лаксации. Но вдали от критической точки расслаивания ($\Delta T = |T_{\text{кр}} - T| > 8°$) частотная зависимость скорости звука, в пределах ошибок опыта, следует формуле (1), т. е. с ростом ΔT спектр времен релаксации резко сужается.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. К. Хабибуллаев, С. С. Алиев. О кинетике флюктуаций концентрации в растворах триэтиламин — вода, имеющих критическую точку расслаивания, Ж. физ. хим., 1969, **43**, 11, 2953—2954.
2. С. С. Алиев, П. К. Хабибуллаев. Скорость ультразвука вблизи критической точки расслаивания бинарного раствора триэтиламин — вода, Вестник МГУ, сер. Химия, 1969, 6, 115.

Ташкентский гос. педагогический институт им. Низами

Поступило в редакцию 20 мая 1971 г.

УДК 534.22

ИЗЛУЧЕНИЕ ГАРМОНИК И КОМБИНАЦИОННЫХ ЧАСТОТ ВОЗДУШНЫМИ ПУЗЫРЬКАМИ

Е. А. Заболотская, С. И. Солуян

Воздушный пузырек в воде под действием гармонически изменяющегося давления совершает вынужденные колебания. Эти колебания имеют нелинейный характер. Поэтому наряду с волной, обладающей частотой вынуждающей силы, пузырек излучает высшие гармонические составляющие. Если пузырек находится в поле звукового давления двух частот, то он излучает волны с комбинационными частотами. Это явление может быть использовано практически для излучения волны низкой частоты.

Для количественного описания этого процесса выведем нелинейное уравнение малых колебаний пузырька воздуха в воде. Движение стенки пузырька в воде в приближении несжимаемой жидкости описывается уравнением Рэлея (1):

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho_0}(P_{\text{г}} - P). \tag{1}$$

Здесь R — радиус пузырька, ρ_0 — плотность воды, $P_{\text{г}}$ — давление газа в пузырьке, P — давление в среде, окружающей пузырек, точками обозначены производные по времени.

Напишем уравнение (1) для объема пузырька:

$$aV^{-1/3}\ddot{V} - \frac{a}{6}V^{-4/3}\dot{V}^2 = P_{\text{г}} - P, \tag{2}$$

где $a = \rho_0 / 3^{1/3}(4\pi)^{2/3}$.

Изменение давления в окружающей среде вызывает пульсации пузырька. Предположим, что отклонение давления от равновесного значения, а также колебания пузырька малы, т. е.

$$P = P_0 + P'; \qquad V = V_0 + V', \tag{3}$$

$$\frac{P'}{P_0} \ll 1; \qquad \frac{V'}{V_0} \ll 1. \tag{4}$$

Если пренебречь теплообменом между полостью и окружающей средой, то процесс можно считать адиабатическим:

$$P_{\text{г}} = P_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma}. \tag{5}$$

Подставляя выражения (3) и (5) в уравнение (2) и сохраняя малые члены порядка $(V' / V_0)^2$, получим уравнение для малых колебаний идеального пузырька:

$$\ddot{V} + \omega_0^2 V - \alpha V^2 - \beta(2\ddot{V}V + \dot{V}^2) = -\varepsilon P. \tag{6}$$

Здесь введены обозначения $\omega_0^2 = 3\gamma P_0 / \rho_0 R_0^2$, $\alpha = 3\beta(\gamma + 1)\omega_0^2$, $\beta = {}^{1}/_{8}\pi R_0^3$, $\varepsilon = 4\pi R_0 / \rho_0$, где R_0 — равновесное значение радиуса пузырька; переменные V и P, штрихи над которыми опущены, здесь и в дальнейшем характеризуют возмущение объема и давления.

Нелинейный характер малых колебаний полости обусловлен двумя причинами: нелинейностью уравнения состояния газа в пузырьке αV^2 и динамической нелинейностью $\beta(2\ddot{V}V+\dot{V}^2)$.

До сих пор мы пренебрегали диссипацией энергии в процессе колебаний. Для учета затухания дополним уравнение (6) членом, пропорциональным скорости изменения объема пузырька.

$$\ddot{V}+\omega_0^2 V-\alpha V^2-\beta(2\ddot{V}V+\dot{V}^2)+f\dot{V}=-\varepsilon P. \qquad (7)$$

Для того чтобы связать феноменологически введенный коэффициент f с экспериментально определяемыми величинами, рассмотрим распространение звуковой волны через слой с пузырьками воздуха. Тогда уравнение движения одного пузырька (7) нужно решать совместно с волновым уравнением [2]

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}=\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}+\rho_0 n\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \qquad (8)$$

где c_0 — скорость распространения звука в жидкости, n — концентрация пузырьков.

Если V и P гармонические функции времени с частотой ω, то скорость распространения c становится комплексной величиной и в линейном приближении определяется выражением

$$\frac{1}{c^2}=\frac{1}{c_0^2}+\frac{\rho_0 n\varepsilon}{\omega_0^2-\omega^2+if\omega}. \qquad (9)$$

В этом случае $\operatorname{Re} k$, где k — волновой вектор, характеризует скорость распространения волны, а $\operatorname{Im} k$ — затухание.

$$\operatorname{Im} k=\frac{-\rho_0 n\varepsilon\omega^2 c_0 f}{2[(\omega_0^2-\omega^2)^2+f^2\omega^2]}. \qquad (10)$$

С другой стороны, интенсивность звука, прошедшего через слой с пузырьками воздуха, определяется через интенсивность звука на границе слоя I_0, зависит от поперечного сечения поглощения энергии σ и от толщины слоя x:

$$I=I_0 e^{-n\sigma x}. \qquad (11)$$

Используя известное выражение для коэффициента σ [3]

$$\sigma=\frac{4\pi R_0\left(\dfrac{\delta}{\eta}\right)}{\left(\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}-1\right)^2+\delta^2}, \qquad (12)$$

в котором безразмерный коэффициент δ учитывает потери на преодоление внутреннего трения в системе жидкость — пузырьки воздуха диссипацию энергии из-за теплообмена, приводящего к сдвигу по фазе между объемом пузырька и давлением в нем, а также потери на акустическое излучение. Приравнивая $n\sigma/2$ выражению (10), мы найдем значение феноменологически введенного коэффициента f:

$$f=\delta_r\omega, \qquad (13)$$

где δ_r — резонансное значение δ, т. е. при $\omega=\omega_0$.

Допустим, что давление вне полости изменяется по закону:

$$P=A\cos(\omega t+\varphi). \qquad (14)$$

Тогда полость совершает колебания с частотой вынуждающей силы ω и с частотой 2ω, обусловленной нелинейностью уравнения движения пузырька (7). Амплитуда колебаний объема пузырька с удвоенной частотой, как нетрудно показать, будет

$$V_{2\omega}=\frac{\varepsilon^2(\alpha-3\beta\omega^2)A^2}{2[(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^4\delta^2][(\omega_0^2-4\omega^2)^2+16\omega^4\delta^2]^{1/2}}. \qquad (15)$$

Отсюда видно, что оба вида нелинейности имеют разные знаки и при частоте $\omega^2=(\gamma+1)\omega_0^2$ компенсируют друг друга. При низких частотах, $\omega\ll\omega_0$ можно не учитывать динамическую нелинейность, тогда как на высоких частотах вдали от резонанса она играет основную роль.

Таким образом под воздействием вынуждающей силы (14) при $\omega^2\neq(\gamma+1)\omega_0^2$ пульсирующая воздушная полость излучает сферические расходящиеся волны с частотами ω и 2ω.

Рассмотрим теперь случай, когда пузырек находится в поле давления двух частот:

$$P = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \tag{16}$$

Под воздействием вынуждающей силы (16) воздушная полость наряду с волнами основных частот ω_1 и ω_2 будет излучать волны суммарной $(\omega_1 + \omega_2)$ и разностной $(\omega_1 - \omega_2)$ частот.

Уравнение (7) позволяет вычислить амплитуды колебаний комбинационных частот. Приведем здесь величину амплитуды колебаний объема пузыря с разностной частотой: $\Omega = |\omega_1 - \omega_2|$,

$$V_\Omega = \frac{\varepsilon^2[\alpha - \beta(\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_1\omega_2)]A_1A_2}{\{[(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + \omega_1^4\delta^2][(\omega_0^2 - \omega_2^2)^2 + \omega_2^4\delta^2][(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Omega^4\delta^2]\}^{1/2}}. \tag{17}$$

Если частоты вынуждающих сил близки, то пульсирующая полость излучает расходящуюся сферическую волну низкой частоты, амплитуды давления в которой на расстоянии $r \gg \lambda$ можно представить в виде [1]:

$$P = \frac{\Omega^2 \rho_0 V_\Omega}{4\pi r}. \tag{18}$$

Если пузырьков много и располагаются они в слое, толщина которого $l < \lambda$, причем слой находится вблизи излучателя, то излучение совокупностью пузырьков является когерентным. Действительно, пульсации пузырьков в ближней зоне излучателя синфазны. При концентрации пузырьков, позволяющей пренебречь их влиянием друг на друга, интенсивность излученной разностной волны пропорциональна квадрату числа пузырьков.

В качестве грубого критерия взаимодействия пузырьков может быть использована зависимость собственной частоты колебаний пузырьков от взаимного расстояния между ними. Если пульсирующий пузырек окружен слоем несжимаемой жидкости толщиной $r_1 - R$, то собственная частота колебаний такого пузырька связана с частотой колебаний пузырька, находящегося в неограниченном пространстве, следующим образом:

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{1 - \dfrac{R}{r_1}}. \tag{19}$$

Численные оценки показывают, что при концентрации резонансных пузырьков, обеспечивающей содержание 10^{-2} частей воздуха на 1 часть воды, коэффициент преобразования основной частоты в разностную по интенсивности составит десятые доли процента.

В заключении подчеркнем еще раз, что все результаты, относящиеся и к генерации гармоники, и к генерации разностной частоты, основаны на решении уравнения нелинейных колебаний воздушной полости в среде, представляющей собой смесь воды с пузырьками воздуха, т. е. в среде, обладающей нелинейностью и дисперсией. Именно учет этих свойств позволяет получить уравнение (7), на основе которого и производился настоящий анализ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред, ГИТТЛ, М., 1953.
2. Е. А. Заболотская, С. И. Солуян. Об одной возможности усиления акустических волн. Акуст. ж., 1967, 13, 2, 296—298.
3. Физические основы подводной акустики. М., 1955.

Институт народного хозяйства
им. Г. В. Плеханова
Москва

Поступила в редакцию
19 мая 1971 г.

УДК 534.29

ВЛИЯНИЕ УЛЬТРАЗВУКА НА ДИФФУЗИЮ ФОСФОРА В СЕМЕНА ВИНОГРАДА

А. Я. Земшман, В. С. Семин

Проникновение различных веществ из внешней среды в клетки семян связано с процессом диффузии. Как известно, при замачивании семян, из раствора, вследствии градиента концентрации, происходит проникновение вещества во внутрь семени, что приводит к его набуханию. Однако, при этом скорость проникновения вещества через плотные оболочки семян довольно низка.