АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIX 1973 Вып. 3

УДК 534.222.2

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕКУЩИХ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ КАВИТАЦИОННОГО ПУЗЫРЬКА В НЕОДНОРОДНОМ ЗВУКОВОМ ПОЛЕ

Э. М. Агрест, Г. Н. Кузнецов

Рассмотрено движение кавитационного пузырька в жидкости под действием неоднородного акустического поля. Получено аналитическое решение для изотермически пульсирующего пузырька в случае малого безразмерного параметра вязкости. Численно интегрируется уравнение радиальных пульсаций типа Нолтинга — Непайерса с дополнительным членом, учитывающим поступательное движение пузырька, совместно с уравнением поступательного движения в форме Цвига. Отмечается демпфирующее влияние поступательного движения пузырька на его смыкание в неоднородном звуковом поле.

В неоднородном звуковом поле в жидкости под действием переменного давления и переменного градиента давления газовый пузырек пульсирует и совершает поступательное движение. Пусть поле внешнего давления, воздействующее на газовый пузырек радиуса R_0, задано в виде $p = p_0 + p_m\varphi(r)\sin\omega t$, где $\varphi(r)$ — некоторая функция координаты r, $(0 \leqslant \varphi(r) \leqslant 1)$, зависящая от характера неоднородности звукового поля.

Радиальное движение пузырька в несжимаемой жидкости может подчиняться различным законам. Если амплитуда пульсаций давления $p_m\varphi$ невелика по сравнению со статическим давлением p_0 и радиус пузырька R_0 существенно меньше радиуса резонансного пузырька R^* для заданной частоты f_0, то равновесные изменения объема пузырька определяются изотермическим законом

$$\left(\frac{R}{R_0}\right)^3 = \frac{p_0 + 2\sigma/R_0}{p + 2\sigma/R} \tag{1}$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения.

Неравновесные малые пульсации пузырька как дорезонансных $(R_0 > R^*)$, так и послерезонансных $(R_0 > R^*)$ размеров с частичным учетом инерционного члена и затухания энергии описываются линейным дифференциальным уравнением второго порядка [1]:

$$m\ddot{w} + b\dot{w} + kw = -p', \tag{2}$$

где m — присоединенная масса пузырька, k — адиабатическая жесткость, b — диссипативный коэффициент, w — изменение объема пузырька, p' — звуковое давление.

Поступательное движение пузырька в маловязкой жидкости определяется дифференциальным уравнением [2]:

$$\frac{d}{dt}\left[\rho' V\mathbf{u} + \frac{1}{2}\rho V(\mathbf{u} - \mathbf{v})\right] = -D(\mathbf{u} - \mathbf{v}) - V\nabla p, \tag{3}$$

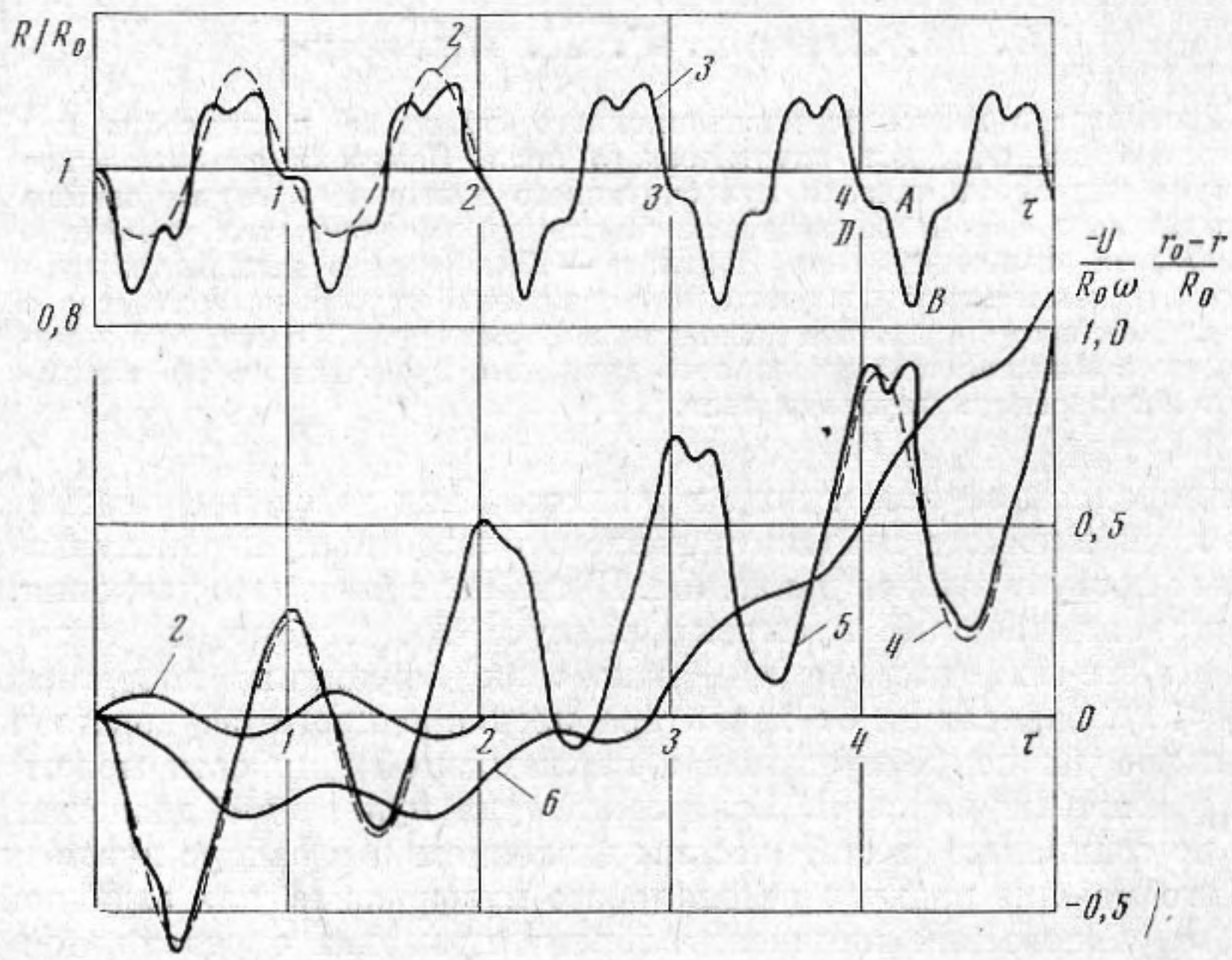
где $D = 6\pi\mu R[1 + 0{,}065\mathrm{Re}^{2/3}]^{3/2}$ — коэффициент, характеризующий вязкое сопротивление поступательному движению пузырька, ρ', ρ — соответствен-

но плотности газа и жидкости, V — объем пузырька, $\mathbf{u}$ — вектор скорости поступательного движения пузырька, $\mathbf{v}$ — вектор скорости жидкости, μ — вязкость жидкости, $\mathrm{Re} = \frac{|\mathbf{u}-\mathbf{v}|2\rho R}{\mu}$ — число Рейнольдса.

Будем считать, что вязкость жидкости существенна только при движении пузырька относительно частиц жидкости, в то время как для жидкости вне пограничного слоя пузырька справедливо уравнение Эйлера

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\Delta p. \tag{4}$$

В работе [3] исследовалось изменение во времени осредненных за один период стоячей звуковой волны параметров поступательного движения пу-



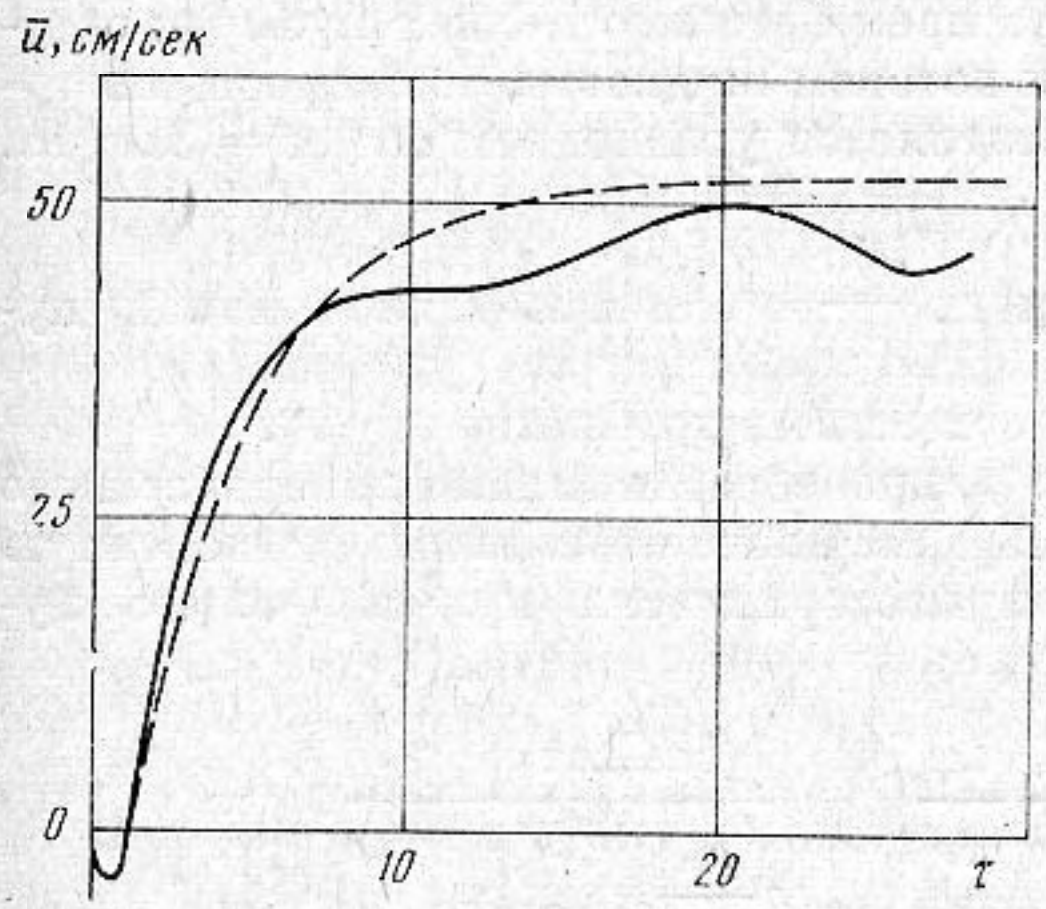
Фиг. 1

зырька. Однако для изучения процесса конвективной диффузии и излучения звука захлопывающейся каверной необходимо знать характер изменения мгновенных значений радиуса пузырька R, скорости его границы $\dot{R}$ и его поступательной скорости u. Численное интегрирование системы уравнений (1)—(4) на ЭВМ позволило установить некоторые интересные закономерности движения пузырька.

№ фигуры	R_0, *см*	f_0, *кгц*	p_0, *атм*	p_m, *атм*	r_0/L	L, *см*	φ	μ, *г/см·сек*
1	0,01	7	1	0,4	0,5	10	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,01
2	0,01	7	1	0,9	0,5	10	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,01
3	0,025	7	1	0,3	0,5	10	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,01
4	0,025	7	1	0,3	0,5	10	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,01

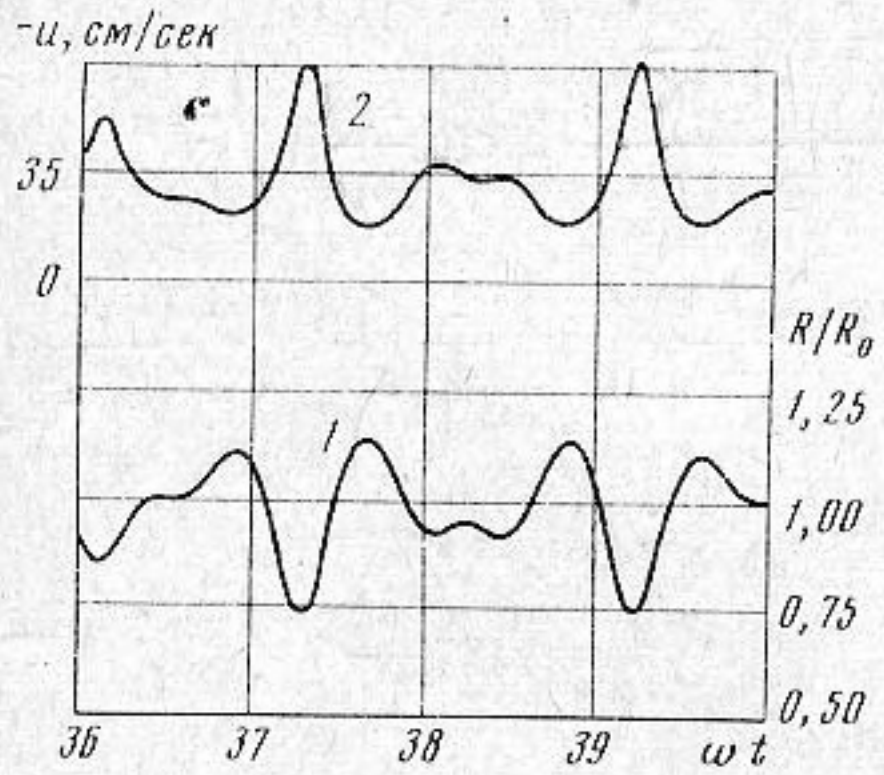
Результаты численного интегрирования приведены на фиг. 1—4 и получены при начальных условиях, представленных в таблице.

Радиальные изотермические пульсации, подчиняющиеся уравнению (1) (фиг. 1, кривая *1*), происходят синфазно изменению поля давления (кривая *2*). В случае неравновесных изменений объема, согласно уравнению (2), заметны пульсации пузырька на собственной частоте (кривая *3*), которая примерно в четыре раза превосходит частоту f_0 звукового давления.

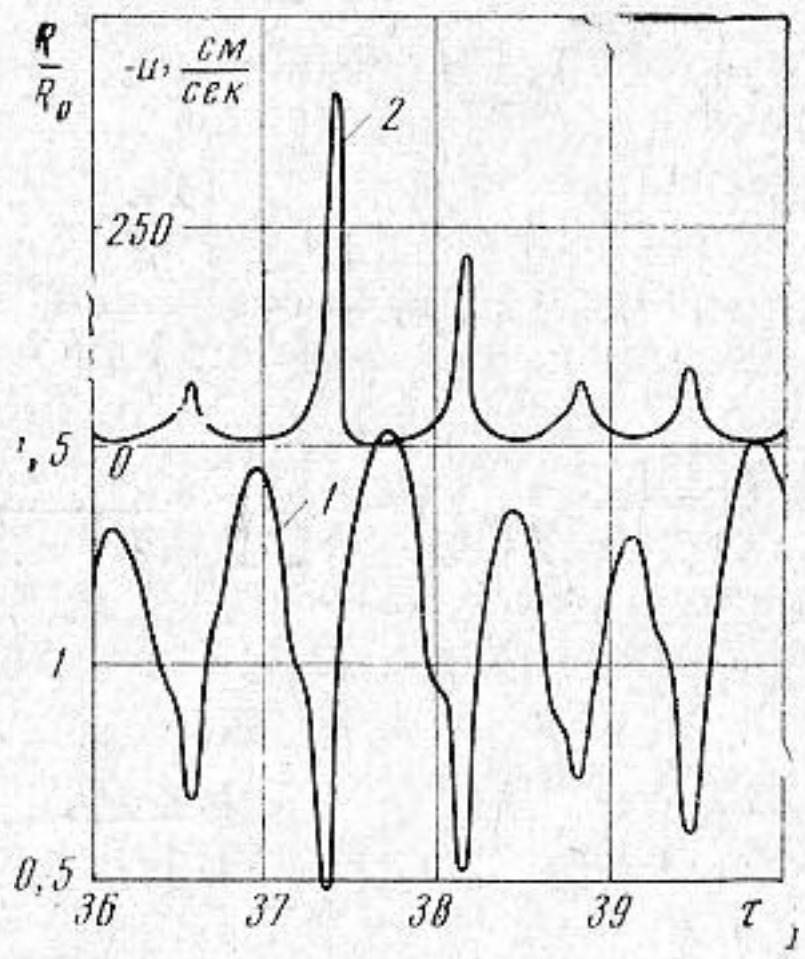


Фиг. 2

Это различие в радиальном движении мало сказывается на характере изменения поступательной скорости пузырька u (кривые *4*, *5*) и практически не влияет на перемещение пузырька в звуковом поле (кривая *6*), если $p_m\varphi$ и R_0 невелики по сравнению с p_0 и R^*. (Здесь и далее штриховые кривые соответст-



Фиг. 3



Фиг. 4

вуют изотермическим пульсациям, τ — номер периода.) Если же $p_m\varphi \lesssim p_0$, то становится существенным различие в мгновенных значениях скорости u, что оказывает влияние на величину средней за период скорости поступательного движения пузырька $\bar{u}$ (фиг. 2). Радиальные пульсации пузырьков, более близких к резонансному размеру, также приобретают нерегулярный характер. Быстрые неравновесные смыкания полости при повышенном давлении (фиг. 3, кривая *1*) вызывают резкое увеличение скорости поступательного движения пузырька (кривая *2*). Следующий за смыканием рост пузырька вызывает его торможение. В результате образуются максимумы поступательной скорости, существенно превышающие ее среднее значение и максимальную скорость движения жидкости v_{max}, равную в последнем случае 1 *см/сек*.

Оценка членов по порядку малости в уравнении (3) и результаты численного интегрирования уравнений (1)—(4) показывают, что для крупных пузырьков, когда $M = \dfrac{\mu}{2\rho f_0 R_0^2}$ меньше некоторого характерного значения M^*, вязкость жидкости практически перестает сказываться на поступательном движении пузырька. В этом случае, учитывая формулы (3), (4) и пре-

небрегая массой газа в пузырьке по сравнению с его присоединенной массой, можно записать

$$\frac{d}{dt}[V(u-v)]=2V\frac{dv}{dt}. \tag{5}$$

Если изменения объема пузырька пренебрежимо малы и пузырек обтекается одномерным поступательным потоком жидкости, то скорость поступательного движения пузырька определяется уравнением $du/dt=3dv/dt$. В этом случае $u=3v$.

В реальных кавитационных задачах $\frac{dV}{dt}\neq 0$ и при захлопывании пузырька величина $|u|$ при $R=R_{\min}$ существенно превышает $|v|$.

Для крупных пузырьков ($M<M^*$), пренебрегая силами поверхностного натяжения, можно определить в безразмерных переменных мгновенную скорость поступательного движения изотермически пульсирующего пузырька:

$$u=\left(1+\frac{p_m}{p_0}\varphi\sin 2\pi\tau\right)\left\{\frac{p_m}{2\pi}\frac{d\varphi}{dr}\left(\frac{\cos 2\pi\tau}{1+\frac{p_m}{p_0}\varphi\sin 2\pi\tau}-1\right)+\right.$$

$$+2p_0\frac{d\ln\varphi}{dr}\left\{\frac{1}{\pi q}\left(\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\pi\tau+\varphi\frac{p_m}{p_0}}{q}-\operatorname{arctg}\frac{p_m\varphi}{p_0 q}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{1}{q}-1\right)\delta\left[\tau-\frac{1}{2}\right]+\frac{2+\pi(1-q)}{2\pi q}\delta-\frac{1}{2}+\left[\tau+\frac{1}{2}\right]-\tau\left(\frac{3}{2}-\frac{\delta}{2}\right)\right\}\right\}, \tag{6}$$

где

$$q=\sqrt{1-\frac{p_m^2}{p_0^2}\varphi^2};\qquad \delta=\begin{cases}0 & \text{при } \tau<\frac{1}{2}\\ 1 & \text{при } \tau\geqslant\frac{1}{2}\end{cases}$$

Здесь линейные размеры отнесены к начальному радиусу пузырька — R_0, скорость — к величине — $R_0 f_0$, давление — $\rho(R_0 f_0)^2$; квадратные скобки означают целую часть числа.

Средняя за период скорость $\bar{u}$ оказывается линейной функцией времени:

$$u=A+B\tau, \tag{7}$$

где

$$A=-\frac{p_m}{2\pi}\frac{d\varphi}{dr}+\frac{p_0}{\pi q}\frac{d\ln\varphi}{dr}\left(2+\pi-3\pi q-2\operatorname{arctg}\frac{p_m\varphi}{p_0 q}\right)$$

$$B=2p_0\frac{d\ln\varphi}{dr}\left(\frac{1}{q}-1\right).$$

Решения (6) и (7) справедливы при условиях $R_0<R^*$ и $p_m<p_0$, когда допустимо считать пульсации пузырька изотермическими. Линеаризованное уравнение с постоянными коэффициентами (2) также не определяет точно параметры радиального движения захлопывающихся пузырьков ($R_0\gtrsim R^*$, $p_m\gtrsim p_0$). В этом случае для описания радиальных пульсаций

обычно используют уравнение Нолтинга — Непайерса:

$$R\ddot{R}+\frac{3}{2}\dot{R}^2+\frac{2\sigma}{\rho R}-\frac{1}{\rho}\left[\left(p_0+\frac{2\sigma}{R_0}\right)\left(\frac{R_0}{R}\right)^3+p_{\text{н}}\right]=$$

$$=-\frac{1}{\rho}(p_0+p_m\varphi\sin\omega t), \tag{8}$$

где $p_{\text{н}}$ — давление насыщенных паров.

Характерно, что отношение $R_{\max}/R_{\min}$ и, следовательно, значения $\dot{R}_{\max}$, полученные по уравнению (8) (фиг. 4, кривая *1*), оказываются существенно больше, чем при использовании уравнения (2) для аналогичных начальных условий (фиг. 3, кривая *1*), даже при $p_m \leqslant p_0$. Очевидно, что это различие сильно возрастет при $p_m > p_0$.

Более быстрое сжатие пузырька приводит к большим ускорениям и скоростям поступательного движения. Максимальные значения скорости u (фиг. 4, кривая *2*), рассчитанные согласно уравнению (8), в несколько раз больше, чем в случае линейных радиальных пульсаций (фиг. 3, кривая *2*).

Все рассмотренные выше уравнения учитывали влияние радиального движения на поступательное; обратным воздействием поступательного на радиальное движение мы пренебрегали. Это оправдано в том случае, когда поступательные скорости u существенно меньше скоростей радиальных пульсаций $\dot{R}$. При сильных пульсациях пузырька даже в слабых градиентных полях величина u может достигать и даже превосходить v. Вследствие этого поступательное движение оказывает существенное влияние на распределение нормального давления вокруг пузырька и, следовательно, воздействует на его радиальное движение. В первом приближении, если пренебречь деформацией пузырька и асимметрией в распределении вокруг него давления, поступательное движение можно учесть, добавив при выводе уравнения Нолтинга — Непайерса к потенциалу источника $\Phi=\dot{a}a/r$ потенциал поступательного потока, обтекающего пузырек со скоростью $|u-v|$. Если при этом пренебречь $|v|$ по сравнению с $|u|$, то вместо уравнения (8) получим уравнение

$$R\ddot{R}+\frac{3}{2}\dot{R}^2+\frac{2\sigma}{R}-\frac{1}{\rho}\left[\left(p_0+\frac{2\sigma}{R_0}\right)\left(\frac{R_0}{R}\right)^3+p_{\text{н}}\right]-\frac{1}{4}u^2=$$

$$=-\frac{1}{\rho}(p_0+p_m\varphi\sin\omega t), \tag{9}$$

учитывающее движение пузырька относительно жидкости. Наличие в уравнении (9) члена $1/4u^2$ эквивалентно уменьшению внешнего для пузырька давления на половину скоростного напора.

Численное интегрирование систем уравнений (3), (9) и (3), (8) с учетом уравнения (4) показывает, что поступательное движение пузырька приводит к увеличению на порядок и более минимального радиуса пузырька при его смыкании даже при $p_m\varphi(r)\leqslant p_0$. Например, при $p_0=1$ *атм*,

$$\varphi p_m=0{,}63\ \textit{атм},\ \frac{d\varphi}{dr}=\frac{\sqrt{2}}{20}\ \textit{см}^{-1},\ R_0=10^{-2}\ \textit{см},\ f_0=7\ \textit{кгц},\ \mu=10^{-2}\ \textit{г/см}\cdot\textit{сек}.$$

Следует отметить, что в действительности поступательно движущаяся полость при смыкании теряет сферическую форму [4], уплощаясь вдоль направления своего движения. Если скорость смыкания достаточно велика, можно ожидать дробления пузырька.

Деформация пузырька на последних этапах смыкания и связанная с потерей сферической симметрии передача кинетической энергии радиального движения (моды нулевого порядка) движению на более высоких модах, по нашему мнению, может существенно уменьшить значения $\dot{R}_{\max}$, увеличить

R_{min} и, таким образом, уменьшить u_{max}. Очевидно, что для решения этого вопроса необходимо рассмотреть задачу о взаимодействии деформирующейся полости с неоднородным звуковым полем. Одновременно должен быть рассмотрен вопрос об устойчивости движения на различных модах для пульсирующей полости, движущейся поступательно. К некоторому уменьшению u_{max} и $\dot{R}_{max}$ приведет также учет диссипации энергии за счет сжимаемости жидкости при u_{max}, $\dot{R}_{max}$, близких и бо́льших скорости звука в жидкости c_0.

Таким образом, поступательное движение полостей, вызванное градиентом внешнего акустического или гидродинамического давления, влиянием твердых или свободных границ, влиянием соседних пузырьков и влиянием всплытия в поле тяжести, наряду с давлением газа внутри пузырька является основным демпфирующим фактором при смыкании пузырька, существенно уменьшающим значение $\dot{R}_{max}$. С другой стороны, поскольку не только $\dot{R}_{max}$, но и u_{max} соизмеримы с c_0, то при оценках звукового излучения, а также при расчете производимых кавитацией разрушений следует учитывать поступательное движение пульсирующих пузырьков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ch. Devin. Survey of thermal, radiation and viscous damping of pulsating air bubbles in water. JASA, 1959, **31**, 12, 1654—1657.
2. В. И. Ильичев, А. А. Канзеба, Г. Н. Кузнецов, А. Т. Листров. Движение газового пузырька в гидродинамическом поле обтекаемого тела. Тр. АКИН, вып. VI, 1969, 136—144.
3. Э. М. Агрест, Г. Н. Кузнецов. Миграция газовых пузырьков в акустических полях с градиентом давления. Докл. на VII Всес. акустич. конф. Ленинград, 1971.
4. Hsu Chieh, Wen Gei Yang. Dynamics of a gas bubbles moving in an invicid liquid subjected to a sudden press change. JASA, 1969, **40**, 4, 1763—1768.

Акустический институт. Сухумский филиал
Академии наук СССР

Поступила
3 мая 1971 г.