АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIX 1973 Вып. 4

УДК 534.26:534.222.2

ВЫНУЖДЕННОЕ РАССЕЯНИЕ ЗВУКА НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

В. К. Гавриков, Н. В. Лукашова

Теоретически рассмотрены два нелинейных эффекта на границе раздела жидкостей: генерация поверхностных колебаний при смешении объемных звуковых волн и вынужденное рассеяние звука на поверхностных волнах. Исследована зависимость порога вынужденного рассеяния от длительности импульса и размеров звукового пятна. Показано, что наряду с порогом неустойчивости относительно возбуждения поверхностных колебаний при малых длительностях импульса (и малых апертурах пучка) существует порог наблюдения, который определяется возможностями регистрации рассеянного звука. Приводятся численные оценки, указывающие на возможность экспериментального обнаружения рассмотренных эффектов.

В работе Л. М. Бреховских [1] было показано, что процессы нелинейного взаимодействия гравитационно-капиллярных волн на поверхности жидкости приводят к генерации звуковой волны, распространяющейся внутрь объема среды.

Рассмотрим обратный эффект — генерацию поверхностных колебаний, возникающую при смешении двух объемных звуковых волн, и, кроме того, вынужденное рассеяние звука на поверхностных волнах, при котором возникает неустойчивость, связанная с обратным воздействием падающего и рассеянных полей на движение границы и приводящая к усилению колебаний поверхности.

Рассмотрим сначала задачу о вынужденном рассеянии. На границу раздела двух жидкостей с плотностями ρ_I и ρ_{II}, на которой возбуждена поверхностная волна $\zeta = \mathrm{Re}\, a \exp(i\mathbf{q}r - i\Omega t)$ падает плоская звуковая волна, которой соответствует потенциал $\varphi = \mathrm{Re}\, A \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$ (a, $\mathbf{q}$, Ω и A, $\mathbf{k}$, ω — амплитуды, волновые векторы и частоты поверхностной и падающей звуковой волны соответственно).

Рассеянное звуковое поле будет содержать последовательность дифракционных спектров $\varphi_n = \mathrm{Re}\, A_n \exp(i\mathbf{k}_n\mathbf{r} - i\omega_n t)$ на комбинационных частотах $\omega_n = \omega + n\Omega$, $\mathbf{k}_n^t = \mathbf{k}^t + n\mathbf{q}$. В рассматриваемом эффекте вынужденного рассеяния достаточно учесть лишь спектры нулевого и первого порядков ($n = 0, \pm 1$). Падающее и рассеянные звуковые поля возбуждают колебания границы на частотах ω_n. Ограничимся рассмотрением случая, когда $\omega \gg \Omega$. Кроме того, будем считать неровности поверхности раздела малыми и пологими; тогда для нахождения амплитуд дифракционных спектров $A_n \sim (qa)^{|n|} A$ можно пользоваться теорией возмущений по параметру нелинейности $ka \sim qa \ll 1$. Процессами взаимодействия между поверхностными волнами будем пренебрегать.

Звуковое давление, действующее на границу раздела, является билинейной функцией падающего и рассеянных звуковых полей: $p_{зв} \sim \rho(\nabla\varphi)^2{}_{z=\zeta}$. Оно содержит фурье-компоненту на частоте поверхностной волны $(p_{зв})_{\mathbf{q}\Omega} \sim \varphi_\omega^* \varphi_{\omega+\Omega} \sim qa\rho k^2 |A|^2$, являющуюся резонансной вынуждающей силой, которая действует со стороны звукового поля на границу раз-

дела. Прочими нелинейными воздействиями, не носящими резонансного характера, всюду будем пренебрегать. При достаточно большой интенсивности падающего звука поток энергии от поля в поверхностную волну превысит диссипативные потери и в системе возникнет неустойчивость, которая приведет к усилению амплитуды поверхностной волны и рассеянных комбинационных спектров, т. е. к эффекту вынужденного рассеяния*.

Если же на границу раздела сред падают две звуковые волны с частотами ω_1 и ω_2, то возможна генерация поверхностных колебаний на разностной частоте $\Omega = |\omega_1 - \omega_2|$. Звуковое давление в этом случае будет содержать фурье-компоненту на частоте биений между частотами падающих звуковых волн; это давление пропорционально произведению интенсивностей этих волн и играет роль внешней силы, раскачивающей колебания поверхности. Отметим, что хотя этот эффект в принципе беспороговый, в действительности существует порог («порог наблюдения»), который, как и при вынужденном рассеянии на поверхностных волнах, определяется возможностями обнаружения генерируемых поверхностных колебаний на фоне тепловых флуктуаций.

Уравнение потенциального движения сжимаемой жидкости в поле тяжести имеет известный интеграл [6]:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + gz = \int\limits_{\rho^{(0)}}^{\rho(z)} \frac{dp}{\rho(z)}. \tag{1}$$

Здесь φ — потенциал скорости $\mathbf{v} = -\nabla\varphi$, g — ускорение свободного падения, p — давление, $\rho(z) = \rho^{(0)} + \tilde{\rho}$ — плотность жидкости, $\rho^{(0)}$ — невозмущенная плотность; относительное изменение плотности считается малым: $(\tilde{\rho} / \rho^{(0)}) \ll 1$. Ограничиваясь рассмотрением поверхностных волн длиной $\lambda \ll s^2 / g$ $(s = (\partial p / \partial\rho)^{1/2}$ — скорость звука), будем пренебрегать изменением плотности в поле тяжести.

С учетом сделанных предположений уравнение (1) для первой среды принимает вид:

$$\rho_{\mathrm{I}}^{(0)} \frac{\partial\varphi_{\mathrm{I}}}{\partial t} - \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{I}}^{(0)}(\nabla\varphi_{\mathrm{I}})^2 + \rho_{\mathrm{I}}^{(0)} gz = \tilde{p}_{\mathrm{I}} - \frac{1\rho_{\mathrm{I}}^{(0)}}{2s_{\mathrm{I}}^2}\left(\frac{\partial\varphi_{\mathrm{I}}}{\partial t}\right)^2, \tag{2}$$

где $\varphi_I = \varphi + \varphi_{\text{пов}} + \varphi_0^R + \varphi_1^R + \varphi_{-1}^R$ (индекс R означает отраженную волну, $\varphi_{\text{пов}}$ — потенциал, связанный с поверхностной волной), $\tilde{p} = \tilde{\rho}s^2$ — изменение давления в звуковой волне. В уравнении (2) мы ограничились учетом лишь квадратичной нелинейности, так как нелинейные слагаемые более высоких порядков малы по параметру $(\Omega / \omega) \ll 1$ (см. ниже). Второе слагаемое в правой части уравнения (2) связано с изменением плотности жидкости; его можно выразить через потенциал при помощи уравнения непрерывности $\dot{\rho} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$, учитывая, что потенциал φ_I при $ka \ll 1$ и $(\Omega / \omega) \ll 1$ удовлетворяет однородному волновому уравнению $\Box\varphi \equiv (\Delta\varphi - \ddot{\varphi} / s^2) = 0$.

Давление на границе раздела, связанное с поверхностным натяжением, равно разности нормальных компонент тензора плотности потока импульса:

$$\{\Pi_{ik}\}_\zeta n_k \equiv (\Pi_{ik}^{\mathrm{I}} - \Pi_{ik}^{\mathrm{II}})_\zeta n_k = \sigma n_i \Delta_\perp \zeta; \qquad \left(\Delta_\perp \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right), \tag{3}$$

где $\Pi_{ik} = \rho v_i' v_k' + p\delta_{ik}$, σ — коэффициент поверхностного натяжения. В системе координат, движущейся вместе с границей, нормальная компонента

---

* Вынужденное рассеяние на поверхностных волнах возможно и при рассеянии мощного светового пучка на границе раздела жидкостей. Это явление рассматривалось впервые в работах Ф. В. Бункина, А. А. Самохина и М. В. Федорова [2, 3] и независимо в работах А. В. Каца, В. М. Конторовича и одного из авторов [4, 5].

скорости обращается в нуль: $\mathbf{v}'\cdot\mathbf{n}=0$ ($\mathbf{n}\approx\mathbf{e}_z-\nabla\zeta$ — нормаль к поверхности $Z=\zeta$, направленная из первой среды).

Учитывая это, напишем граничные условия на поверхности раздела в виде разностей уравнений (2), (3) и соответственных уравнений для второй среды:

$$\left\{\rho^{(0)}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\rho^{(0)}gz\right\}_\zeta-\sigma\Delta_\perp\zeta=\frac{1}{2}\left\{\rho^{(0)}\left[(\nabla\varphi)^2-\frac{1}{s^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\right]\right\}_\zeta \tag{4}$$

$$\{\nabla\varphi\}_\zeta\cdot\mathbf{n}=0. \tag{5}$$

Выделяя из выражений (4), (5) фурье-компоненты на частоте падающего звука и на комбинационных частотах, выразим амплитуды рассеянных полей через амплитуду падающего поля:

$$A_1{}^R=iaB_1{}^RA,\quad A_1{}^T=iaB_1{}^TA, \tag{6}$$

где

$$B_1{}^R=\frac{\alpha-1}{2}T[\alpha k_{0x}k_{1x}-k_{0z}{}^Tk_{1z}{}^T-\alpha k^2(\alpha-\beta^2)/(\alpha-1)]b_1,$$

$$B_1{}^T=\frac{\alpha-1}{2}T[k_{0x}k_{1x}-k_{0z}{}^Tk_{1z}{}^R-k^2(\alpha-\beta^2)/(\alpha-1)]b_1.$$

Здесь $T=2k_z(\alpha k_z+k_{0z}{}^T)^{-1}$ — коэффициент прохождения звука на основной частоте, $b_1=(\alpha k_{1z}{}^R-k_{1z}{}^T)^{-1}$, $\alpha=\rho_{II}{}^{(0)}/\rho_I{}^{(0)}$, $\beta=s_I/s_{II}$, индекс T означает преломленную волну. Выражения для $A_{-1}{}^R$ и $A_{-1}{}^T$ получаются из формулы (6) заменой индекса 1 на -1 и амплитуды a — на комплексно-сопряженную.

Уравнение движения для низкочастотных колебаний границы можно получить с помощью обращения известной формулы Грина, связывающей значения функции, которая удовлетворяет уравнению Лапласа, в объеме и на поверхности (см., например, работу [7]):

$$\frac{\partial\varphi(\mathbf{R})}{\partial z}=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{z'=0}\frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}'|}\Delta_\perp\varphi. \tag{7}$$

Дифференцируя выражение (7) по времени и выражая в нем потенциал φ согласно граничным условиям (4), (5) и условию $(d\zeta/dt)=-(\partial\varphi/\partial z)_\zeta$, найдем:

$$\frac{\partial^2\zeta(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}+\frac{1}{2\pi}\int\frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Delta_\perp\left(\frac{\sigma\Delta_\perp}{\rho_{\mathrm{I}}^{(0)}+\rho_{\mathrm{II}}^{(0)}}-g\frac{\rho_{\mathrm{I}}^{(0)}-\rho_{\mathrm{II}}^{(0)}}{\rho_{\mathrm{I}}^{(0)}+\rho_{\mathrm{II}}^{(0)}}\right)\zeta(\mathbf{r}',t)=$$
$$=\frac{-(2\pi)^{-1}}{\rho_{\mathrm{I}}^{(0)}+\rho_{\mathrm{II}}^{(0)}}\int\frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Delta_\perp p_{\text{зв}}(\mathbf{r}',t), \tag{8}$$

где

$$p_{\text{зв}}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{2}\left\{\rho^{(0)}\left[(\nabla\varphi)^2-\frac{1}{s^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\right]-\rho^{(0)}\zeta\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial t}\right\}_{z=0} \tag{9}$$

— звуковое давление на поверхности раздела.

Низкочастотные члены в звуковом давлении возникают из квадратичных слагаемых вида $\varphi_\omega{}^*\varphi_{\omega+\Omega}\sim qa|A|^2$. Слагаемые третьего порядка также содержат низкочастотные фурье-компоненты $\sim\zeta_\omega{}^*\zeta_\Omega\varphi_\omega$, однако, как нетрудно убедиться, их вклад в инкремент мал по сравнению с вкладом квадратичных членов по параметру $(\Omega/\omega)\ll1$, и поэтому в (9) они не выписаны *.

* Учет слагаемых третьего порядка может привести лишь к малому сдвигу частоты $\sim|A|^2$, который в настоящей работе нас интересовать не будет.

Переходя в формуле (8) к фурье-представлению и вводя затухание $\gamma = 2\nu q^2 \ll \Omega$, получим уравнение для $\zeta(\mathbf{q}, t)$ (напомним, что здесь ζ содержит лишь медленную зависимость от времени):

$$\frac{\partial^2 \zeta(\mathbf{q}, t)}{\partial t^2} + 2\gamma \frac{\partial \zeta(\mathbf{q}, t)}{\partial t} + \Omega_0^2(q)\zeta(\mathbf{q}, t) = -\frac{q}{\rho_{\mathrm{I}}^{(0)} + \rho_{\mathrm{II}}^{(0)}} p_{\text{зв}}(\mathbf{q}, t), \qquad (10)$$

где $\Omega_0^2(q) = [gq(\rho_{\mathrm{I}}^{(0)} - \rho_{\mathrm{II}}^{(0)}) + \sigma q^3](\rho_{\mathrm{I}}^{(0)} + \rho_{\mathrm{II}}^{(0)})^{-1}$ — невозмущенный закон дисперсии поверхностных волн, а фурье-компонента звукового давления $p_{\text{зв}}(\mathbf{q}, t)$ представляет собой резонансную вынуждающую силу, действующую на границу раздела; ее амплитуда (см. формулу (26) в приложении) $p_{\text{зв}}(q, t) = iqa\rho k^2 F|A|^2$. Так как звуковое давление в рассматриваемом приближении линейно по амплитуде низкочастотных колебаний границы, уравнение (10) в действительности является однородным. Его решение имеет вид:

$$\zeta(\mathbf{q}, t) = C_1 \exp(-i\Omega_0(q) + \Gamma - \gamma)t + C_2 \exp(i\Omega_0(q) - \Gamma - \gamma)t, \qquad (11)$$

где $C_{1,2}$ — константы, которые можно найти из начальных условий

$$\Gamma = \frac{q^2 k^2 |A|^2 \operatorname{Re} F}{2\Omega_0(q)}. \qquad (12)$$

Как видно из формулы (11), если поступление энергии от звуковой волны превышает диссипативные потери ($|\Gamma| > \gamma$), возникает неустойчивость, и поверхностные флуктуации нарастают с инкрементом $\Omega'' = |\Gamma| - \gamma$.

Порог неустойчивости определяется из условия обращения инкремента в нуль: $\Omega'' = 0$. Переходя в формуле (12) от амплитуд потенциалов к скоростям и учитывая, что $I = \rho s|V|^2$, найдем пороговую интенсивность звука:

$$I_{\text{п}} = \frac{2\Omega_0(q)\rho s \gamma(q)}{q^2 |\operatorname{Re} F|}. \qquad (13)$$

Предположим, что усиление поверхностных колебаний (после превышения порога) начинается от уровня тепловых флуктуаций; их амплитуда $a_T \sim 10^{-10} \div 10^{-12}$ (см. [5]). Согласно формуле (11), за время $t = \tau_y$ поверхностные колебания возрастут в $\exp \Omega'' \tau_y$ раз; чтобы они достигли уровня a_0, который можно зарегистрировать, величина $\Omega'' \tau_y$ должна быть больше некоторого числа $N \sim 10$, которое определяется чувствительностью приемной аппаратуры: $N = |\ln(a_0 / a_T)|$. Из условия $\Omega'' \tau_y = N$ находим:

$$I_{\text{п}} = \frac{2\Omega_0(q)\rho s}{q^2 |\operatorname{Re} F|} \left[\gamma(q) + \frac{N}{\tau_y}\right]. \qquad (14)$$

Как было отмечено в работе [5], неустойчивость при вынужденном рассеянии носит конвективный (пространственно-временной) характер. Это означает, что усиливающаяся во времени поверхностная волна одновременно распространяется вдоль поверхности и за время $\tau_R = R/v(q)$ ($v(q) = \partial\Omega_0(q)/\partial q$ — ее скорость, R — размер звукового пятна) уходит из области усиления. Поэтому время усиления τ_y определяется меньшей из величин: либо длительностью импульса $\tau_{\text{и}}$, либо временем τ_R:

$$\tau_y^{-1} = \tau_{\text{и}}^{-1} + \tau_R^{-1} \qquad (15)$$

Как видно из формул (14), (15), при больших длительностях импульса и больших размерах звукового пятна, когда выполняются условия

$$\tau_{\text{и}} \gg N/\gamma(q), \quad R \gg Nv(q)/\gamma(q), \qquad (16)$$

порог (14) совпадает с (13); если же одно из неравенств (16) не выполняется, выражение для порога существенно изменяется. Так, при коротких импульсах, когда

$$\tau_и \ll N / \gamma(q), \quad \tau_и \ll R / v(q) \tag{17}$$

порог

$$\tau_и I_п = \frac{2(\sigma\rho)^{1/2} sN}{q^{1/2} |\mathrm{Re}\, F|}. \tag{18}$$

При малых апертурах пучка, таких, что

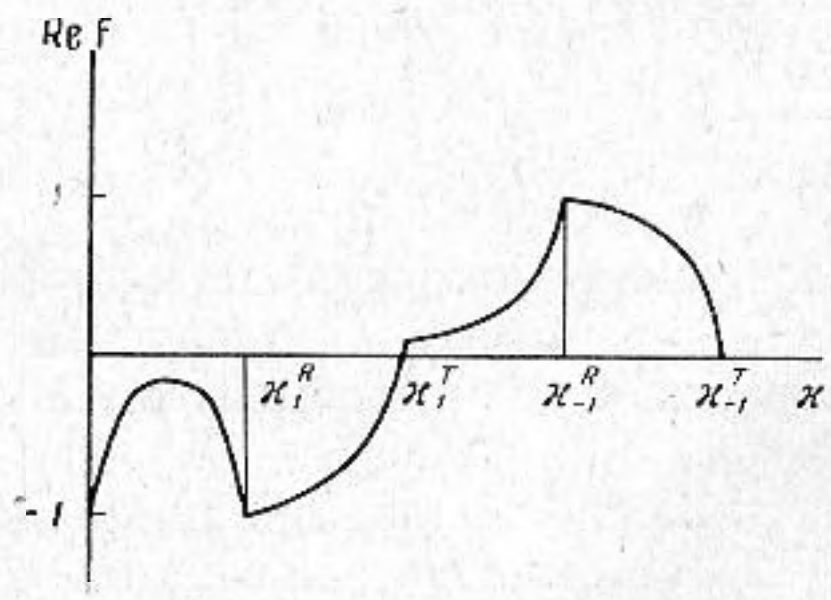
$$R \ll \tau_и v(q), \quad R \ll Nv(q)/\gamma(q) \tag{19}$$

порог

$$I_п = \frac{2\sigma sN}{R|\mathrm{Re}\, F|} \tag{20}$$

В соответствии со сказанным выше выражения (18), (20) естественно называть порогами наблюдения — в отличие от порога неустойчивости (13).

Легко видеть, что при рассеянии длинных импульсов порог $I_п \sim q^{3/2}$ и уменьшается с ростом длины поверхностной волны; рассеяние при этом происходит с минимально возможными $q = q_{\min}$* вблизи направлений зеркального рассеяния. Напротив, при рассеянии коротких импульсов (и пучков с малыми апертурами) порог минимален при больших $q \sim k$. Учитывая поведение $\mathrm{Re}\, F$ при больших q (см. фигуру), нетрудно понять, что порог рассеяния в этих случаях будет минимальным при образовании одной или трех неоднородных звуковых волн.



Оценим порог вынужденного рассеяния на поверхностных волнах для границы воды с воздухом, когда звуковая волна падает на поверхность раздела из жидкости. В этом случае $\beta^2 \gg 1 \gg \alpha$ и выражение (27) для $\mathrm{Re}\, F$ существенно упрощается. При рассеянии длинных импульсов порог минимален для таких q, при которых возникает одна неоднородная звуковая волна; звуковое давление при этом $\mathrm{Re}\, F = \cos^2\theta(1 - \sin\theta)^{1/2}\sin^{1/2}\theta$ и выражение для порога принимает вид $I_п = 4\nu s(\sigma\rho k^3)^{1/2}\sin^{-1/2}\theta(1 + \sin\theta)^{-1}$. При фиксированных параметрах пучка ($\tau_и$ и R) условия (16) приводят к увеличению q и, следовательно, росту порога. Так, при $\tau_и \gg 2\cdot 10^{-1}$ *сек* и $R \gg 2$ *см* $q > 40$ *см*$^{-1}$; минимальная величина порога $I_п^{\min} \sim 3$ *вт/см*^{2} достигается при больших углах падения.

При рассеянии коротких импульсов (см. формулу (17)) минимальная величина порога достигается при таких значениях $q = q_0$, когда возникают три неоднородные звуковые волны: $q_0 = (1 + \sin\theta)k$. Порог наблюдения $\tau_и I_п = 2N(\sigma\rho)^{1/2}s^{3/2}\omega^{-1/2}\cos^{-2}\theta\sin^{-1/2}\theta(1 + \sin\theta)^{-1}$. Из условия (17) следует ограничение на частоту падающего звука: $\omega < \rho s(R/\tau_и)^2\sigma^{-1}(1 + \sin\theta)^{-1}$; учитывая его, можно найти связь между величиной порога и длительностью звукового импульса:

$$I_п \gg \frac{2s(2\nu\sigma^2\rho^2N^3)^{1/4}}{\tau_и^{3/4}\cos^2\theta\sin^{1/2}\theta(1 + \sin\theta)^{1/2}}. \tag{21}$$

Как функция угла падения порог достигает минимума при средних углах падения. Оценка (21) дает для воды: $I_п^{\min} \sim 3{,}6\cdot 10^{-1}\tau_и^{-3/4}$ *вт/см*^{2} (при $\tau_и \ll 2\cdot 10^{-1}$ *сек* и $\Omega \ll \omega < 10^3(R/\tau_и)^2$ *сек*$^{-1}$).

---

* $q_{\min}$ определяется либо размером звукового пятна ($q_{\min} \sim 10/R$), либо возможностями пространственной (или частотной) селекции дифракционных спектров.

Таким образом, численные оценки показывают, что вынужденное рассеяние звука на поверхностных волнах в настоящее время можно наблюдать экспериментально.

Рассмотрим теперь задачу о возбуждении поверхностных колебаний двумя звуковыми волнами, падающими на границу раздела (например, из среды 1); их потенциалы имеют вид плоских волн:

$$\varphi_1 = \mathrm{Re}\, A_1 \exp\,(i\mathbf{k}_1\mathbf{r} - i\omega_1 t), \qquad \varphi_2 = \mathrm{Re}\, A_2 \exp\,(i\mathbf{k}_2\mathbf{r} - i\omega_2 t).$$

При решении этой задачи можно, как и раньше, пользоваться граничными условиями (4), (5). Для фурье-образа возвышения поверхности справедливо уравнение (10), в котором фурье-компонента звукового давления определяет силу, действующую на границу раздела со стороны падающих полей. Звуковое давление определяется формулой (9), в которой, однако, достаточно учесть лишь падающие и рассеянные звуковые поля на частотах ω_1 и ω_2; оно содержит фурье-компоненту на разностной частоте:

$$p_{\text{зв}}(\mathbf{k}_1^t - \mathbf{k}_2^t,\, t) = \rho_{\text{I}} k_1 k_2 P A_1 A_2^* \exp[i(\omega_2 - \omega_1)t]. \tag{22}$$

Здесь $P \sim 1$ — безразмерное давление,

$$P = \frac{\cos\theta_2}{2(\alpha\cos\theta_2 + \xi_2)}\Bigg[\alpha\sin\theta_1\sin\theta_2 + \xi_2\cos\theta_1 - \\ - \frac{2\alpha\cos\theta_1(\sin\theta_1\sin\theta_2 + \xi_1\xi_2)}{\alpha\cos\theta_1 + \xi_1}\Bigg],$$

где $\xi_{1,2} = (\beta^2 - \sin^2\theta_{1,2})^{1/2}$, $\theta_{1,2}$ — углы падения звуковых волн.

Под действием вынуждающей силы (22) происходит возбуждение поверхностных колебаний. Найдем их амплитуду, считая, что звуковые поля включены при $t = 0$. Решая уравнения (10), (22) с начальными условиями $\zeta|_{t=0} = 0$, $\dot{\zeta}|_{t=0} = 0$, $p_{\text{зв}}|_{t<0} = 0$, получим:

$$\zeta(\mathbf{q}, t) = \frac{q}{(\rho_{\text{I}} + \rho_{\text{II}})\,\Omega_0(q)} \int_0^t e^{-\nu t'} \sin[\Omega_0(q)(t - t')]\, p_{\text{зв}}(\mathbf{q}, t')\, dt' \tag{23}$$

где $\mathbf{q} \equiv \mathbf{k}_1^t - \mathbf{k}_2^t$. Из формулы (23) находим амплитуду возвышения поверхности:

$$a = \frac{qP(1 - e^{-\nu t})}{2\rho s\gamma(q)\,\Omega_0(q)}(I_1 I_2)^{1/2}. \tag{24}$$

Минимальная амплитуда поверхностной волны, которая может быть надежно зарегистрирована в настоящее время, $a_0 \sim 10^{-6}$ *см* на частоте $\sim 3\cdot 10^7$ *гц* ($(qa_0)_{\min} \sim 10^{-3}$) [8]. Задавшись этой величиной, можно найти интенсивность звуковых полей, необходимую для раскачки колебаний такой амплитуды. В установившемся режиме (при $\gamma t > 1$) из формулы (24) получаем:

$$(I_1 I_2)_{\text{п}}^{1/2} = \frac{2\rho s\gamma(q)\,\Omega_0(q)}{q^2 P}(qa_0)_{\min}. \tag{25}$$

Это и есть фактически порог наблюдения поверхностных колебаний заданной амплитуды; он минимален для наименьших значений $q = q_{\min}$, которые определяются (как и при вынужденном рассеянии на поверхностных волнах) характерным размером области поверхности, на которой оба звуковых поля отличны от нуля. Кроме того, величина $q_{\min}$ должна превышать неопределенность в величине волнового вектора падающей волны Δk, возникающую из-за угловой расходимости пучка ψ: $\Delta k \sim \psi k$. При $q \sim 10$ *см*$^{-1}$ ($R \sim 1$ *см*, $\psi \sim 10^{-2}$, $\omega < 10^7$ *сек*$^{-1}$) оценка (25) для случая, когда звуковые волны падают из воды на ее границу с воздухом, дает $(I_1 I_2)_{\text{п}}^{1/2} \sim 3\cdot 10^{-4}$ *вт/см*^{2} (почти при нормальном падении звуковых волн).

Нетрудно убедиться в том, что порог наблюдения генерируемых поверхностных колебаний (25) меньше порога неустойчивости (и тем более порога наблюдения вынужденного рассеяния). Так, сравнивая формулы (25) и (13), получаем $(I_1 I_2)_{\text{п}}^{1/2} \sim (qa_0)_{\min} I_{\text{п}}^{\text{неуст}}$ (при одинаковых q).

Авторы благодарны А. В. Кацу и В. М. Конторовичу за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

Приложение

Приведем выражение для звукового давления.

Выделяя в (9) слагаемые, линейные по низкочастотным колебаниям границы, и учитывая выражения для комбинационных спектров (6), звуковое давление можно записать в виде:

$$p_{\text{зв}}(\mathbf{r}, t) = iqa\rho_I k^2 |A|^2 \operatorname{Re} F \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\Omega t), \tag{26}$$

где $F \sim 1$ — безразмерное звуковое давление. Если плоскость падения звуковой волны совпадает с плоскостью xz, так что в силу симметрии задачи $\mathbf{q} = (q_x, 0, 0)$, выражение для $\operatorname{Re} F$ имеет вид:

$$\operatorname{Re} F = \frac{\alpha - 1}{8\varkappa} |T|^2 \operatorname{Re}\{m^2 \Phi_1 + \alpha m (\beta^2 - 1)(\lambda_1{}^R \Phi_2 - \lambda_{-1}{}^R \Phi_3) + [m^4 - \alpha^2 \cos^4\theta + (\alpha - 1)\varkappa^2 (m^2 - \alpha \sin^2\theta)](\Phi_2 - \Phi_3) + \varkappa \sin\theta [2(m^2 + \alpha^2 \cos^2\theta) - \alpha(m^2 + \cos^2\theta)](\Phi_2 + \Phi_3)\}. \tag{27}$$

Здесь θ — угол падения звуковой волны, $\Phi_1 \equiv \lambda_1{}^T - \lambda_1{}^R + \lambda_{-1}{}^R - \lambda_{-1}{}^T$, $\Phi_2 \equiv (\alpha\lambda_1{}^R + \lambda_1{}^T)^{-1}$, $\Phi_3 \equiv (\alpha\lambda_{-1}{}^R + \lambda_{-1}{}^T)^{-1}$, $\varkappa \equiv q / k$, $m^2 \equiv \beta^2 - \sin^2\theta$; λ_j есть безразмерные нормальные компоненты волновых векторов рассеянных полей:

$$\lambda_{\pm 1}{}^R \equiv -k_{\pm 1 z}{}^R / k = (\cos^2\theta \mp 2\varkappa \sin\theta - \varkappa^2)^{1/2},$$
$$\lambda_{\pm 1}{}^T \equiv k_{\pm 1 z}{}^T / k = (\beta^2 - 1 + (\lambda_{\pm 1}{}^R)^2)^{1/2}.$$

Выражение, аналогичное (27), было подробно исследовано в связи с задачей о вынужденном рассеянии света на поверхностных волнах (см. формулу (3.14) и ее анализ в работе [5]). Поэтому здесь мы приведем лишь схематическую зависимость звукового давления $\operatorname{Re} F$ от величины $\varkappa$ (фиг.). Точки $\varkappa_{\pm 1}{}^{R,T}$ определяются из условия возникновения неоднородных звуковых волн: $\lambda_{\pm 1}{}^{R,T}(\varkappa_{\pm 1}{}^{R,T}) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Бреховских. Звуковые волны под водой, обусловленные поверхностными волнами в океане. Физика атмосферы и океана, 1966, **11**, 9, 970—980.
2. Ф. В. Бункин, А. А. Самохин, М. В. Федоров. К теории вынужденного рассеяния света на поверхности жидкости. Тезисы докл. IV Всес. симпоз. по нелинейной оптике. М., Изд-во МГУ, 1968, ВР-1.
3. Ф. В. Бункин, А. А. Самохин, М. В. Федоров. Вынужденное рассеяние света на поверхности жидкости. Письма в ЖЭТФ, 1968, **7**, 11, 431—433.
4. В. К. Гавриков, А. В. Кац, В. М. Конторович. Вынужденное комбинационное рассеяние на поверхностных волнах. Тезисы докл. IV Всес. симпоз. по нелинейной оптике. М., Изд-во МГУ, 1968, ВР-2.
5. В. К. Гавриков, А. В. Кац, В. М. Конторович. Вынужденное рассеяние света на поверхностных волнах, ЖЭТФ, 1970, **58**, 4, 1318—1331.
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. М., Гостехтеориздат, 1953.
7. Ф. Г. Басс. К теории комбинационного рассеяния волн на неровной поверхности. Изв. вузов. Радиофизика, 1961, **4**, 1, 58—66.
8. Ж. Кашье. Нелинейная дифракция при поверхностном нагреве и волнах Рэлея. Тезисы докл. V Всес. конф. по нелинейной оптике. М., Изд-во МГУ, 1970, С7-46.

Институт радиофизики и электроники
Академии наук УССР

Поступила
16 августа 1971 г.