АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIX 1973 Вып. 3

УДК 534.222.2:532.526.4

СПЕКТР КВАДРУПОЛЬНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПЛОСКОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

А. В. Смольяков

Получено решение для распределения по частотам энергии акустического излучения турбулентного пограничного слоя на плоской однородной пластине. Показано, что это излучение более высокочастотно, чем излучение свободной турбулентной струи, и что энергия высоких частот существенно зависит от числа Рейнольдса.

Спектральная плотность квадрупольного излучения турбулентного пограничного слоя была определена в работе [1], где для решения задачи использовалась информация в форме Коркоса [2] о поле пристеночных пульсаций давления. Однако зависимости Коркоса не очень удобны для этой цели. Дело в том, что они являются аппроксимацией результатов измерений, при которых весьма слабые звуковые компоненты поля давлений из области $\omega / k \geqslant c$ частотно-волнового спектра практически полностью маскируются более сильными, но не имеющими отношения к делу псевдозвуковыми компонентами из области $\omega / k < c$ (здесь ω — частота, k — модуль волнового вектора, лежащего в плоскости пластины, c — скорость звука).

Отсутствие надежных данных о поле пристеночных давлений в области $\omega / k \geqslant c$ стимулирует поиск иных путей решения задачи. Ниже спектр квадрупольного излучения определяется через простейшие характеристики поля скорости в турбулентном пограничном слое, кроме того, используются опытные данные о спектре звукоизлучения турбулентных струй.

Акустическая интенсивность I выражается через спектральную плотность $P(\omega)$, как известно, соотношением

$$I = (\rho c)^{-1} \int_0^\infty P(\omega)\, d\omega, \tag{1}$$

где ρ — массовая плотность среды, ω — частота. С другой стороны, для интенсивности квадрупольного излучения пограничного слоя можно написать выражение

$$I = 20{,}4 \rho c^{-5} \int_0^\infty \varepsilon^{7/2} \left(\frac{du}{dy} \right)^{9/2} dy, \tag{2}$$

где ε — вихревая вязкость турбулентного потока, u — его средняя скорость на расстоянии y от поверхности пластины. Зависимость (2), как и используемые ниже формулы (5), (6), (8), (9), (11), (13), взяты из работы [3].

Выразим характерную частоту излучения через масштаб l неоднородностей турбулентности и их колебательную скорость v как $\omega \sim v / l$. Для сдвиговых турбулентных течений (след, струя, турбулентный погранич-

ный слой) обычным является предположение $l \sim v / (du / dy)$, поэтому

$$\omega = k_0 \frac{du}{dy}, \tag{3}$$

где k_0 — неизвестная пока постоянная.

В соответствии с этой формулой принимается, что некоторый элементарный объем турбулентного течения, подверженный сдвигу du / dy, излучает только на одной частоте. В действительности, конечно, это не совсем так, поскольку характерной частоте (3) на самом деле соответствует максимум излучения, охватывающего некоторый диапазон частот. Можно, однако, ожидать, что принятое допущение не будет слишком грубым, если оно используется для определения спектра излучения всего потока в целом, так как в этом случае погрешности для отдельных объемов, составляющих поток, взаимно ослабляются.

Из сопоставления формул (1) — (3) следует, что задача определения спектра $P(\omega)$ может быть сведена к процедуре замены в формуле (2) переменной y на переменную ω. Рассматривая пристеночную область постоянных напряжений в турбулентном пограничном слое, введем безразмерную частоту

$$\bar{\omega}_1 = \frac{\omega \nu}{u_*^2 k_0}, \tag{4}$$

где ν — кинематическая вязкость, $u_* = (\tau_\omega / \rho)^{1/2}$ — динамическая скорость, τ_ω — напряжение трения на поверхности пластины. Тогда в зоне вязкого подслоя ($\nu \gg \varepsilon$)

$$\frac{\varepsilon}{\nu} = \frac{1}{\bar{\omega}_1} - 1 \simeq 8 \cdot 10^{-4} \left(\frac{y u_*}{\nu}\right)^3 \tag{5}$$

и в развитой турбулентной зоне ($\nu \ll \varepsilon$) этой области

$$\frac{\varepsilon}{\nu} = \frac{1}{\bar{\omega}_1} - 1 \simeq \varkappa \left(\frac{y u_*}{\nu}\right), \tag{6}$$

где $\varkappa = 0{,}41$ — постоянная Кармана. Теперь с помощью формул (1) — (6) и условия постоянства напряжений $du / dy = u_*^2 / (\nu + \varepsilon)$ нетрудно получить выражения для высокочастотной части излучения турбулентного пограничного слоя

$$\frac{P(\bar{\omega}_1) u_*^2 k_0}{\rho^2 U^4 M^4 (c_\omega/2)^4 \nu} = \begin{cases} 49{,}8 \bar{\omega}_1^{-1}; & \Omega \leqslant \bar{\omega}_1 \ll 1, \\ 73{,}5 \bar{\omega}_1^{-1/3} (1 - \bar{\omega}_1)^{17/6}; & \bar{\omega}_1 \to 1, \end{cases} \tag{7}$$

где

$$\Omega = \frac{(2/c_\omega)^{1/2}}{0{,}181 \varkappa (U\delta/\nu)}$$

— нижняя частота излучения в слое постоянных напряжений, U — скорость набегающего на пластину потока, $M = U / c$ — число Маха, δ — толщина пограничного слоя, $c_\omega = 2\tau_\omega / \rho U^2$ — коэффициент поверхностного трения. Частота Ω определяется положением границы y_0 между слоем постоянных напряжений и внешней частью турбулентного пограничного слоя

$$\frac{y_0 u_*}{\nu} = 0{,}184 \left(\frac{c_\omega}{2}\right)^{1/2} \cdot \frac{U\delta}{\nu}. \tag{8}$$

Точную форму спектра в промежуточном между Ω и 1 диапазоне частот найти затруднительно (если не прибегать к машинным вычислениям), поскольку для этого диапазона не удается построить аналитической функ-

ции, аналогичной (5) или (6). Однако столь детальное задание спектра вряд ли сейчас является острой необходимостью и можно, по-видимому, в качестве первого приближения использовать любую убывающую функцию, плавно сопрягающую два крайних случая (7).

Низкочастотная часть спектра обусловлена излучением крупномасштабной турбулентности внешней части пограничного слоя, для которой

$$\frac{du}{dy}\cdot\frac{\delta}{\gamma u_*}=\bar{\omega}_2=\exp\left[-\frac{a^2}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right],\qquad \varepsilon=\frac{u_*\delta}{\gamma},\tag{9}$$

где $\bar{\omega}_2=\omega\delta/u_*k_0\gamma$, $\gamma=13{,}5$ и $a^2=3{,}54$. Нетрудно показать, что здесь

$$\frac{P(\bar{\omega}_2)u_*k_0\gamma}{\rho^2U^4M^4(c_\omega/2)^4\delta}=7{,}66\frac{\bar{\omega}_2^{\,7/2}}{\sqrt{\ln(1/\bar{\omega}_2)}},\qquad 0\leqslant\bar{\omega}_2\leqslant 0{,}94.\tag{10}$$

Для определения постоянной k_0, входящей в формулы (7) и (10), можно использовать надежные экспериментальные результаты о частотном распределении энергии квадрупольного шума холодных дозвуковых турбулентных струй (соответственные измерения для турбулентного пограничного слоя пока не выполнены). По существу мы принимаем, что характерная частота излучения элементарного объема полностью определяется величиной сдвига. Исследование пульсационных характеристик автомодельных потоков струи [4] и пограничного слоя [5] не противоречит такому предположению.

Итак, рассмотрим задачу о спектре акустического излучения струи, пользуясь теми же, что и для пограничного слоя, исходными посылками и определением частоты (3).

Для начального участка круглой турбулентной струи

$$\frac{du}{dr}\cdot\frac{D\sqrt{\pi}\,\bar{x}}{\sigma U}=\exp\left[-\frac{\sigma^2}{\bar{x}^2}\left(\bar{r}-\frac{1}{2}\right)^2\right],\qquad \varepsilon=\frac{xU}{4\sigma^2},\tag{11}$$

где D — диаметр сопла, x — расстояние от его среза вниз по потоку, U — скорость истечения струи, r — радиальное расстояние от оси струи, $\bar{r}=r/D$, $\bar{x}=x/D$ и $\sigma=13{,}5$. Интегрирование, аналогичное примененному в формуле (2), по объему начального участка с заменой переменных приводит к следующему результату для акустической мощности W_1 этой части потока:

$$\frac{W_1}{\rho U^3M^5D^2}=\int_0^{\Omega}10^{-6}\left[4{,}4\bar{\omega}_0^{\,7/2}+30{,}6\frac{1-\Phi(z)}{\bar{\omega}_0^{\,2}}\right]d\bar{\omega}_0+\int_{\Omega}^{\infty}10^{-6}\left(\frac{6{,}85}{\bar{\omega}_0^{\,3}}+\frac{30{,}6}{\bar{\omega}_0^{\,2}}\right)d\bar{\omega}_0.\tag{12}$$

Здесь $\Phi(z)$ — интеграл вероятности, $z=[11\ln(\Omega/\bar{\omega}_0)]^{1/2}$, $\Omega=\sigma/\bar{x}_0\sqrt{\pi}$, $\bar{x}_0$ — длина начального участка, выраженная в калибрах D и $\bar{\omega}_0=\omega U/k_0D$.

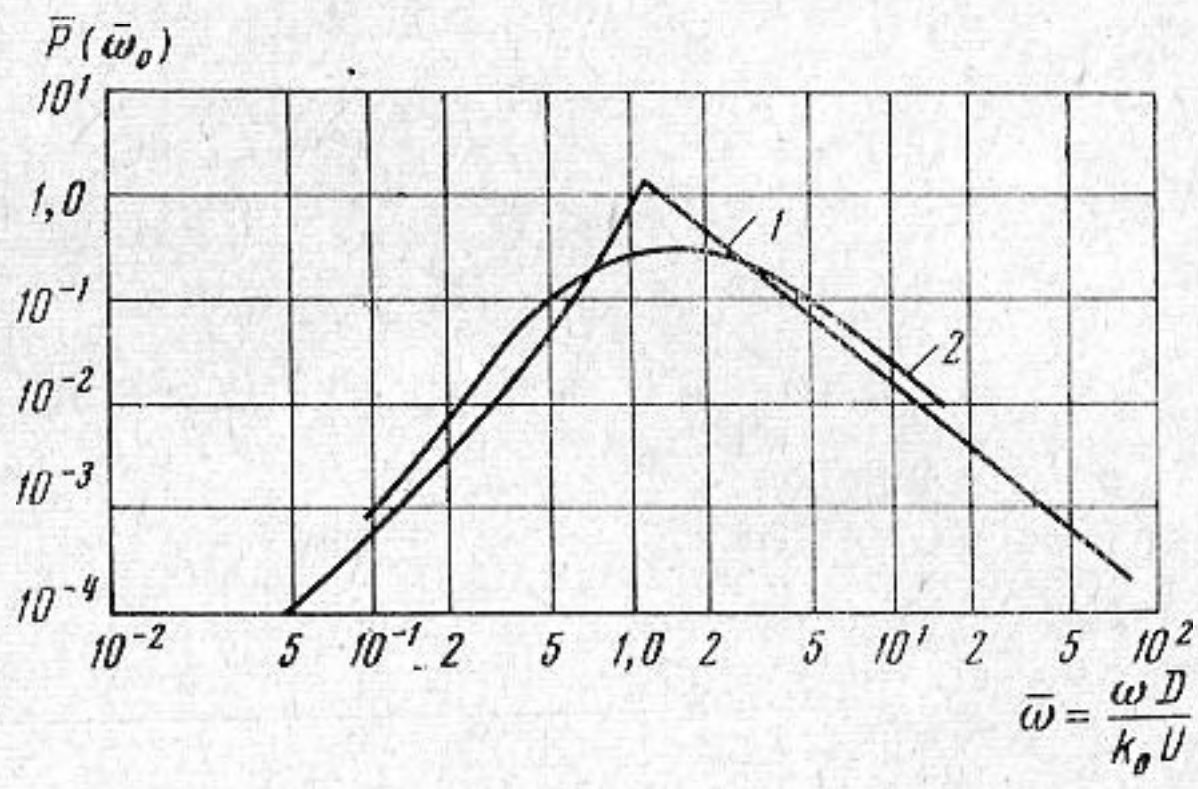
Основной участок струи при $x_0=7{,}1$ [3] дает небольшую долю ($\sim$14%) общей акустической мощности струи. Поэтому оценку спектра излучения этой части потока можно выполнить грубее, а именно предположить, что в каждом сечении ($x=\mathrm{const}$) рождается только одна частота, соответствующая максимальному градиенту средней скорости. Именно такое предположение было сделано в свое время Муниным [4] для всей струи, включая и ее энергонесущий начальный участок. В основном участке струи

$$\left(\frac{du}{dr}\right)_{\max}=110\frac{UD}{(\bar{x}+3{,}4)^2},\qquad \varepsilon=9{,}75\cdot10^{-3}UD,\tag{13}$$

откуда аналогичным образом следует, что нормированная акустическая мощность здесь будет

$$\frac{W_2}{\rho U^3 M^5 D^2} = \int_0^{\Omega} 1{,}21 \cdot 10^{-5}\, \bar{\omega}_0^{\,2} d\bar{\omega}_0. \qquad (14)$$

Подынтегральные выражения в зависимостях (12), (14) описывают распределение по частотам энергии излучения круглой турбулентной струи. Форма этого спектра показана на фиг. 1, кривая *1*. Видно, что вычисленная функция имеет излом при $\bar{\omega}_0 = \Omega = 1{,}07$, который является следствием излома в функциональной зависимости для вихревой вязкости на границе между начальным и основным участками струи. Если ввести функцию, плавно сопрягающую два закона (11) и (13) для вихревой вязкости, то излом в спектре уступит место плавному максимуму, а энергия срезанного (в результате сглаживания) пика должна каким-то образом распределиться вдоль спадающих ветвей спектра. Учитывая сказанное, можно считать, что вычисленный спектр хорошо согласуется с результатами измерений [4], показанными на фиг. 1 кривой *2*, если положить $k_0 = 1{,}26$.



Фиг. 1

Найденное значение k_0 позволяет теперь определить спектр (7) и (10) излучения турбулентного пограничного слоя более конкретно. Кроме того, для удобства сопоставления спектра акустического излучения со спектром псевдозвуковых турбулентных давлений в пограничном слое целесообразно применить одинаковые и ставшие общеупотребительными [5] единицы измерения: для частоты — U / δ^*, для спектра — $\tau_\omega^2 \delta^* / U$, где через δ^* обозначена толщина вытеснения пограничного слоя. Для уменьшения числа параметров, от которых зависят функции (7) и (10), можно также воспользоваться известными соотношениями Шлихтинга [6]:

$$\delta = 0{,}37 x R_x^{-1/5}, \quad c_\omega = 5{,}76 \cdot 10^{-2} R_x^{-1/5}, \quad \delta/\delta^* = 8, \qquad (15)$$

в которых $R_x = xU / \nu$ — число Рейнольдса, составленное для расстояния x от передней (входной) кромки пластины. После несложных преобразований спектр квадрупольного излучения пограничного слоя можно представить как функцию частоты $\bar{\omega} = \omega\delta^* / U$ и чисел Маха и Рейнольдса:

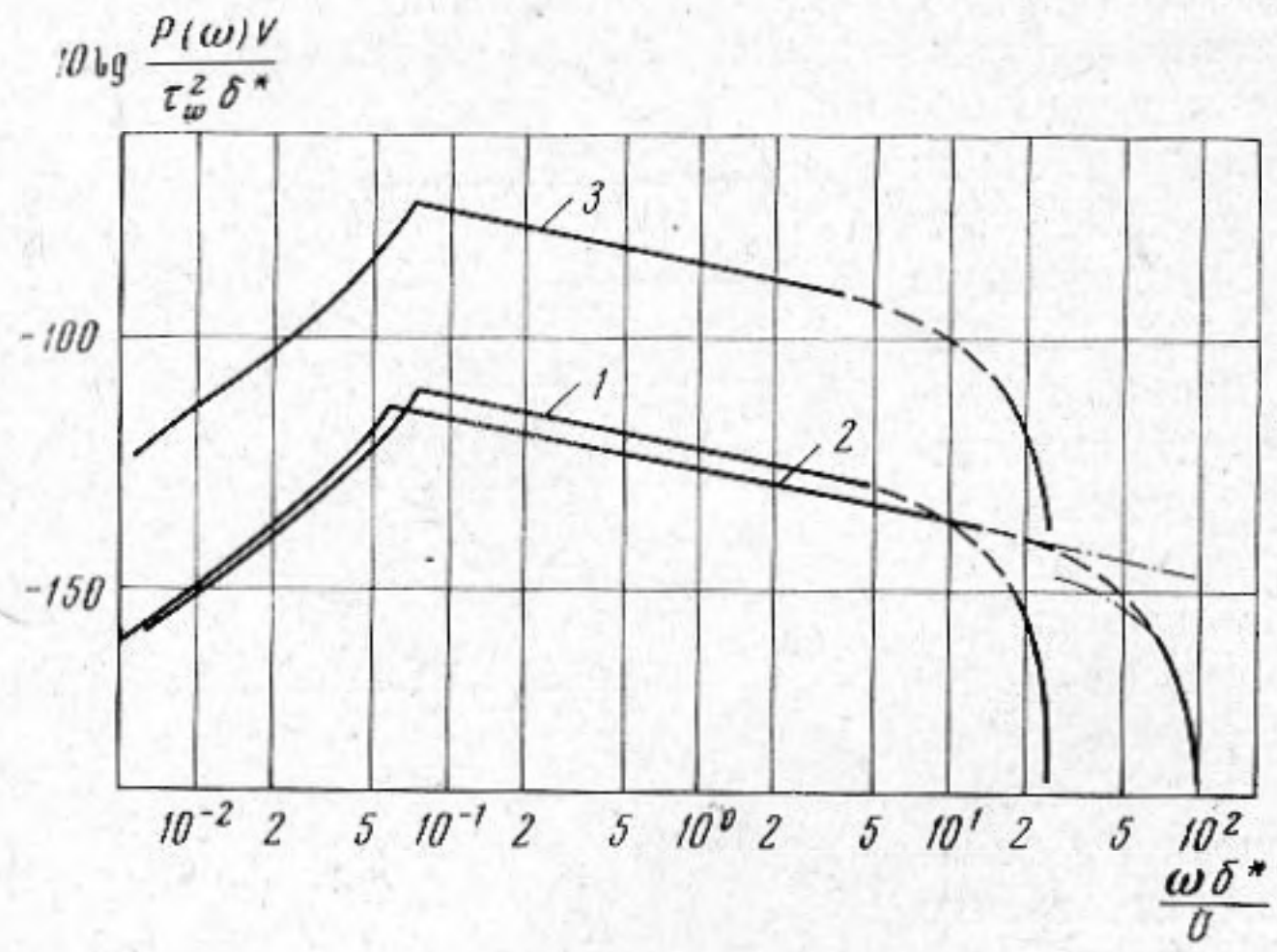
$$\frac{P(\bar{\omega})U}{\tau_\omega^2 \delta^* M^4} =$$

$$= \begin{cases} 0{,}418 R_x^{1/20}\, \bar{\omega}^{7/2} [-\lg(2{,}77 \bar{\omega} R_x^{1/10})]^{-1/2}; & 0 \leqslant \bar{\omega} \leqslant \Omega_1, \\ 4{,}12 \cdot 10^{-2} R_x^{-2/5}\, \bar{\omega}_{-1}; & \Omega_1 \leqslant \bar{\omega} \ll \Omega_2, \\ 4{,}35 R_x^{-4/5}\, \bar{\omega}^{-1/3} (1 - 594 \bar{\omega} R_x^{-3/5})^{17/6}; & \bar{\omega} \to \Omega_2, \end{cases} \qquad (16)$$

где

$$\Omega_1 = 0{,}35 R_x^{-1/10}; \quad \Omega_2 = 1{,}68 \cdot 10^3 R_x^{3/5}. \qquad (17)$$

На фиг. 2 этот спектр показан для $M = 10^{-2}$ при $R_x = 10^7$ (кривая *1*) и $R_x = 10^8$ (кривая *2*), а также для $M = 0{,}12$ и $R_x = 10^7$ (кривая *3*). Видно, что спектр слабо реагирует на изменение числа Рейнольдса в области низких частот, обусловленных инерционной крупномасштабной турбулентностью: при изменении числа Рейнольдса на порядок спектральная плотность изменяется не более чем на 3 *дб*. Однако увеличение числа Рейнольдса заметно расширяет высокочастотный диапазон излучения, обусловленный флуктуациями мелкомасштабной турбулентности, сильно подверженной действию вязкостных сил. Спектр круто обрывается при $\bar{\omega} \to \Omega_2$, что



Фиг. 2

связано с затуханием турбулентности в вязком подслое, но в основном он убывает на высоких частотах, как ω^{-1}, т. е. значительно медленнее, чем в струе, где в соответствии с формулой (12) убывание происходит по закону ω^{-2}. Другим словами, спектр излучения пограничного слоя более высокочастотный, чем спектр струи. Это отражает тот факт, что структура пристеночной турбулентности пограничного слоя в среднем более мелкомасштабна, чем структура свободной турбулентной струи. Этим же обусловлена и меньшая по сравнению со свободной турбулентностью величина акустического к.п.д. пограничного слоя [3], так как мелкомасштабность структуры способствует большей скорости превращения турбулентной энергии в тепло и соответственно — меньшей скорости превращения этой энергии в энергию акустического излучения.

Зависимость спектра (16) от числа Маха для всех частот одинакова ($P(\omega) \sim M^4$) и соответствует квадрупольному характеру излучения.

Излом спектра при $\bar{\omega} = 0{,}35\, R^{-1/10}$ обусловлен, так же как и в струе, некоторым несовершенством сшивания вихревых вязкостей (6) и (9) на границе между слоем постоянных напряжений и внешней частью турбулентного пограничного слоя. В действительности здесь следует ожидать наличие более или менее плавного максимума.

Полученные зависимости (16) и (17) позволяют определить, что при малых числах Маха отношение давлений, обусловленных квадрупольным излучением пограничного слоя, к псевдозвуковым турбулентным давлениям [5]

$$\frac{P_T(\bar{\omega})U}{\tau_\omega^2 \delta^*} = \frac{11{,}12}{1 + \exp[1{,}425\bar{\omega}^{0{,}62}]}$$

составляет ничтожно малую величину. Так, при $M = 0{,}1$ и $R_x = 10^7$ это отношение составляет около — 80 *дб* в диапазоне $\bar{\omega} \simeq 0{,}1 \div 10$ и еще меньше на всех других частотах.

Приведенная оценка заставляет весьма скептически отнестись к каким-либо надеждам, связанным с возможностью обнаружения звуковой части поля давлений турбулентного пограничного слоя при измерениях спектров или взаимных спектров на поверхности обтекаемого тела. Несколько более оптимистично можно оценить возможность такого обнаружения с помощью пространственных фильтров волновых частот, выполненных в виде решеток Майданика [7], включенных в тракт с фильтром временны́х частот и специально настроенных на область $\omega / k > c$ частотно-волнового спектра пристеночных давлений. Однако такие опыты пока никем не проведены.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Долгова. К вопросу об излучении звука пограничным слоем. Акуст. ж., 1969, **15**, 1, 128—131.
2. G. M. Corcos. Resolution of pressure in turbulence. J. Acoust. Soc. America, 1963, **35**, 2, 192—199.
3. А. В. Смольяков. Интенсивность акустического излучения турбулентного пограничного слоя на пластине. Акуст. ж., 1973, **19**, 2.
4. А. Г. Мунин. Связь аэродинамических и акустических характеристик дозвуковой газовой струи. Тр. ЦАГИ «Промышленная аэродинамика», св. № 23. М., Оборонгиз, 1963.
5. Ю. Г. Блюдзе, О. Н. Докучаев. Измерения пульсаций скорости и давления в турбулентных пограничных слоях. Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1969, **5**, 175—182.
6. Г. Шлихтинг. Теория пограничного слоя. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
7. G. Maidanik, D. W. Jorgensen. Boundary wave-vector filters for the study of pressure field in a turbulent boundary layer. J. Acoust. Soc. America, 1967, **42**, 2, 494—501.

Поступила
21 декабря 1970 г.