ния значений аргументов x к минимальному значению в варьируемом диапазоне x_{min}. Минимальные значения аргументов составляют: для концентрации пыли $c_{min} = 3$ *г/м*^{3}, для температуры пылегазового потока $t_{min} = 50°$ С, для интенсивности звукового поля $I_{min} = 0{,}1$ *вт/см*^{2}, для времени озвучивания $\tau_{min} = 0{,}5$ *сек* и для частоты $f_{min} = 4$ *кгц*. Как видно из фигуры, концентрация пыли (кривая *1*) существенно сказывается на процесс коагуляции, особенно в диапазоне до 8—10 *г/м*^{3}. В дальнейшем эффективность процесса снижается из-за значительного поглощения звуковой энергии аэрозолем.

Оценивая влияние интенсивности звукового поля (кривая *2*) и времени озвучивания (кривая *3*), следует считать рациональным для сокращения энергетических затрат увеличение времени озвучивания путем использования существующих газоходов промышленных установок. Это особенно эффективно в случае ведения процесса на низких частотах, когда коэффициент затухания невысок и имеется возможность использования явления резонанса самих газоходов.

Наиболее целесообразным диапазоном температур пылегазового потока для процесса акустической коагуляции является интервал 100—250° С (кривая *4*).

Частота звука мало влияет на эффективность процесса (кривая *5*), что является экспериментальным подтверждением теории гидродинамического взаимодействия частиц полидисперсного аэрозоля в звуковом поле [3]. Приведенные результаты позволяют поэтому сделать вывод о целесообразности применения низкочастотных излучателей, имеющих больший к.п.д. и значительно большую надежность.

Анализ полученного уравнения регрессии показывает, что уже при минимальных значениях аргументов содержание частиц фракции до 2 *мкм* составляет 16%, в то время как в неозвученном потоке частиц данной фракции содержится 60%. Увеличение времени озвучивания до 3 *сек*, интенсивности до 0,6 *вт/см*^{2} и концентрации аэрозоля до 13 *г/м*^{3} при температуре потока 250° С позволит снизить содержание мелких фракций до 0,6% при увеличении медианного диаметра агрегатов до 10—15 *мкм*. При использовании полученного уравнения регрессии был рассчитан режим для повышения эффективности работы электрофильтра при предварительном укрупнении частиц пыли звуковым полем в подводящих газоходах. Расчеты показали, что для эффективной работы электрофильтра при запыленности пылегазового потока до 5 *г/м*^{3} и температуре 250° С необходимо проводить озвучивание в течение 1,5—2 *сек* полем интенсивностью 0,2 *вт/см*^{2}.

Полученное на основании эксперимента уравнение регрессии может использоваться при расчете промышленных коагуляционных акустических установок.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Налимов, Н. Чернова. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. М., «Наука», 1965.
2. М. Кнотек, Р. Войта, И. Шефц. Анализ металлургических процессов методами математической статистики. М., «Металлургия», 1968.
3. Л. Меркулов, В. Тимошенко. О взаимодействии аэрозольных частиц в акустическом поле. Сб. докл. VI Всес. акуст. конф. М., 1968.

Всесоюзный научно-исследовательский и проектный институт по очистке технологических газов, сточных вод и использованию вторичных энергоресурсов предприятий черной металлургии
Донецкий филиал

Поступила 10 сентября 1971 г.

УДК 534.26

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧИ О ДИФРАКЦИИ НА КРУГЛОМ ДИСКЕ

Л. Н. Бражникова, В. Г. Сологуб

Рассмотрим задачу о дифракции плоской волны, наклонно падающей на идеально жесткий бесконечно тонкий экран в виде круглого диска радиуса a. Как известно, решение этой задачи можно искать в виде

$$U(\rho, \varphi, \zeta; \varkappa) = e^{i\varkappa(\rho\cos\varphi\sin\alpha+\zeta\cos\alpha)} + V(\rho, \varphi, \zeta; \varkappa),$$

$$V(\rho, \varphi, \zeta; \varkappa) = \frac{|\zeta|}{\zeta}\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m e^{im\varphi}\int_0^\infty x_m(\lambda) J_m(\lambda\rho)\, e^{i\sqrt{\varkappa^2-\lambda^2}|\zeta|}\, d\lambda.$$

где (ρ, φ, ζ) — отнесенные к радиусу диска координаты точки наблюдения в цилиндрической системе координат с началом координат в центре диска, $\varkappa = ka$ (k — волновое число), α — угол падения, $J_m(x)$ — функция Бесселя первого рода и $x_m(\lambda)$ —

функции, подлежащие определению. Граничное условие и условие непрерывности решения всюду вне диска приводят к следующей системе парных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $x_m(\lambda)$:

$$\int_0^\infty x_m(\lambda)\sqrt{\varkappa^2-\lambda^2}\,J_m(\lambda\rho)\,d\lambda = \varkappa\cos\alpha J_m(\varkappa\rho\sin\alpha) \quad \text{при} \quad 0<\rho<1$$

$$\int_0^\infty x_m(\lambda)J_m(\lambda\rho)\,d\lambda = 0 \quad \text{при} \quad \rho>1. \tag{1}$$

При выводе этих уравнений мы воспользовались разложением

$$e^{ix\cos\varphi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(x)\,e^{im\varphi}$$

и полнотой системы функций $\{e^{im\varphi}\}_{m=-\infty}^{\infty}$ на интервале $0<\varphi<2\pi$.

Решение системы уравнений (1) мы будем искать в пространстве $L_2(0,\infty)$. Можно показать, что принадлежность $x_m(\lambda)$ этому пространству обеспечит физически очевидное требование конечности энергии рассеянной волны в любой ограниченной части пространства. Отметим, что уравнения (1) не меняются при замене азимутального индекса m на $-m$. Это обстоятельство позволяет при исследовании уравнений (1) ограничиться случаем, когда $m\geqslant 0$.

Рассмотрим сначала систему парных интегральных уравнений следующего вида:

$$\int_0^\infty \lambda^\gamma f(\lambda)J_p(\lambda\rho)\,d\lambda = g(\rho) \quad \text{при} \quad 0<\rho<1,$$

$$\int_0^\infty f(\lambda)J_p(\lambda\rho)\,d\lambda = 0 \quad \text{при} \quad \rho>1, \tag{2}$$

где $f(\lambda)$ — функция, подлежащая определению, $g(\rho)$ — заданная функция, $\gamma\geqslant 0$ и $p\geqslant -1$. Используя преобразование Меллина, Титчмарч показал [1], что решение этих уравнений имеет вид:

$$f(\lambda) = \frac{(2\lambda)^{1-\gamma/2}}{\Gamma(\gamma/2)}\int_0^1 t^{1+\gamma/2}J_{p+1/2}(\lambda t)\,dt\int_0^1 g(\rho t)\rho^{p+1}(1-\rho^2)^{\gamma/2-1}\,d\rho. \tag{3}$$

Заметим теперь, что система парных уравнений (1) может быть приведена к виду (2), если положить $\gamma=1$, $p=m\,(m=0,1,2\ldots)$, $f(\lambda)=x_m(\lambda)$ и

$$g(\rho) = i\varkappa\cos\alpha J_m(\varkappa\rho\sin\alpha) + \int_0^\infty x_m(\mu)\left[\mu+i\sqrt{\varkappa^2-\mu^2}\right]J_m(\mu\rho)\,d\mu.$$

Здесь было учтено то обстоятельство, что при $\lambda\to\infty$

$$\sqrt{\varkappa^2-\lambda^2} = i\lambda + (\sqrt{\varkappa^2-\lambda^2}-i\lambda) = i\lambda + O(\lambda^{-1}).$$

Таким образом, принимая во внимание формулу (3), мы приходим к следующему интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно функций $x_m(\lambda)$, эквивалентному системе парных уравнений (1):

$$x_m(\lambda) - \int_0^\infty K_m(\lambda,\mu)\,x_m(\mu)\,d\mu = b_m(\lambda), \tag{4}$$

где

$$K_m(\lambda,\mu) = \sqrt{\lambda}\,\frac{\mu+i\sqrt{\varkappa^2-\mu^2}}{\sqrt{\mu}}\,\frac{\mu J_{m+1/2}(\lambda)J_{m-1/2}(\mu)-\lambda J_{m+1/2}(\mu)J_{m-1/2}(\lambda)}{\lambda^2-\mu^2}$$

$$b_m(\lambda) = i\,\frac{\sqrt{\varkappa\lambda}\cos\alpha}{\sqrt{\mu}}\,\frac{\varkappa\sin\alpha J_{m+1/2}(\lambda)J_{m-1/2}(\varkappa\sin\alpha)-\lambda J_{m+1/2}(\varkappa\sin\alpha)J_{m-1/2}(\lambda)}{\lambda^2-\varkappa^2\sin^2\alpha}$$

Ядро и правая часть полученного уравнения имеют простой вид и являются аналитическими функциями от λ экспоненциального типа, причем функции $b_m(\lambda) \in L_2(0, \infty)$, а интегральный оператор K_m, определяемый ядром $K_m(\lambda, \mu)$ является вполне непрерывным в $L_2(0, \infty)$ и для его нормы имеют место оценки

$$\|\mathbf{K}_m\| < \frac{\varkappa}{\sqrt{2(2m+1)}}, \qquad \|\mathbf{K}_0\| < (^2/_3\varkappa)^{3/2}. \tag{5}$$

Эти оценки можно получить, используя равенство Парсеваля для преобразования Фурье — Бесселя с ядром $J_{m+1/2}(\lambda\rho)$.

Оценки (5) позволяют для тех значений m, при которых $\|\mathbf{K}_m\| < 1$ (если $ka < {}^3/_2$, такое неравенство имеет место для всех значений азимутного индекса), получить решение уравнения (4) методом последовательных приближений. При этом, очевидно, будет иметь место соотношение $x_m(\lambda) = b_m(\lambda)\left[1 + O\left(\frac{\varkappa}{\sqrt{2m+1}}\right)\right]$.

Если условие $\|\mathbf{K}_m\| < 1$ не выполняется (при фиксированном $\varkappa$ это может иметь место для конечного числа значений азимутального индекса), можно применить один из численных методов, решая уравнение (4) с некоторым конечным верхним пределом интегрирования. Возникающую при этом погрешность в решении задачи легко оценить исходя из эквивалентности уравнения (4) системе (1).

Остановимся теперь коротко на асимптотическом поведении рассеянной волны при $\varkappa = ka \to 0$. Нетрудно видеть, что при определении асимптотики функции $V(\rho, \varphi, \zeta; \varkappa)$ на диске ($\zeta = +0$, $0 < \rho < 1$) с точностью до $O(\varkappa^3)$ достаточно при решении уравнения (4) методом последовательных приближений учесть только первую итерацию. В результате мы получим

$$V(\rho, \varphi, +0; \varkappa) = \varkappa \frac{2i\cos\alpha}{\pi}\sqrt{1-\rho^2} - \varkappa^2 \frac{2\sin 2\alpha}{3\pi}\rho\sqrt{1-\rho^2}\cos\varphi + O(\varkappa^3\sqrt{1-\rho^2}).$$

С указанной точностью полученное выражение совпадает для случая нормального падения с выражением, приведенным в работе [2].

В дальней зоне $R = \sqrt{\rho^2 + \zeta^2} \gg 1$ рассеянную волну можно представить в виде

$$V(\rho, \varphi, \zeta; \varkappa) = -i\operatorname{ctg}\theta \frac{|\zeta|}{\zeta} X(\theta, \varphi; \varkappa) \frac{e^{i\varkappa R}}{R}[1 + O(R^{-1})],$$

где $\theta = \arcsin \rho / R$. Если учесть вторую итерацию в методе последовательных приближений, то в результате мы получим с точностью до $O(\varkappa^6)$:

$$X(\theta, \varphi; \varkappa) = i\frac{2\varkappa^2\cos\alpha}{3\pi}\sin\theta\left[1 + \frac{\varkappa^2}{5}\left(1 + {}^1/_2\sin^2\alpha - {}^1/_2\sin^2\theta + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{2}{3}\sin\alpha\sin\theta\cos\varphi\right) + \frac{\varkappa^3}{9\pi}(2i-1)\right].$$

Можно показать, что при этом асимптотическое поведение коэффициента рассеяния σ падающей волны на диске определяется выражением

$$\sigma = \frac{4}{\varkappa\sin\alpha}\operatorname{Re} X(\alpha, 0; \varkappa) = \frac{16\cos\alpha}{27\pi^2}\varkappa^4\left[1 + \frac{\varkappa^2}{25}(8 - 5\sin^2\alpha)\right][1 + O(\varkappa^4)].$$

Таким образом, отличие направления падения плоской волны на диск от нормального приводит к уменьшению рассеяния.

Отметим в заключение, что изложенный метод исследования задачи с помощью интегрального уравнения (4) обладает рядом преимуществ по сравнению с другими известными методами ее решения [3—5] для случая, когда радиус диска меньше или соизмерим с длиной волны и может быть применен для решения ряда других задач дифракции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье. М.— Л., Гостехиздат, 1948.
2. Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль. Теория дифракции. М., «Мир», 1964.
3. C. J. Boukamp. Theoretual and numerical theatment of diffraction throgh a circu-

lar aperture. IEEE Trans. Anten. and Prop., 1970, AP-18, 2, 152—176.
4. Н. И. Ахизер. К теории спаренных интегральных уравнений. Зап. матем. отд. физ.-матем. факультета и ХМО ХГУ, Харьков, 1957, 25, 4, 5—31.
5. К. А. Лурье. Дифракция плоской электромагнитной волны на идеально проводящем круглом диске. ЖТФ, 1959, 29, 12, 1421—1433.

Институт радиофизики и электроники
Академии наук УССР

Поступила
10 марта 1971 г.

УДК 534—16

ОБ УСИЛЕНИИ УЛЬТРАЗВУКА В ОБЛАДАЮЩЕМ ФОТОПРОВОДИМОСТЬЮ ПЬЕЗОПОЛУПРОВОДНИКЕ В УСЛОВИЯХ МОДУЛИРОВАННОЙ ПОДСВЕТКИ

Д. В. Галченков, Э. М. Эпштейн

В последние годы появился ряд работ, посвященных теории распространения ультразвука в полупроводнике в нестационарных условиях при наличии переменного электрического поля [1—7]. Было показано, что в этих условиях может существенно измениться частотная зависимость коэффициента поглощения (усиления) звука [3, 4, 6], возможно параметрическое усиление звуковых волн [1, 2, 5, 6] и т. д. Отмечалась также возможность усиления низкочастотных колебаний, модулирующих высокочастотное электрическое поле [7].

В данной работе рассмотрим другой тип нестационарности, связанный с модуляцией подсветки. Пусть кристалл монополярного фотопроводящего пьезополупроводника однородно освещается световым потоком, модулированным во времени по закону $I(t) = I_0(1 + a\cos\Omega t)$, $0 < a \leqslant 1$. Это приведет к амплитудной модуляции концентрации электронов проводимости, что повлечет за собой изменение коэффициента поглощения (усиления) звука. Подчеркнем, что в отличе от работы [8] мы предполагаем световой поток пространственно однородным и не рассматриваем вынужденных звуковых колебаний.

Исходная система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - s^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\beta}{\rho}\frac{\partial E}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\varepsilon\frac{\partial E}{\partial x} - 4\pi\beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4\pi e[n - n_0(t)], \tag{2}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu n E - D\frac{\partial n}{\partial x}\right) = -\frac{n - n_\text{т}}{\tau} + kAI(t), \tag{3}$$

где u — смещение в звуковой волне, s — скорость звука, ρ — плотность кристалла, β — пьезомодуль, ε — диэлектрическая проницаемость, E — напряженность электрического поля, μ, D и τ — соответственно подвижность, коэффициент диффузии и время жизни электронов проводимости, k — квантовый выход, A — коэффициент поглощения света, n — полная концентрация электронов, $n_\text{т}$ — темновая концентрация, $n_0(t)$ — концентрация в отсутствие звуковой волны. Последняя величина, согласно уравнению (3), имеет вид

$$n_0(t) = n_\text{т} + kAI_0[1 + \lambda\cos(\Omega t - \delta)], \tag{4}$$

$$\lambda = \frac{a}{\sqrt{1 + \Omega^2\tau^2}}, \qquad \delta = \operatorname{arc\,tg}\Omega\tau.$$

В дальнейшем мы будем полагать $n_\text{т} \ll kAI_0$.

Метод вычисления коэффициента поглощения звука, обусловленного наличием электронов проводимости, в нестационарных условиях подробно изложен в работах [3—7], поэтому здесь мы лишь приведем результаты расчета. Коэффициент поглощения

$$\alpha = \chi q\frac{\omega_c}{\omega}\sum_{l=-\infty}^{\infty}(-1)^l I_l^2\left(\frac{\lambda\omega_c}{\Omega}\right) \times$$