Вычисляя $\langle \eta^{-1/2} \rangle$, получим

$$\frac{\langle x_s \rangle}{R_*} = \frac{\Delta}{\sqrt{1+\Delta} - \sqrt{1-\Delta}} \tag{8}$$

На фиг. 2 представлена зависимость $\langle x_s \rangle$ от величины неоднородности Δ. При большом разбросе плотности газа $\langle x_s \rangle$ меньше R_* примерно на 30%. Существенно и то, что при малых флуктуациях координата образования скачка отличается от R_* на много длин волн.

В заключении отметим возможность применения полученных результатов в астрофизике, например для учета турбулентности хромосферы при прохождении нелинейных волн в атмосфере Солнца [3].

Авторы благодарны С. А. Каплану и Л. А. Островскому за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Н. Пелиновский, В. Е. Фридман. О статистических явлениях при образовании ударных волн. Акуст. журнал, 18, 4, 590.
2. Л. А. Островский. К теории волн в нестационарных сжимаемых средах. ПМН, 1963, 27, 5, 924—929.
3. С. А. Каплан, Л. А. Островский. К теории образования ударных волн в хромосфере и короне. Солнечные данные 1963, 6, 53—54.
4. А. А. Свешников. Прикладные методы теории случайных функций, Наука, М., 1968.
5. Е. Н. Пелиновский. О распространении поверхностной волны конечной амплитуды при учете статистических неровностей дна. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1971, 7, 11.

НИРФИ
Горький

Поступила в редакцию
4 октября 1971 г.

УДК 534.26

О СВЯЗИ МЕЖДУ ДАВЛЕНИЕМ И ЕГО ГРАДИЕНТОМ НА КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТИ

А. В. Римский-Корсаков, И. Е. Цукерников

В последние годы, благодаря интенсивному развитию и широкому применению ЭВМ, для расчета звукового поля, создаваемого телом конечной длины и произвольной формы, большое значение приобретают методы, основанные на классическом интеграле Гельмгольца, который связывает давление $P(\mathbf{r})$ в любой точке поля $\mathbf{r}$ с распределением давления и его градиента $\frac{\partial}{\partial n} P(\mathbf{r})$ на поверхности колеблющегося тела. Для гармонической зависимости от времени интеграл Гельмгольца имеет вид:

$$P(\mathbf{r}) = \int_S \left[P(\mathbf{r}_0) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) - \frac{\partial P(\mathbf{r}_0)}{\partial n} \frac{e^{ikR}}{R} \right] dS, \tag{1}$$

где $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$, $\mathbf{r}_0$ — точка на поверхности колеблющегося тела S и n — нормаль к этой поверхности в точке $\mathbf{r}_0$.

Однако практически никогда не известны распределения давления и его градиента на колеблющейся поверхности одновременно, а экспериментальное определение обеих величин оказывается в большинстве случаев громоздким и неточным. В связи с этим были разработаны методы [1—3], позволяющие определить одну из этих величин по известным значениям другой. Эти методы приводят к решению интегрального уравнения для неизвестной величины.

В первом из них [1] связь между поверхностным давлением и его градиентом дается в виде сингулярного интегрального уравнения

$$P(\mathbf{r}_0') = 1/2\pi \int_S P(\mathbf{r}_0) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikR'}}{R'} \right) dS - 1/2\pi \int_S \frac{\partial P(\mathbf{r}_0)}{\partial n} \frac{e^{ikR'}}{R'} dS, \tag{2}$$

где $R' = |\mathbf{r}_0' - \mathbf{r}_0|$ — расстояние между двумя точками поверхности S. Это уравнение получается из выражения (1) при помещении точки поля $\mathbf{r}$ на колеблющуюся поверхность $S (\mathbf{r} \to \mathbf{r}_0)$.

В работе [2] предлагается другое соотношение, связывающее эти величины, полученное благодаря математическому свойству выражения (1): равенству его нулю во всех точках внутри колеблющейся поверхности.

$$\int_S P(\mathbf{r}_0)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikR''}}{R''}\right) dS = \int_S \frac{\partial P(\mathbf{r}_0)}{\partial n}\frac{e^{ikR''}}{R''}\, dS. \tag{3}$$

Здесь $R'' = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|$ и точка $\mathbf{r}'$ находится внутри поверхности S.

В работе [3] показано, что уравнение (2) не имеет единственного решения, если поверхность колеблется на одной из характеристических частот, бесконечный набор которых определяется решением внутренней однородной задачи Дирихле для рассматриваемой поверхности.

С другой стороны, решение уравнения (3) также будет неоднозначно, если точка $\mathbf{r}'$ находится в узле стоячей волны давления. Для определения этих узловых точек необходимо решить внутреннюю задачу на собственные значения для колеблющейся поверхности.

Предложенный в работе [3] метод формального объединения выражений (2) и (3) устраняет неопределенность, присущую первому методу, но не приводит никакого критерия для выбора внутренних точек $\mathbf{r}'$, поэтому решение остается неоднозначным на частотах, соответствующих возникновению стоячих волн внутри поверхности.

Ниже предлагается подход, который приводит к уравнению, аналогичному уравнению (3), но исключает необходимость введения критерия выбора точек и тем самым необходимость решения задачи на собственные значения, по крайней мере для случая известного распределения давления на рассматриваемой поверхности.

Так как общее решение волнового уравнения (или для гармонических полей уравнения Гельмгольца) включает в себя только поверхностные функции и радиально расходящиеся волны (что следует из условия излучения), то действие дальнего поля на поле вблизи колеблющегося тела равно нулю. Тогда, если выбрать некоторую сферическую поверхность σ большого радиуса, расположенную в дальнем поле, то в силу математического свойства интеграла Гельмгольца

$$\int_\sigma \left[P(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikR'''}}{R'''}\right) - \frac{\partial P(\mathbf{r})}{\partial n}\frac{e^{ikR'''}}{R'''}\right] d\sigma = 0, \tag{4}$$

где $R''' = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ и $\mathbf{r}'$ — любая точка внутри поверхности σ. Так как сфера σ расположена в дальнем поле, то связь между $P(\mathbf{r})$ и $\frac{\partial\partial}{n} P(\mathbf{r})$ можно взять как в сферической волне:

$$\frac{\partial P(\mathbf{r})}{\partial n} = \frac{\partial P(\mathbf{r})}{\partial r} = (ik - 1/r)P(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{r} \to \infty. \tag{5}$$

Тогда выражение (4) можно переписать в виде

$$\int_\sigma P(\mathbf{r})\left[\frac{\partial}{\partial r} - (ik - 1/\mathbf{r})\right]\frac{e^{ikR'''}}{R'''}\, d\sigma = 0 \tag{6}$$

Подставляя в формулу (6) выражение (1) для $P(\mathbf{r})$, получим интегральное уравнение, связывающее давление и его градиент на колеблющейся поверхности:

$$\int_\sigma\int_S \left\{ P(\mathbf{r}_0)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikR}}{R}\right) - \frac{\partial P(\mathbf{r}_0)}{\partial n}\frac{e^{ikR}}{R}\right\}\left\{\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - (ik - 1/\mathbf{r})\right\}\frac{e^{ikR'''}}{R'''}\, dS\, d\sigma = 0. \tag{7}$$

Так как внутренние для поверхности σ точки $\mathbf{r}'$ расположены на рассматриваемой поверхности S, где известно распределение давления, то попадание в узловые точки стоячей волны можно исключить, не решая задачу на собственные значения.

Меняя местами интегралы в уравнении (7), получим выражение, аналогичное уравнению (3).

$$\int_S P(\mathbf{r}_0)K(\mathbf{r}_0', \mathbf{r}_0)\, dS = \int_S \frac{\partial P(\mathbf{r}_0)}{\partial n} V(\mathbf{r}_0', \mathbf{r}_0)\, dS, \tag{8}$$

где

$$K(\mathbf{r}_0', \mathbf{r}_0) = \int\limits_\sigma \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - (ik - 1/\mathbf{r}) \right\} \frac{e^{ikR'''}}{R'''} \, d\sigma, \tag{8а}$$

$$V(\mathbf{r}_0', \mathbf{r}_0) = \int\limits_\sigma \frac{e^{ikR}}{R} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - (ik - 1/\mathbf{r}) \right\} \frac{e^{ikR'''}}{R'''} \, d\sigma, \tag{8б}$$

$\mathbf{r}_0'$ и $\mathbf{r}_0$ — точки на поверхности S.

Решение уравнения (8) можно провести тем же методом, что и в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Chertok. Sound Radiation from Vibrating Surfaces. J. Acoust. Soc. America, 1964, 36, 7, 1305—1313.
2. L. G. Copley. Integral Equation Method for Radiation from Vibrating Bodies. J. Acoust. Soc. America, 1967, 41, 4, 807—816.
3. H. A. Schenck. Improved Integral Formulation for Acoustic Radiation Problems. J. Acoust. Soc. America, 1968, 44, 1, 41—58.

Акустический ин-т АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
10 июня 1971 г.