A_4\eta_{1t}^2\eta_{1l}^2+A_5(q^2+\varkappa_{1t}^2)\eta_{1t}\eta_{1l}/q^2}{A_1+A_2\eta_{1t}^2-A_3\eta_{1l}^2-A_4\eta_{1t}^2\eta_{1l}^2-4A_6q^2\eta_{1t}\eta_{1l}/(q^2+\varkappa_{1t}^2)}; \tag{2}$$

$$\eta_{1t}=\exp(-\varkappa_{1t}H); \qquad \eta_{1l}=\exp(-\varkappa_{1l}H);$$

$$A_1=N_1(P_2R_3-P_3R_2)-N_2(P_1R_3-P_3R_1)+(P_1R_2-P_2R_1); \tag{3}$$

$$A_2=L_1(P_2R_3-P_3R_2)-L_2(P_1R_3-P_3R_1)+L_3(P_1R_2-P_2R_1); \tag{4}$$

$$A_3=N_1(M_2R_3-M_3R_2)-N_2(M_1R_3-M_3R_1)+N_3(M_1R_2-M_2R_1); \tag{5}$$

$$A_4=L_1(M_2R_3-M_3R_2)-L_2(M_1R_3-M_3R_1)+L_3(M_1R_2-M_2R_1); \tag{6}$$

$$A_5=L_1(N_2R_3-N_3R_2)-L_2(N_1R_3-N_3R_1)+L_3(N_1R_2-N_2R_1); \tag{7}$$

$$A_6=M_1(R_3P_2-P_3R_2)-M_2(P_1R_3-P_3R_1)+M_3(P_1R_2-P_2R_1); \tag{8}$$

$$L_1=\varkappa_{2t}(q^2-\varkappa_{2t}\varkappa_{1t}); \quad L_2=-\varkappa_{2t}[\mu_1(q^2+\varkappa^2_{1t})-2\mu_2\varkappa_{1t}\varkappa_{2l}];$$

$$L_3=(2\sigma_1-1)q_2-1/2(2\sigma_2-1(q^2+\varkappa^2_{2t}); \quad M_1=\varkappa_{1t}+\varkappa_{2t}(\varkappa_{1l}-\varkappa_{2t});$$

$$M_2=-2\varkappa_{1t}\varkappa_{2t}(\mu_1\varkappa_{1l}-\mu_2\varkappa_{2t}); \quad M_3=1/2[(2\sigma_1-1)(q^2+\varkappa^2_{1t})-$$

$$-(2\sigma_2-1)(q^2+\varkappa^2_{2t})]; \quad N_1=-\varkappa_{2t}(q^2+\varkappa_{2t}\varkappa_{1t}); \quad N_2=\varkappa_{2t}[\mu_1(q_2+$$

$$+\varkappa^2_{1t})+2\mu_2\varkappa_{1t}\varkappa_{2l}]; \quad N_3=L_3; \quad P_1=-\varkappa_{1t}\varkappa_{2t}(\varkappa_{1l}+\varkappa_{2l});$$

$$P_2=2\varkappa_{1t}\varkappa_{2t}(\mu_1\varkappa_{1l}+\mu_2\varkappa_{2l}); \quad P_3=M_3; \quad R_1=-\varkappa_{1t}(q^2-\varkappa_{2t}\varkappa_{2l});$$

$$R_2=\mu_1\varkappa_{1t}[(q^2+\varkappa^2_{1t})-2\varkappa_{2l}\varkappa_{2t}]; \quad R_3=(2\sigma_2-1)[1/2(q^2+\varkappa^2_{2t}-q_2];$$

$\varkappa^2_{2t}=q^2-\omega^2/v^2_{2t}$; $\quad \varkappa^2_{2l}=q^2-\omega^2/v^2_{2l}$; μ_1, μ_2 — коэффициенты Ламе.

Уравнение (1) с правой частью, равной единице, имеет известное решение [1]: $\omega_0(q)=v_{1t}\varepsilon_1 q$. Функция F (2) оказывается сколь угодно близкой к единице в следующих двух случаях:

а) толщина слоя H неограниченно возрастает; при этом $\eta_{1t}\to 0$; $\eta_{1l}\to 0$; $F\to 1$;

б) разности параметров обеих сред исчезающе малы ($\Delta\rho\to 0$; $\Delta\mu\to 0$; $\Delta E\to 0$; $\Delta\sigma\to 0$); при этом $R_i=-L_i$, $M_i\to 0$ ($i=1,\ 2,\ 3$); по формулам (4)—(8) $A_i\to 0$ ($i=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$) и $F\to 1$. Поэтому в качестве нулевого приближения можно взять ω_0 и из формулы (1) найти поправочный член, пропорциональный $(F-1)_{\omega_0}$. Реализация этого соображения дает выражение

$$\omega(q,H)=\omega_0(q)\left[1+\frac{a}{\varepsilon_1}(F-1)_{\omega_0}\right], \tag{9}$$

где

$$(F-1)_{\omega_0}=\frac{1}{B_1}\left\{-2B_2\beta_{1t}{}^2+2B_3\beta^2_{1e}+\left[B_5(1+\Gamma^2_{2t1l})+\frac{4B_6}{1+\Gamma^2_{2t1t}}\right]\beta_{1t}\beta_{1e}\right\};$$

$$B_i=q^{-8}A_i\ (i=1,2\ldots 6); \quad \Gamma^2_{2t1t}=1-\varepsilon_1\gamma^2_{2t1l}; \ \gamma^2_{2t1t}=v^2_{2t}/v^2_{1t}/v^2_{1l};$$

$$\beta_{1t}=\exp(-qH\Gamma_{2t1t}); \qquad \beta_{1l}=\exp(-qH\Gamma_{2t1l});$$

$$\Gamma_{2+1l}=1-\varepsilon_1\gamma^2_{2t1l}; \quad \gamma^2_{2t1l}=v^2_{2t}/v^2_{1l};$$

$$a=\frac{4[1-\varepsilon_1{}^2(1+\gamma^2_{1t1l})+\varepsilon_1{}^4\gamma^2_{1t1l}]}{\varepsilon_1{}^7-6\varepsilon_1{}^5+4\varepsilon_1{}^3(3-2\gamma^2_{1t1l})-4\varepsilon_1(1-\gamma^2_{1t1l})}; \ \gamma^2_{1t1l}=v^2_{1t}/v^2_{1l}.$$

Правомерность полученного приближения (9) ограничена условием $a/\varepsilon_1(F-1)_{\omega_0}<$ <1, которое при произвольном соотношении между параметрами сред будет выполняться лишь для слоя достаточно большой толщины H.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. ОГИЗ, М.— Л., ГТТ, 1944, 583.

Таганрогский радиофизический институт

Поступило в редакцию 11 сентября 1970 г.