АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVIII 1972 Вып. 4

УДК 534.231.1

РАЗЛОЖЕНИЕ ПОЛЯ В ПОДВОДНОМ АКУСТИЧЕСКОМ КАНАЛЕ В РЯД ПО НОРМАЛЬНЫМ ВОЛНАМ*

Н. Н. Войтович, А. Д. Шатров

Рассматривается задача о возбуждении точечным источником слоя жидкости, лежащего на однородном жидком полупространстве и ограниченного сверху абсолютно мягкой стенкой. Слой, вообще говоря, неоднороден по вертикали. Для полного поля внутри слоя получено представление в виде ряда, причем каждый член ряда представляет собой произведение функций вертикальной и горизонтальной координат. Функции вертикальной координаты такие же, как у нормальных волн, однако зависимость членов ряда от горизонтальной координаты не сводится к функции Ханкеля. Эффективность полученного разложения иллюстрируется численными данными, относящимися к простейшему случаю однородного по всей глубине слоя.

Расчет звуковых полей в море обычно проводят в предположении, что слой воды неоднороден только по вертикали. Грунт при этом считают однородной жидкостью, а границу вода — воздух абсолютно мягкой [1]. Тогда задача определения поля, возбуждаемого точечным источником, сводится к решению следующего уравнения для амплитуды звукового давления:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{m(z)}\frac{\partial U(z,r)}{\partial z}\right]+\frac{1}{m(z)}\left[\frac{\partial^2 U(z,r)}{\partial x^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 U(z,r)}{\partial y^2}+k^2n^2(z)U(z,r)\right]=-4\pi\delta(x)\delta(y)\delta(z-z_0), \qquad (1^{а})$$

$$U(0,\,r)=0, \qquad (1^{б})$$

$$U(H-0,\,r)=U(H+0,\,r), \qquad (1^{в})$$

$$\frac{1}{m(H-0)}\frac{\partial U}{\partial z}(H-0,r)=\frac{\partial U}{\partial z}(H+0,r), \qquad (1^{г})$$

где z — глубина точки наблюдения, $r=\sqrt{x^2+y^2}$ — горизонтальное расстояние между источником и точкой наблюдения, z_0 — глубина расположения источника, H — глубина слоя, k — волновое число в грунте, $m(z)$ — относительная плотность слоя, равная единице, если $z>H$, $n(z)$ — относительный показатель преломления слоя, равный единице, если $z>H$. Поле $U(z,\,r)$ должно также удовлетворять условию излучения (временная зависимость предполагается в виде $\exp(i\omega t)$).

Наиболее распространенным является представление решения задачи (1) в виде интеграла типа Фурье — Бесселя [1, 2] (интегральное разложение по продольному волновому числу). Деформацией контура этот интеграл нельзя полностью преобразовать в сумму соответствующих вычетов; к этой сумме (нормальные волны) всегда необходимо добавлять интеграл

* Основные результаты этой работы докладывались на V Всесоюзном симпозиуме по дифракции и распространению волн (Ленинград, июнь 1970 г.)

вдоль берегов разреза (боковая волна). Интегральное разложение такого типа поддается аналитическому исследованию лишь в дальней зоне, где к интегралу можно применить асимптотические методы оценки [1].

Вблизи источника единственным способом определения поля является численное интегрирование. Если глубина слоя достаточно велика, то интегрирование сопряжено со значительными трудностями, так как подынтегральная функция быстро осциллирует и, кроме того, имеет особенности на контуре интегрирования или вблизи него [2]. От особенностей удается иногда избавиться специальной деформацией контура [3, 4], но осцилляции, как правило, остаются.

В настоящей работе для поля внутри слоя получено представление в виде ряда. Этот ряд получен из интегрального разложения поля по поперечному волновому числу. Заметим, что для случая двумерных слоистых волноводов аналогичное интегральное разложение хорошо известно в электродинамике [5—7].

В работе [8] для диэлектрического двумерного волновода получено и соответствующее дискретное представление.

Ниже мы, следуя работе [7], получим решение задачи (1) в виде интегрального разложения по собственным функциям однородного дифференциального уравнения

$$\left[\frac{1}{m(z)}\varphi'(z,\varkappa^2)\right]'+\frac{1}{m(z)}\{k^2[n^2(z)-1]+\varkappa^2\}\varphi(z,\varkappa^2)=0 \qquad (2^{\text{а}})$$

с граничными условиями

$$\varphi(0,\varkappa^2)=0, \qquad (2^{\text{б}})$$

$$\varphi(H-0,\varkappa^2)=\varphi(H+0,\varkappa^2), \qquad (2^{\text{в}})$$

$$\frac{1}{m(H-0)}\varphi'(H-0,\varkappa^2)=\varphi'(H+0,\varkappa^2). \qquad (2^{\text{г}})$$

Решения $\varphi(z,\varkappa^2)$, ограниченные (но не убывающие) при $z\to\infty$, образуют непрерывный спектр, заполняющий полуось $0<\varkappa<\infty$. Очевидно, что вне слоя функции непрерывного спектра имеют вид

$$\varphi(z,\varkappa^2)=\varphi(H-0,\varkappa^2)\cos\varkappa(z-H)+$$
$$+\frac{1}{m(H-0)}\varphi'(H-0,\varkappa^2)\frac{\sin\varkappa(z-H)}{\varkappa}\quad(z>H). \qquad (3)$$

Наряду с функциями непрерывного спектра может существовать дискретный набор решений задачи (2) $\varphi(z,\varkappa_p^2)=\varphi_p(z)$, убывающих при $z\to\infty$. Вне слоя такие решения должны иметь вид

$$\varphi_p(z)=\varphi_p(H)e^{-i\varkappa_p(z-H)}\quad(z>H), \qquad (4)$$

причем $\varkappa_p''<0$ $(\varkappa_p=\varkappa_p'+i\varkappa_p'')$. Здесь и ниже под H понимается $H-0$. Внутри слоя $\varphi_p(z)$ являются решениями краевой задачи

$$\left[\frac{1}{m(z)}\varphi_p'(z)\right]'+\frac{1}{m(z)}\{k^2[n^2(z)-1]+\varkappa_p^2\}\varphi_p(z)=0 \qquad (5^{\text{а}})$$

$$\varphi_p(0)=0, \qquad (5^{\text{б}})$$

$$\frac{1}{m(H)}\varphi_p'(H)+i\varkappa_p\varphi_p(H)=0. \qquad (5^{\text{в}})$$

В литературе [9—12] подробно исследован частный случай этой задачи $(m(z)\equiv 1)$, встречающийся в квантовой теории рассеяния.

В дальнейшем нас будут интересовать все собственные функции задачи (5), а не только соответствующие $\varkappa_p''<0$. Отметим некоторые особенности этой задачи. Мы будем считать $m(z)$ и $n(z)$ вещественными доста-

точно гладкими на интервале $(0, H)$ функциями, причем $m(z) > 0$ и $m(H) \neq 1$. Очевидно, что вместе с $\varkappa_p$ и $\varphi_p(z)$ собственными элементами задачи (5) являются $-\varkappa_p^* = -\varkappa_p' + i\varkappa_p''$ и соответственно $\varphi_p^*(z)$. Умножая (5[а]) на $\varphi_p^*(z)$ и интегрируя по интервалу $(0, H)$, получаем

$$\varkappa_p'\left\{|\varphi_p(H)|^2 - 2\varkappa_p''\int_0^H \frac{1}{m(z)}|\varphi_p(z)|^2 dz\right\} = 0. \tag{6}$$

Отсюда следует, что $\varkappa_p' = 0$, либо $\varkappa_p'' > 0$. В асимптотике $(|\varkappa_p| \to \infty)$ имеет место

$$\varkappa_p H \sim \pi p + \frac{i}{2}\ln\left|\frac{m(H)+1}{m(H)-1}\right| + \begin{cases} 0, \text{ если } m(H) > 1, \\ \dfrac{\pi}{2}, \text{ если } m(H) < 1. \end{cases} \tag{7}$$

Следовательно, задача (5) имеет бесконечный спектр, но только конечное число собственных значений расположено в нижней полуплоскости — на мнимой оси.

Функции $\varphi(z, \varkappa^2)$ и $\varphi_p(z)$, соответствующие непрерывному и дискретному спектрам задачи (2), обладают ортогональностью [7]:

$$\int_0^\infty \frac{1}{m(z)}\varphi(z, \varkappa^2)\varphi(z, \tilde{\varkappa}^2)\,dz = N^2(\varkappa^2)\,\delta(\varkappa - \tilde{\varkappa}), \tag{8[а]}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{m(z)}\varphi_p(z)\varphi_q(z)\,dz = N_p^2\delta_{pq}, \tag{8[б]}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{m(z)}\varphi(z, \varkappa^2)\varphi_p(z)\,dz = 0, \tag{8[в]}$$

где для нормировки непрерывного спектра справедлива формула

$$N^2(\varkappa^2) = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{\varkappa^2 m^2(H)}\varphi'^2(H, \varkappa^2) + \varphi^2(H, \varkappa^2)\right]. \tag{9}$$

Нормировку дискретного спектра, учитывая формулу (4), можно написать в виде

$$N_p^2 = \int_0^H \frac{1}{m(z)}\varphi_p^2(z)\,dz + \frac{1}{2i\varkappa_p}\varphi_p^2(H). \tag{10}$$

В дальнейшем все собственные функции $\varphi_p(z)$ задачи (5) будут предполагаться нормированными так, что $N_p^2 = 1$.

На интервале $(0, \infty)$ система функций $\varphi(z, \varkappa^2)$, $\varphi_p(z)$ $(0 < \varkappa < \infty$, $\varkappa_p'' < 0)$ является полной в классе квадратично интегрируемых функций [13, стр. 343], т. е.

$$\frac{1}{m(z)}\int_0^\infty \frac{1}{N^2(\varkappa^2)}\varphi(z, \varkappa^2)\varphi(z_0, \varkappa^2)\,d\varkappa - \frac{1}{m(z)}\sum \varphi_p(z)\varphi_p(z_0) = \delta(z - x_0). \tag{11}$$

Полнота этой системы позволяет искать решение исходной задачи в виде

$$U(z, r) = \int_0^\infty F(r, \varkappa^2)\varphi(z, \varkappa^2)\,d\varkappa + \sum F_p(r)\varphi_p(z). \tag{12}$$

Подставляя выражения (12) и (11) в уравнение (1) и учитывая ортогональность (8), можно получить дифференциальные уравнения для $F(r, \varkappa^2)$

и $F_p(r)$. Решениями этих уравнений, удовлетворяющими условиям излучения, являются функции

$$F(r, \varkappa^2) = -\pi i H_0^{(2)}(hr) \frac{\varphi(z_0, \varkappa^2)}{N^2(\varkappa^2)}, \tag{13а}$$

$$F_p(r) = -\pi i H_0^{(2)}(h_p r) \varphi_p(z_0), \tag{13б}$$

где $h = \sqrt{k^2 - \varkappa^2}$ и $h_p = \sqrt{k^2 - \varkappa_p^2}$, причем $h > 0$, если $\varkappa^2 < k^2$, $\operatorname{Im} h < 0$, если $\varkappa^2 > k^2$, $h_p > 0$.

Подставив выражения (13) в формулу (12), получим искомое разложение поля по поперечному волновому числу

$$U(z, r) = -2i \int_0^\infty \frac{\varkappa^2 \varphi(z_0, \varkappa^2) \varphi(z, \varkappa^2)}{\frac{1}{m^2(H)} \varphi'^2(H, \varkappa^2) + \varkappa^2 \varphi^2(H, \varkappa^2)} \times$$

$$\times H_0^{(2)}(hr)\, d\varkappa - \pi i \sum \varphi_p(z_0) \varphi_p(z) H_0^{(2)}(h_p r). \tag{14}$$

Напомним, что суммирование здесь распространяется лишь на те собственные функции $\varphi_p(z)$ задачи (5), для которых $\varkappa_p'' < 0$. В электродинамике волны $\varphi_p(z) H_0^{(2)}(h_p r)$ с такими поперечными волновыми числами $\varkappa_p$ называют поверхностными. В дальнейшем мы будем пользоваться этим термином.

Для частного случая однородного слоя представление типа (14) было получено в работе [3] преобразованием интегрального разложения по продольному волновому числу.

Перейдем теперь к рассмотрению дискретного представления поля. Из формулы (14) мы получим представление поля в виде ряда. С этой целью мероморфный подынтегральный множитель в этой формуле мы разложим на простейшие дроби. При таком разложении будут использованы все собственные значения и собственные функции задачи (5).

Из общей теории дифференциальных уравнений следует, что выражение

$$\frac{\varkappa^2 \varphi(z_0, \varkappa^2) \varphi(z, \varkappa^2)}{\frac{1}{m^2(H)} \varphi'^2(H, \varkappa^2) + \varkappa^2 \varphi^2(H, \varkappa^2)} \tag{15}$$

представляет собой мероморфную функцию $\varkappa^2$ с полюсами в точках $\varkappa_p^2$, соответствующих собственным значениям задачи (5). Используя известную асимптотику функций $\varphi(z, \varkappa^2)$ и $\varphi'(z, \varkappa^2)$ при $|\varkappa| \to \infty$ внутри слоя и продолжение $\varphi(z, \varkappa^2)$ за пределы слоя (3), легко показать, что выражение (15) при $z + z_0 \leqslant 2H$ является ограниченной на некоторой расширяющейся последовательности контуров функцией $\varkappa^2$. Поэтому если все полюсы функции (15) простые и нуль не является собственным значением задачи (5), то выражение (15) при $z + z_0 \leqslant 2H$ допускает представление (разложение Миттаг-Леффлера)

$$\sum \frac{\varkappa^2}{\varkappa_p^2} \frac{c_p}{\varkappa^2 - \varkappa_p^2}, \tag{16}$$

где c_p — вычеты функции (15) в полюсах $\varkappa_p^2$. С помощью формулы

$$\left[\frac{1}{m(H)} \varphi'(H, \varkappa^2) + i\varkappa_p \varphi(H, \varkappa^2)\right] \varphi_p(H) =$$

$$= (\varkappa_p^2 - \varkappa^2) \int_0^H \frac{1}{m(z)} \varphi(z, \varkappa^2) \varphi_p(z)\, dz, \tag{17}$$

которая следует из формул (2) и (5), легко найти вычеты c_p и получить разложение

$$\frac{\varkappa^2\varphi(z_0,\varkappa^2)\varphi(z,\varkappa^2)}{\frac{1}{m^2(H)}\varphi'^2(H,\varkappa^2)+\varkappa^2\varphi^2(H,\varkappa^2)}=\Sigma\frac{\varkappa^2\varphi_p(z_0)\varphi_p(z)}{2i\varkappa_p(\varkappa^2-\varkappa_p^2)}. \tag{18}$$

Подставив это выражение в формулу (14), мы получим искомое разложение поля

$$U(z,r)=\sum\varphi_p(z_0)\varphi_p(z)\Phi(r,\varkappa_p)\qquad(z+z_0\leqslant 2H). \tag{19}$$

Для $\Phi(r,\varkappa_p)$ путем довольно громоздких выкладок, которые мы опускаем, можно получить выражение

$$\Phi(r,\varkappa_p)=ie^{-ikr}\left[\int_0^\infty\frac{e^{-t}\,dt}{\sqrt{\varkappa_p^2r^2-2ikrt-t^2}}-\frac{1}{\varkappa_p r}\right]+$$

$$+\begin{cases}-\pi iH_0^{(2)}(h_pr) & \text{для поверхностных и вытекающих волн,}\\ 0 & \text{для остальных волн,}\end{cases} \tag{20}$$

где $h_p=\sqrt{k^2-\varkappa_p^2}$, причем $h_p>0$ для поверхностных волн и $\operatorname{Im}h_p<0$ для вытекающих. Вытекающими волнами мы, пользуясь терминологией работы [14], называем нормальные волны, поперечные волновые числа которых лежат в первом квадранте комплексной плоскости $\varkappa$ ниже кривой

$$\varkappa''=\frac{k\varkappa'}{\sqrt{k^2+\varkappa'^2}}. \tag{21}$$

Разложение (19) сходится к искомому полю (абсолютно и равномерно по z) лишь при $0\leqslant z\leqslant 2H-z_0$. Это условие выполняется, в частности, если источник и точка наблюдения расположены внутри слоя, включая границы. Члены ряда (19) ведут себя как $1/p^3$.

Система функций $\varphi_p(z)$ полна и линейно независима на интервале $(0, 2H)$ [11]. Полученное же разложение (19) сходится к полю на интервале меньшем, чем $(0, 2H)$. На этом интервале функции $\varphi_p(z)$, естественно, линейно зависимы, и поэтому разложение (19) не единственно [12]. Все другие разложения могут быть получены из разложения (19) путем почленного сложения с разложением тождественного нуля на том же интервале. В частности, при $z+z_0<2H$ имеет место тождество

$$\Sigma\frac{\varphi_p(z_0)\varphi_p(z)}{\varkappa_p}\equiv 0\qquad(z+z_0<2H), \tag{22}$$

вытекающее из очевидного равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varkappa\varphi(z_0,\varkappa^2)\varphi(z,\varkappa^2)}{\frac{1}{m^2(H)}\varphi'^2(H,\varkappa^2)+\varkappa^2\varphi^2(H,\varkappa^2)}\,d\varkappa=0, \tag{23}$$

если в нем замкнуть контур интегрирования в верхней (или нижней) полуплоскости. Это дает возможность наряду с формулой (19) написать

$$U(z,r)=\sum\varphi_p(z_0)\varphi_p(z)\tilde{\Phi}(r,\varkappa_p)\qquad(z+z_0<2H), \tag{24}$$

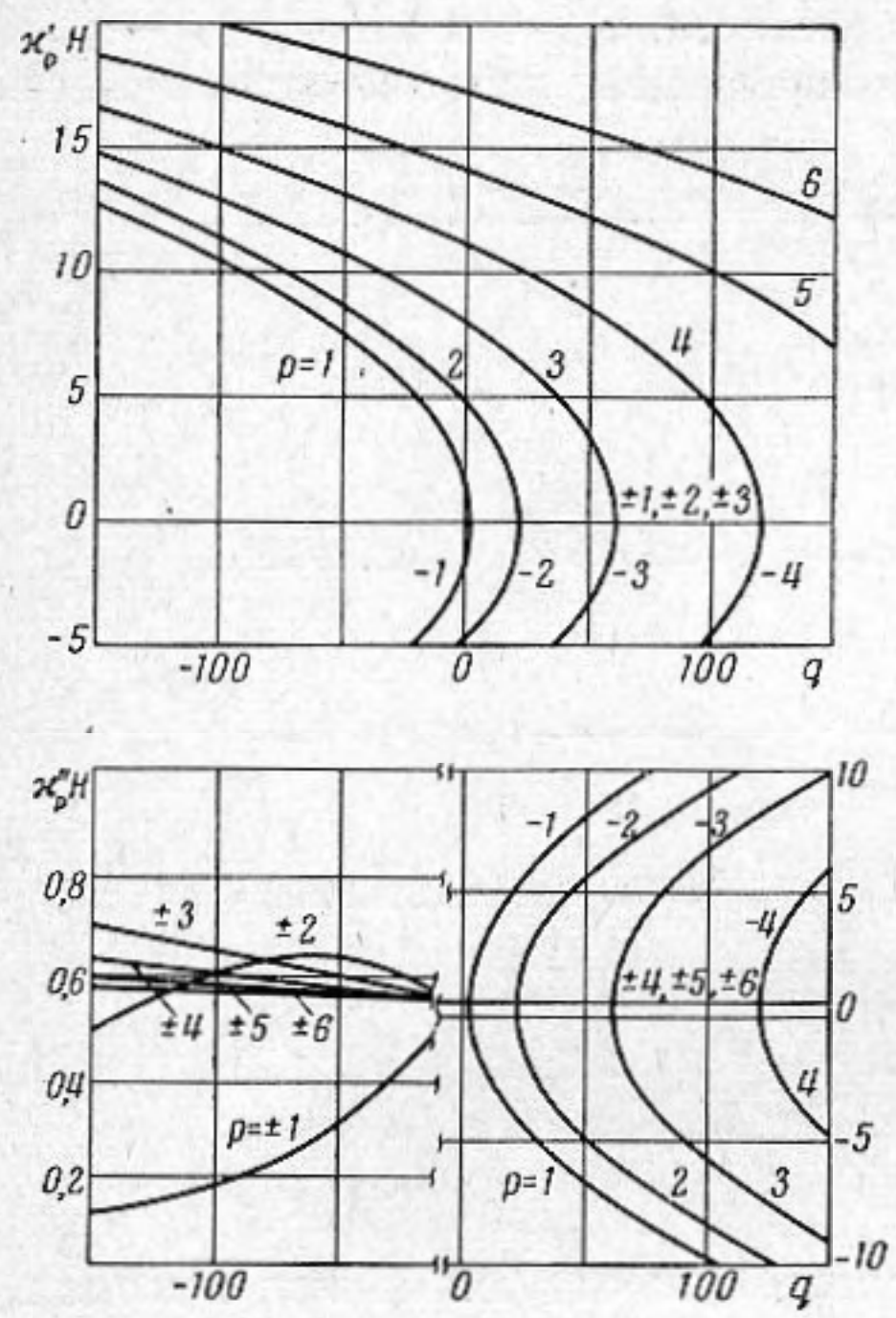
где $\tilde{\Phi}$ отличается от Φ отсутствием слагаемого $-\frac{1}{\varkappa_p r}$ в квадратных скобках формулы (20). Чтобы тождество (22) и, следовательно, выражение

(24) имели смысл и при $z = z_0$, суммирование следует проводить попарно ($\varkappa_p$ и $-\varkappa_p^*$).

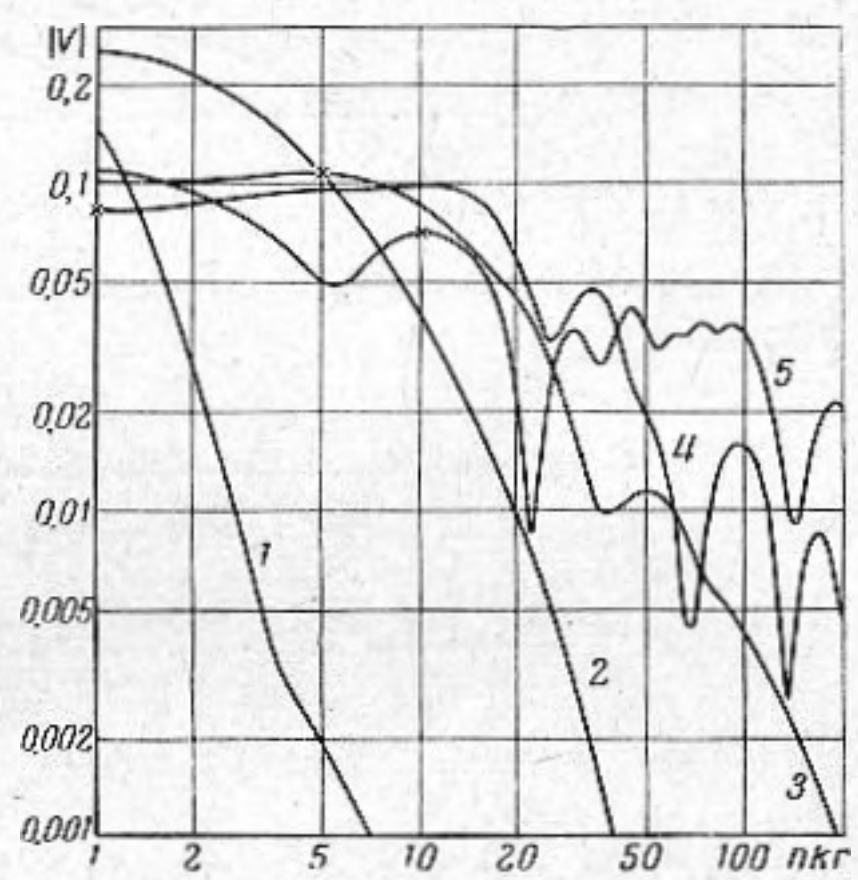
Тождество (22) несправедливо при $z + z_0 = 2H$, поэтому разложение (24) сходится к полю $U(z, r)$ на полуоткрытом интервале $0 \leqslant z < 2H - z_0$ неравномерно по z. Оно не позволяет рассчитать звуковое поле в том случае, если и источник и точка наблюдения находятся на дне. Для численных расчетов ряд (24) малопригоден, так как его члены убывают по модулю лишь как $1/p$.

Однако при малых r представление (24) может оказаться удобнее, чем (19), поскольку при $r = 0$ функции $\widetilde{\Phi}(r, \varkappa_p)$ имеют более слабую особенность, чем $\Phi(r, \varkappa_p)$. Поле $U(z, r)$ при $r = 0$ и $z \neq z_0$ не имеет особенности, однако не может быть вычислено с помощью (19) или (24).

Рассмотрим теперь численные результаты. Разложение (19) было положено в основу численных расчетов, выполненных на ЭВМ для простей-



Фиг. 1



Фиг. 2

шего случая однородного по всей глубине слоя $m(z) = m$, $n(z) = n$ $(0 < z < H)$. Ненормированные решения задачи (5) для этого случая очевидны.

$$\varphi_p(z) = \sin \sqrt{q + (\varkappa_p H)^2}\, \frac{z}{H}, \tag{25}$$

где $q = k^2 H^2 (n^2 - 1)$. Собственные числа $\varkappa_p H$ находятся из известного дисперсионного уравнения

$$\sqrt{q + (\varkappa_p H)^2} \operatorname{ctg} \sqrt{q + (\varkappa_p H)^2} + im\varkappa_p H = 0. \tag{26}$$

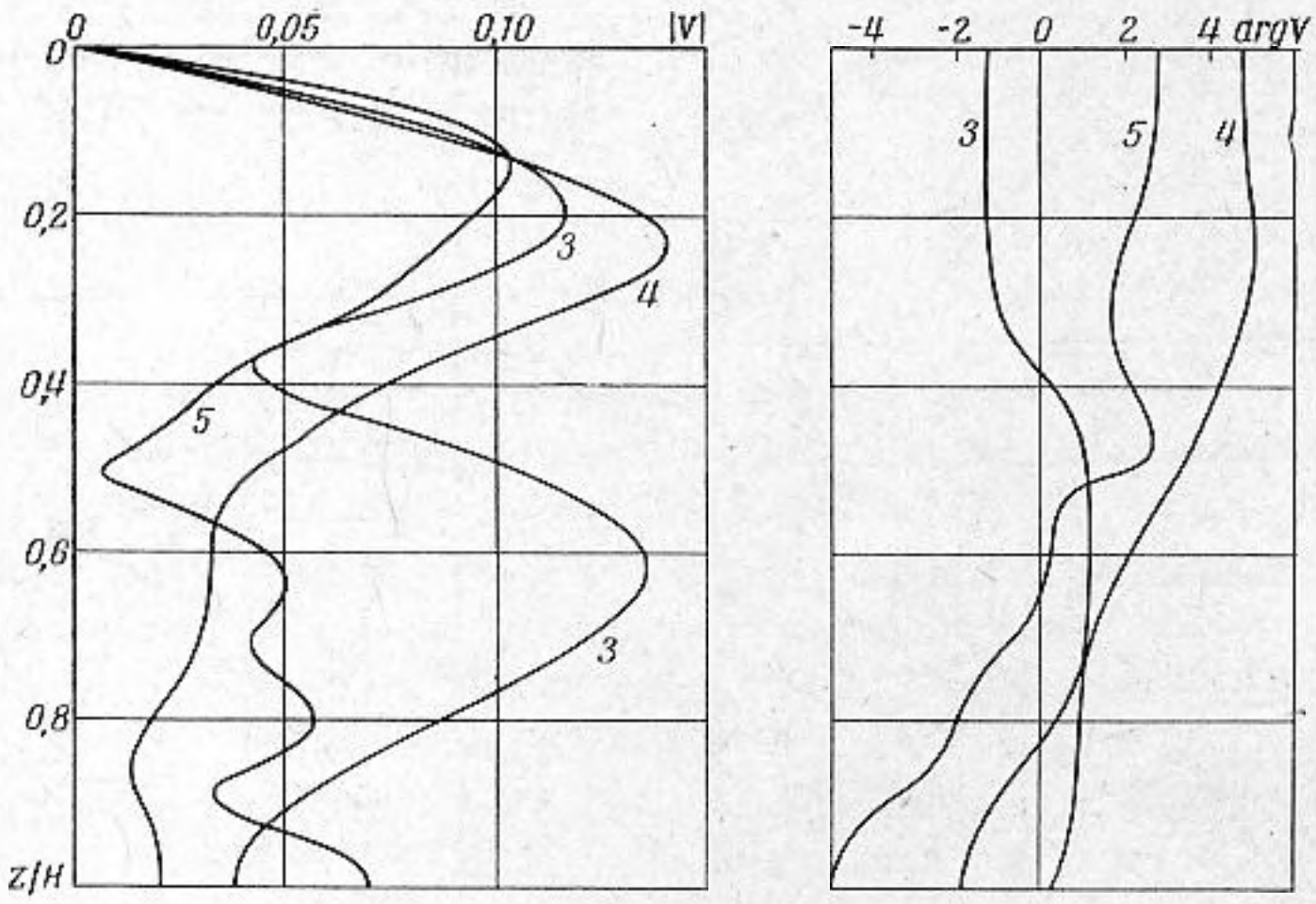
Ограничимся практически интересным случаем $m < 1$. Тогда при $q = 0$ $(n = 1)$ явное решение уравнения (26) имеет вид (ср. с формулой (7))

$$\varkappa_{\pm p} H = \mp \frac{\pi}{2} \pm \pi p + \frac{i}{2} \ln \frac{1+m}{1-m} \qquad (p = 1; 2; 3; \ldots). \tag{27}$$

Все численные расчеты соответствуют $m = 0{,}5$. Проследим за поведением корней уравнения (26) в зависимости от q (несколько первых корней приведено на фиг. 1). О поведении корней аналогичных уравнений см. [13, стр. 332, 15, 16]. Увеличение q от 0 $(n > 1)$ вызывает перемещение $\varkappa_p H$ в направлении к мнимой оси. При некотором значении q корни, двигающиеся симметрично в левой и правой полуплоскостях, доходят до мнимой оси и сливаются на ней в двойной корень. Этот корень сразу же распа-

дается на два простых, которые перемещаются по мнимой оси — один вверх, другой вниз. При $q = \frac{\pi^2}{4}$ корень, двигавшийся вниз, достигает начала координат и переходит на мнимую отрицательную полуось. Так возникает первая поверхностная волна. Таким же путем на мнимую отрицательную полуось попадает второй корень $\left(q = \frac{9\pi^2}{4}\right)$, третий $\left(q = \frac{25\pi^2}{4}\right)$, и т. д.

При изменении q в отрицательную область ($n < 1$) первые корни удаляются от мнимой оси. При $q \to -\infty$ эти корни могут сколь угодно близко подходить к действительной оси в окрестностях точек $\varkappa H = \pm\sqrt{-q}$. Корням с малой мнимой частью (и положительной действительной частью)



Фиг. 3

соответствуют слабо вытекающие волны, существующие при высоких частотах, когда из-за скользящего падения волн на границу раздела сред последняя по свойствам близка к абсолютно отражающей границе. Слабо вытекающие волны могут определять характер поля на весьма значительных расстояниях от источника.

На фиг. 2 приведена рассчитанная по формуле (19) зависимость $|V| = \frac{|U|}{2mnk}$ от безразмерного горизонтального расстояния nkr. Значения параметров, отвечающих различным кривым, приведены в табл. 1. При значениях параметров, для которых имеются в литературе [2; 1, стр. 335] численные данные, наблюдается полное совпадение наших результатов (кривая *1*) с известным. На фиг. 3 приведены распределения амплитуды и фазы поля по глубине на горизонтальных расстояниях, отмеченных на

Таблица 1

	1	2	3	4	5		1	2	3	4	5
n	0.5	0.5	0.5	1.1	1.1	$\frac{z_0}{H}$	0.25	0.25	0.75	0.25	0.25
nkH	0.84	5	10	10	20						
						$\frac{z}{H}$	1	0.75	0.25	1	1

Таблица 2

hkr	M	1	2	5	10	20	50	Точно
1	$\lvert V \rvert$	0.13	0.18	0.124	0.1017	0.10099	0.10099	0.10099
	arg V	4.63	2.22	0.658	0.633	0.6722	0.6728	0.6730
5	$\lvert V \rvert$	0.059	0.094	0.1056	0.10588	0.10583		0.10583
	arg V	0.74	5.54	5.132	5.1286	5.1294		5.1294
10	$\lvert V \rvert$	0.039	0.076	0.08556	0.08561			0.08560
	arg V	2.26	1.483	1.4858	1.4848			1.4851
100	$\lvert V \rvert$	0.00425	0.00432					0.00432
	arg V	4.5587	4.5617					4.5625

кривых фиг. 2 крестиками, при соответственных значениях параметров. Номера кривых соответствуют фиг. 2. При этом для кривой *4* на фиг. 3 под V подразумевается величина $\frac{U}{\delta mnk}$, а для остальных кривых — согласно прежнему определению. Некоторое представление о реальной сходимости ряда (19) дает табл. 2, в которой приведены приближенные значения амплитуды и фазы поля в зависимости от числа M пар членов (соответствующих $\varkappa_p$ и $-\varkappa_p^*$) для следующих значений параметров: $m = 0{,}5$; $n = 0{,}5$; $nkH = 10$; $z_0 = 0{,}75H$; $z = 0{,}25H$.

В заключение авторы выражают благодарность Б. З. Каценеленбауму и В. В. Шевченко за постоянное внимание к работе. За ряд ценных замечаний авторы признательны Н. Е. Мальцеву.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Бреховских. Волны в слоистых средах, М., Изд-во АН СССР, 1957.
2. К. Пекерис. Теория распространения звука взрыва в мелкой воде. Сб. «Распространение звука в океане», ИЛ, М., 1951.
3. C. B. Leslie, N. R. Sorensen. Integral solution of the shallow water sound field. J. Acoust. Soc. America, 1961, **33**, 3, 323—329.
4. Г. Г. Алексеев. О точном методе расчета полей в слоисто-неоднородных средах. Труды Акустич. инст., 1970, **13**, 17—21.
5. T. Tamir, A. A. Oliner. The spectrum of electromagnetic waves guided by a plasma layer. PIEEE, 1963, **51**, 2, 317—332.
6. T. Tamir, A. A. Oliner. Guided complex waves. PIEE, 1963, **110**, 2, 310—334.
7. В. В. Шевченко. Плавные переходы в открытых волноводах. М., Наука, 1969.
8. А. Д. Шатров. Дискретные представления поля в задаче возбуждения диэлектрической пластины. Радиотехника и электроника, 1970, **15**, 9, 1806—1815.
9. J. Humblet. Sur la definition des niveaux virtuels des noyaux atomiques et l'establissement de la formule de dispersion. Mem. Soc. Roy. Sci. Liege, 1952, 12, 4.
10. T. Regge. Analitic properties of the scattering matrix. Nuovo Cimento, 1958, 8, 5, 671—679 (Перевод в сб. «Математика», 1963, 7, 4, 83—89).
11. T. Regge. Construction of potentials from resonance parameters. Nuovo Cimento, 1958, 9, 3, 491—503. (Перевод в сб. «Математика», 1963, 7, 4, 91—100).
12. А. О. Кравицкий. О двухкратном разложении в ряд по собственным функциям одной несамосопряженной краевой задачи. Дифференциальные уравнения, 1968, **4**, 1, 165—177.
13. Р. Ньютон. Теория рассеяния волн и частиц, М., Мир, 1969.
14. В. В. Шевченко. Наглядная классификация волн, направляемых регулярными открытыми волноводами. Радиотехника и электроника, 1969, **14**, 10, 1768—1772.
15. В. П. Мальцев, Е. И. Нефедов, В. В. Шевченко. Вытекающие волны в волноводе из двух разделенных слоев, Изв. ВУЗов, Радиофизика, 1969, **12**, 12, 1855—1861.
16. В. В. Шевченко. О поведении волновых чисел диэлектрического волновода за критическим значением. Изв. ВУЗов, Радиофизика, 1970, **13**, 10, 1528—1531.

Институт радиотехники и электроники
АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
18 марта 1971 г.