АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIX 1973 Вып. 1

УДК 534.26

РАСЧЕТ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ В ФОКАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ ЗАМКНУТЫХ ОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЛИНЗ

И. Н. Каневский, Б. С. Суриков

Проведен расчет распределения звукового давления и колебательной скорости вдоль главных осей однородных цилиндрических линз, обладающих фазовой аберрацией. Показано, что наличие фазовой аберрации приводит к отсутствию нулевых значений поля и возрастанию побочных максимумов в фокальной плоскости и к обострению минимума распределения вдоль акустической оси.

В работах [1, 2] показано, что замкнутые однородные цилиндрические линзы в виде сплошного цилиндра с постоянным показателем преломления могут осуществлять достаточно острую фокусировку плоских акустических волн, приходящих с любого направления *. Однако присущая таким линзам фазовая аберрация, величина которой пропорциональна отношению D / λ_0 (D — диаметр линзы, λ_0 — длина волны в среде), вызывает уменьшение коэффициентов усиления звукового давления и колебательной скорости [3]. Одновременно изменяется распределение звукового поля в фокальной области линзы. В работе [2] рассчитано распределение давления в фокальной плоскости для нескольких значений D / λ_0 и показано, что наличие фазовой аберрации приводит к отсутствию нулевых значений поля и возрастанию побочных максимумов в распределении давления. Распределение поля вдоль акустической оси, которое является важной характеристикой любой фокусирующей системы, в работе не рассматривалось. В настоящей работе рассчитываются распределения звукового поля вдоль главных осей однородной цилиндрической линзы в предположении произвольной величины фазовой аберрации.

Воспользуемся формулой (2) работы [3] и введем декартовы координаты точки наблюдения $y = r_0 \sin \alpha_0$, $z = -r_0 \cos \alpha_0$, причем y отсчитывается в фокальной плоскости линзы, а z — вдоль ее акустической оси, в направлении к оси цилиндра. Полагая $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2 / 2$, обозначая $w = ky\alpha_m$, $v = kz\alpha_m^2 / 2$, вводя новую переменную $t = \alpha / \alpha_m$ и учитывая, что согласно работе [1] фазовая аберрация с погрешностью не более 5% выражается формулой $\varphi(t) = \frac{4\beta t^2}{\eta}\left(1 - \frac{t^2}{\eta}\right)$, где $\beta = k_0 D \alpha_m^4 \eta^2 / 16$ — максимальное значение фазовой аберрации на сходящемся волновом фронте, $\eta = 2(2 - n) / \alpha_m^2$, получим

$$\frac{p}{p_0} = K_0 e^{-i(kf + kz - \pi/4)} A(w, v, \beta). \tag{1}$$

В этом выражении

$$A(w, v, \beta) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^{\frac{4i\beta t^2}{\eta}\left(1 - \frac{t^2}{\eta}\right)} e^{iwt} e^{ivt^2} dt, \tag{2}$$

$K_0 = \sqrt{2kf\pi}\alpha_m$ — коэффициент усиления звукового давления на цилиндри-

* Если волновой фронт и ось цилиндра параллельны.

ческом волновом фронте с радиусом кривизны f и углом раскрытия α_m при $\beta = 0$ [4].

Рассчитаем распределение звукового давления в фокальной плоскости линзы. Для этого положим в выражениях (1) и (2) $v = 0$, разложим подынтегральные сомножители в степенные ряды, перемножим их и проинтегрируем почленно. После ряда преобразований мы получим выражение для распределения звукового давления в фокальной плоскости однородной цилиндрической линзы

$$A_\phi(w, \beta) = \sqrt{\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8i\beta)^n}{(2n+1)!!} a_n(w) + \frac{(1-\eta)}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4i\beta)^n}{(n+1)!} \left(\frac{1-\eta}{\eta^2}\right)^n f_n(w), \tag{3}$$

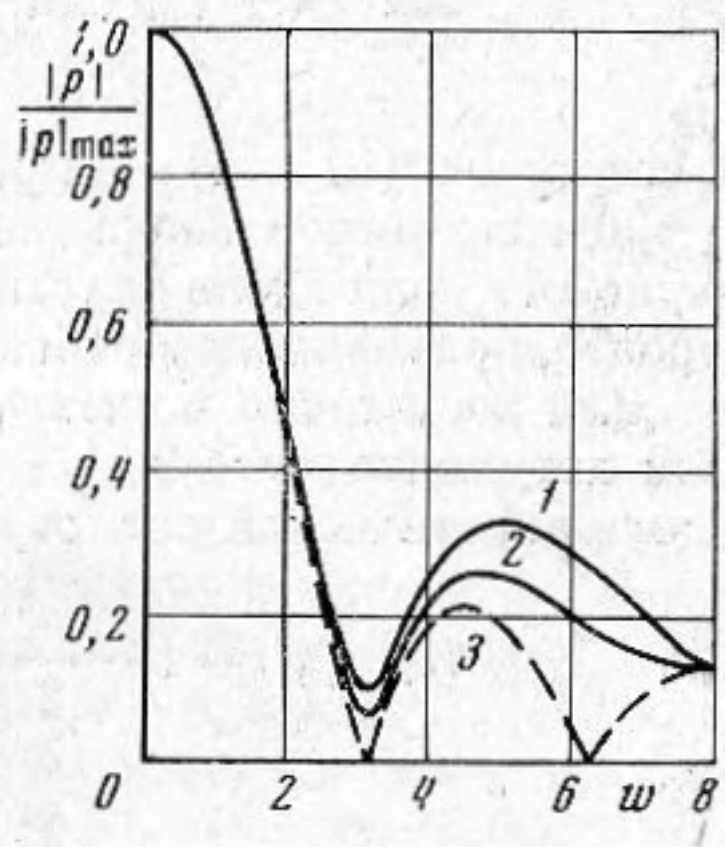
в котором

$$a_n(w) = \sum_{s=0}^{n} \frac{(-1)^s C_n^s (n+1)_s}{\left(n+\frac{3}{2}\right)_s} \Lambda_{n+s+\frac{1}{2}}(w\sqrt{\eta}),$$

$$f_n(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-w^2/4)^k}{k!\left(\frac{1}{2}\right)_k} {}_2F_1\left(1, \frac{1}{2} - n - k, n+2, 1-\eta\right),$$

$\Lambda_n(w\sqrt{\eta})$ — цилиндрическая [5], а ${}_2F_1$ — гипергеометрическая функции.

При $\beta \to 0$, когда фазовая аберрация исчезает (это соответствует малому углу раскрытия сходящегося волнового фронта), выражение (3) совпадает с формулой (3) работы [6] для распределения давления в фокальной плоскости цилиндрического волнового фронта с малым углом раскрытия. При $\beta \neq 0$ ряд (3) сходится достаточно быстро, и для значений $\beta \leqslant 1{,}1$, когда согласно работе [3] коэффициент усиления падает не более чем на 10%, первые 4 члена ряда дают погрешность не более 11%. На фиг. 1 показаны два распределения $|p| / |p|_{max}$, рассчитанные с помощью первых 4-х членов ряда для случая, когда показатель преломления имеет оптимальное значение $n_{опт} = 2 - 3\alpha_m^2 / 7$, т. е. величина $\eta = 6/7$. Кривая *1* соответствует $\beta = 1{,}1$ (когда $K = 0{,}9\ K_0$), *2* — $\beta = 0{,}75$ ($K = 0{,}95\ K_0$). Кривая *3* взята из работы [6] и соответствует случаю, когда $\beta = 0$, $K = K_0$.



Фиг. 1

Мы видим, что увеличение фазовой аберрации приводит к отсутствию нулевых значений поля в фокальной плоскости, к расширению и возрастанию уровня побочного максимума в распределении звукового давления. Форма основного максимума при малых аберрациях $\beta < 1{,}1$ практически не изменяется.

Для сравнения на фиг. 1 кривыми *4* и *5* показано распределение поля сходящегося сферического волнового фронта при отсутствии фазовой аберрации (кривая *4*, $\beta = 0$) и при наличии фазовой аберрации (кривая *5*, $\beta = 0{,}75$). Эти кривые построены по данным работы [7]. О значении β необходимо сделать следующее замечание. В работе [7] фазовая аберрация рассматривается относительно параксиального фокуса и имеет вид $\varphi_п(t) = \beta_п t^4$, где $t = \alpha / \alpha_m$. Мы же рассматриваем фазовую аберрацию относительно волнового фокуса $\varphi_в(t) = 4\beta_в(t^2 - t^4)$. Поэтому указанная в работе [7] величина $\beta_п = 0{,}96\ \pi \approx 3$ соответствует значению $\beta_в = 0{,}75$, приведенному нами выше.

Из сравнения кривых *1—3* и *4—5* видно, что для цилиндрического волнового фронта размер фокальной области меньше, чем для сферического, однако побочные максимумы у цилиндрического фронта значительно выше, чем у сферического.

Сравнение кривых *2* и *5*, построенных для $\beta = 0{,}75$, показывает, что распределение поля в фокальной плоскости цилиндрического фронта сильнее зависит от фазовой аберрации, чем для сферического фронта. Общим у цилиндрического и сферического волновых фронтов является то, что при наличии фазовой аберрации минимальные значения звукового давления в фокальной плоскости не достигают нуля.

Рассчитаем распределение давления вдоль акустической оси линзы. Полагая в формулах (1) и (2) $w = 0$ и вычисляя интеграл

$$A_a(v, \beta) = \int_0^1 e^{\frac{4i\beta t^2}{\eta}\left(1 - \frac{t^2}{\eta}\right)} e^{ivt^2} dt \tag{4}$$

аналогично тому, как это было сделано для фокальной плоскости, получим следующее выражение:

$$A_a(v, \beta) = \sqrt{\eta} \sum_{n=0}^{\infty} (4i\beta)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{\left(\frac{3}{2}\right)_{2n}} \Phi\left(n + \frac{1}{2}, 2n + \frac{3}{2}, iv\right) +$$

$$+ \frac{(1-\eta)}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4i\beta)^n}{(n+1)!} \left(\frac{1-\eta}{\eta^2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(iv)^m}{m!} {}_2F_1\left(1, \frac{1}{2} - n - m, n + 2, 1 - \eta\right),$$

в котором $\Phi(\alpha, \gamma, x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. При $\beta \to 0$ полученное выражение совпадает с выражением для распределения звукового поля вдоль акустической оси слабосходящегося цилиндрического фронта, полученным в работе [6].

Для достаточно малых аберраций ($\beta \leqslant 2$) и достаточно малых значений аргумента ($v \leqslant 2{,}5$) выпишем выражение для распределения поля вдоль акустической оси, ограничиваясь квадратичными членами по β и v:

$$A_a(v, \beta) = 1 - \frac{a^2}{2}\left(\frac{4}{5} b^2 - \frac{4}{7} b + \frac{1}{9}\right) + ia\left(\frac{2}{3} b - \frac{1}{5}\right), \tag{5}$$

где

$$a = \frac{4\beta}{\eta^2}, \; b = \frac{1}{2}\left[\eta + \left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \frac{v}{\beta}\right]. \tag{6}$$

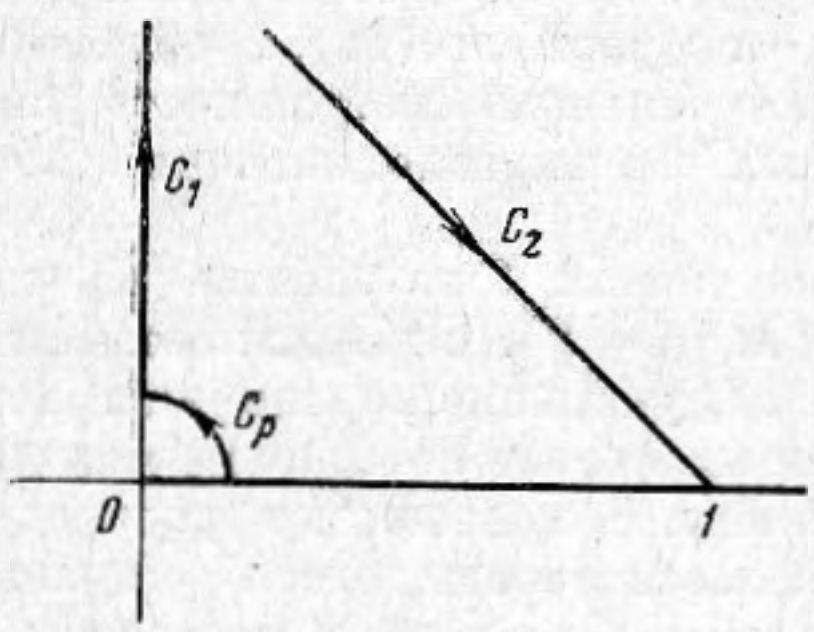
Для больших значений β и v получим разложение интеграла (4) по обратным степеням β. Для этого представим его в виде

$$A_a = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{iaf(t)} dt, \tag{7}$$

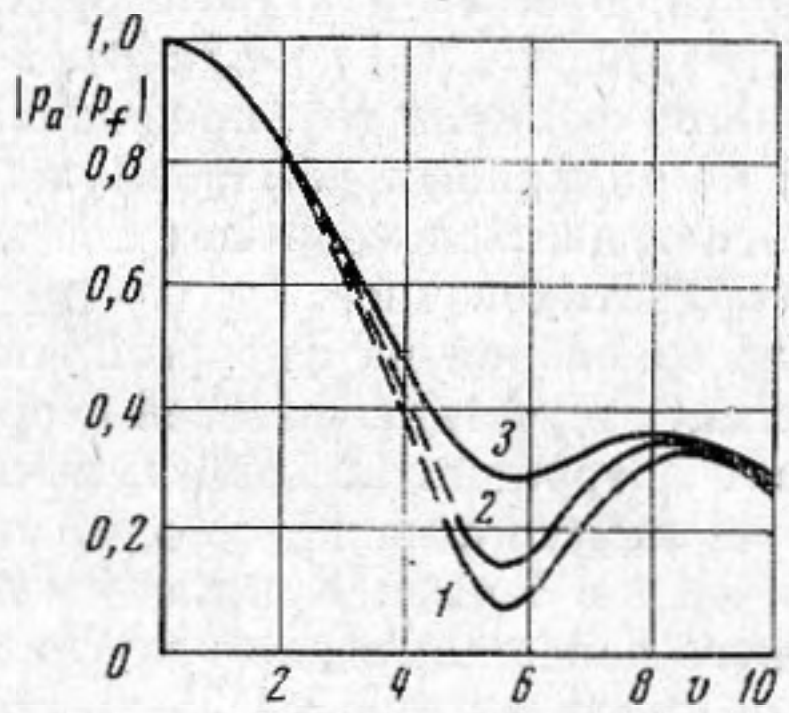
где $f(t) = 2bt - t^2$, а a и b определяются формулами (6), и перейдем к интегрированию на плоскости комплексного переменного t. Подынтегральная функция является однозначной аналитической функцией на всей плоскости с разрезом вдоль действительной положительной полуоси. Точка $t = 0$ является точкой ветвления, точка $t = b$ — точкой перевала.

Вычисление интеграла (7) при малых значениях b связано с математическими трудностями, обусловленными близостью точки ветвления и точки перевала, и отмеченными в работе [8], § 22, п.3. При вычислении мы

ограничимся случаем, когда величина b близка к единице, что позволит получить приближенное выражение для распределения поля вдоль акустической оси, справедливое только в области первого минимума и первого побочного диффракционного максимума.



Фиг. 2



Фиг. 3

Контур интегрирования показан на фиг. 2. Из теоремы Коши об интегрировании аналитической функции по замкнутому контуру следует, что $\int\limits_{C_1} + \int\limits_{C_2} + \int\limits_{1}^{\rho} + \int\limits_{C_\rho} = 0.$ Можно показать, что предел последнего интеграла при $\rho \to 0$ равен нулю, поэтому

$$2A_a = I_1 + I_2, \tag{8}$$

где I_1 и I_2 — интегралы по контурам C_1 и C_2 соответственно. Интегрирование по контуру C_1 не встречает затруднений, и

$$I_1 = e^{i\pi/4}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2ab}}. \tag{9}$$

При $b \approx 1$ и $a \geqslant 6$ погрешность этого выражения не превосходит 3%. При интегрировании по контуру C_2 необходимо обратить внимание на следующее обстоятельство. Контур C_2 проходит через точку $t_2 = 1$ в направлении $\theta = 3\pi/4$. В том случае, когда $b = 1$, этот контур проходит в направлении быстрейшего спуска. При движении по этому контуру в случае $b < 1$ модуль произведения подынтегральных экспонент сначала возрастает, а затем, после прохождения вертикальной линии $\operatorname{Re} t = b$, спадает. Чем дальше отстоит от единицы точка b, тем больше максимальное значение модуля, тем больше его вклад в интеграл и, следовательно, тем больше погрешность при вычислении. Именно это обстоятельство ограничивает применимость получаемых формул значениями b, лежащими в окрестности единицы (при $b < 1$). При $b > 1$ модуль произведения подынтегральных экспонент всегда спадает вдоль контура C_2, однако с ростом b контур C_2 все более отклоняется от направления быстрейшего спуска. Поэтому мы ограничиваемся значениями b в окрестности единицы. В этой окрестности

$$I_2 = e^{i\gamma}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\left(\frac{3-b}{2} + \frac{e^{-i\pi/4}}{2\sqrt{\pi a}}\right). \tag{10}$$

Из формул (8), (9) и (10) получим

$$|A_a| = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\left\{\frac{1}{4} + \frac{(3-b)^2}{4} - \frac{(3-b)}{\sqrt{2b}}\sin\gamma + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\left[\frac{3-b}{2} + \frac{1}{\sqrt{b}}\sin(\gamma - \pi/4)\right]\right\}^{1/2}, \tag{11}$$

где $\gamma = a(2b - 1) - \pi / 4$, а величина a и b определяются формулами (6).

На фиг. 3 показаны результаты расчета распределения поля вдоль акустической оси однородной цилиндрической линзы, имеющей оптимальный показатель преломления и фазовую аберрацию $\beta = 1{,}1$ (кривая *1*) и $\beta = 0{,}75$ (кривая *2*). По оси ординат отложена величина $|p| / |p_f| = |A_a[a(\beta), b(v, \beta)] / |A_a[a(\beta), b(0, \beta)]|$. Левая часть кривых *1* и *2* построена по формуле (5), правая часть — по формуле (11). В области штриховой части кривых обе формулы дают большую погрешность, поэтому штриховая часть показывает ход кривых в интервале значений $2{,}5 < v < 4{,}5$ ориентировочно.

Для сравнения на фигуре приведена кривая *3* из работы [6], соответствующая отсутствию фазовой аберрации ($\beta = 0$). Интересно отметить, что фазовая аберрация вызывает, во-первых, уменьшение ширины главного диффракционного максимума, и, во-вторых, резкое понижение минимума — для $\beta = 1{,}1$ в 4 раза. Кривые *4* и *5* на фиг. 3 показывают распределение звукового давления вдоль акустической оси сходящегося сферического фронта при $\beta = 0$ и $\beta = 0{,}75$ соответственно. Эти кривые построены по результатам работы (7), гл. IX. Относительно значения β справедливы замечания, сделанные при рассмотрении кривых *4* и *5* на фиг. 1.

Из сравнения кривых *1—3* и *4—5* на фиг. 3 видно, что у цилиндрического волнового фронта размер фокальной области несколько меньше, а боковые максимумы выше, чем у сферического фронта.

Сравнение соответственных кривых на фиг. 1 и 3 показывает, что увеличение фазовой аберрации по-разному влияет на распределение давления в осевой и фокальной плоскостях: тогда как в осевой плоскости главный максимум обостряется, в фокальной плоскости его изменение, за исключением области нуля, незначительно. С увеличением фазовой аберрации побочный максимум существеннно (почти в 1,5 раза) возрастает в фокальной плоскости и несколько понижается в осевой плоскости. Для сферического волнового фронта так же, как и для цилиндрического, фазовая аберрация оказывает большее влияние на распределение звукового давления вдоль акустической оси, чем на его распределение в фокальной плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Н. Каневский, Б. С. Суриков. Однородные сферические и цилиндрические линзы для фокусирования звуковых волн. Акуст. ж., 1971, **17**, 1, 55—60.
2. D. L. Folds, D. H. Brown. Focusing properties of cylindrical liquid-filled acoustic lenses with large diameter-to-wavelength ratios. J. Acoust. Soc. America, 1968, **43**, 3, 560—565.
3. И. Н. Каневский, Б. С. Суриков. Расчет коэффициента усиления замкнутых однородных цилиндрических звуковых линз. Акуст. ж., 1971, **17**, 4, 563—568.
4. Л. Д. Розенберг. Расчет усиления звуковых цилиндрических фокусирующих систем. Акуст. ж., 1955, **1**, 1, 70—77.
5. Таблицы сферических функций Бесселя, т. 2. Вычислит. центр АН СССР, 1963.
6. И. Н. Каневский, Л. Д. Розенберг. Расчет звукового поля в фокальной области цилиндрической фокусирующей системы. Акуст. ж., 1957, **3**, 1, 46—61.
7. М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики. М., «Наука», 1971.
8. Л. М. Бреховских. Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957.

Государственный н.-и.
и проектный институт редкометаллической
промышленности

Поступила в редакцию
26 апреля 1971 г.