АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIX 1973 Вып. 5

УДК 534.222.2:532.28

ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТИ НА ДИНАМИКУ ЗАХЛОПЫВАЮЩЕЙСЯ ПОЛОСТИ, ДВИЖУЩЕЙСЯ ПОСТУПАТЕЛЬНО

Г. Н. Кузнецов, И. Е. Щекин

Рассмотрено влияние вязкости жидкости на радиальное и поступательное движение нелинейно захлопывающейся полости.

В акустическом и гидродинамическом поле кавитационная полость растет в зоне разрежения и захлопывается в зоне избыточного давления. Одновременно, взаимодействуя с градиентами давления, полость движется поступательно относительно жидкости. Будем полагать, что кавитационный зародыш закритического размера R_{00} вырос в зоне разрежения до максимального радиуса R_0 и приобрел поступательную скорость v_0 в направлении оси oz.

Рассмотрим процесс замыкания этой полости при следующих допущениях, позволяющих получить приближенное аналитическое решение задачи: а) $R_{00} \ll R_0$; следовательно, давление газа при $R = R_0$ пренебрежимо мало по сравнению с давлением пара, поэтому в дальнейшем будем считать полость заполненной только паром; б) влиянием поверхностного натяжения жидкости и плотностью содержимого полости по сравнению с плотностью жидкости ρ можно пренебречь; в) замыкание полости происходит достаточно быстро, и в течение этого времени давление на внешней границе P_∞ остается постоянным. Тогда уравнения, определяющие параметры радиального и поступательного движения кавитационной полости, будут иметь следующий вид:

$$\dot{R} = -\left[\frac{2P_\infty}{3\rho}(\varepsilon - 1) - \frac{8\mu}{\rho R^3}\int_{R_0}^{R} \dot{R}R\,dR + \frac{1}{2R^3}\int_{R_0}^{R} R^2 v^2\,dR\right]^{1/2}, \qquad (1)$$

$$\frac{dv}{dR} + \left(\frac{3}{R} + \frac{k_1}{\dot{R}R^2}\right)v = \frac{k_2 v^2}{\dot{R}R} + \frac{k_3}{\dot{R}}, \qquad (2)$$

где $\varepsilon = \left(\frac{R_0}{R}\right)^3$, $k_1 = \frac{9\mu}{\rho}$, $k_2 = -0{,}3$, $k_3 = -\frac{2}{\rho}(\operatorname{grad} P_\infty)_z$, $\dot{R} = \frac{dR}{dt}$.

Уравнение (1) является модифицированным уравнением Релея, в котором учтено наличие поступательного движения и вязкости жидкости. Уравнение (2) определяет поступательное движение полости при переменном R в весомой вязкой жидкости, в которой внешнее давление $P_\infty = P_0 + \rho g z + P(x, y, z)$ изменяется вдоль траектории движения [1]. Коэффициент сопротивления в уравнении (2) принят в виде $C_d = 0{,}4 + 24/\mathrm{Re}_v$, где $\mathrm{Re}_v = 2Rv\rho/\mu$. Анализ системы (1), (2) показывает, что при достаточно быстром схлопывании определяющими в уравнении (2) являются инерционные и вязкостные члены, а градиентом давления при реальных k_3 можно пренебречь ($k_3 = 0$). В этом случае нелинейное уравнение (2) перехо-

дит при известной зависимости $\dot{R}(R)$ в уравнение Бернулли и может быть проинтегрировано относительно v.

С использованием неполной бэта-функции и ее разложения в гипергеометрический ряд решение уравнения (2) с точностью до первого члена ряда можно написать в виде

$$v = \frac{v_0 \varepsilon A}{1 + 0{,}2 v_0 A \sqrt{\frac{3\rho}{2P_0}(\varepsilon - 1)}}, \tag{3}$$

где

$$A = \exp\left[-\frac{9\nu}{R_0} \sqrt{\frac{3\rho}{2P_0}(1 - \varepsilon^{-1})} \right].$$

Подставляя решение (3) в уравнение (1), мы получим уравнение, определяющее скорость захлопывания паровой полости, движущейся поступательно,

$$\dot{R} = -\left\{ \frac{2P_0}{3\rho}(\varepsilon - 1) + \frac{v_0^2}{2R^3} \int_{R_0}^{R} \frac{R^2 \varepsilon^2 A^2 \, dR}{\left[1 + 0{,}2 v_0 A \sqrt{\frac{3\rho}{2P_0}(\varepsilon - 1)} \right]} \right\}^{1/2}. \tag{4}$$

Для определения экстремальных значений R и $\dot{R}$ проанализируем выражение (4) в двух случаях.

1) $\mathrm{Re}_v = \frac{2Rv}{\nu} < 1$,

$$\dot{R} = -\left[\frac{2P_0}{3\rho}(\varepsilon - 1) + \frac{1}{2} v_0^2 R_0^3 \varepsilon \int_{R_0}^{R} A^2 R^{-4} \, dR \right]^{1/2}. \tag{5}$$

При $R \ll R_0$ можно принять $A^2 \simeq \exp\left[-18 \nu R_0^{-1} \left(\frac{3\rho}{2P_0} \right)^{1/2} \right]$. Тогда

$$\dot{R} = -\left\{ (\varepsilon - 1) \left[\frac{2P_0}{3\rho} - \frac{1}{6} A^2 v_0^2 \varepsilon \right] \right\}^{1/2}. \tag{6}$$

В отличие от релеевской полости паровая полость, движущаяся поступательно, не захлопывается полностью и ее $\dot{R}$ не обращается в бесконечность. Полагая в формуле (6) $\dot{R} = 0$, находим значение минимального радиуса R_-, до которого сомкнется полость при первом захлопывании:

$$R_- = R_0 A^{2/3} \left(\frac{\rho v_0^2}{4P_0} \right)^{1/3}. \tag{7}$$

Подстановка выражения (7) в формуле (3) позволяет получить максимальное значение v_+ при R_-:

$$v_+ = \frac{4P_0}{\rho v_0 A \left(1 + 0{,}2 \sqrt{6 - \frac{3\rho v_0^2 A^2}{2P_0}} \right)}. \tag{8}$$

Дифференцируя по времени равенство (6) и положив $\ddot{R} = 0$, получим выражение для максимального значения $\dot{R}_+$:

$$\dot{R}_+ = -\frac{A v_0}{2\sqrt{6}} \left(\frac{4P_0}{\rho v_0^2 A^2} - 1 \right). \tag{9}$$

Точка перегиба зависимости $R(t)$, при которой $\dot{R} = \dot{R}_+$, будет при

$$R_i = R_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{2P_0}{\rho v_0^2 A^2} \right)^{-1/3}. \qquad (10)$$

Используя зависимость (6), можно найти время, за которое полость достигает минимального размера при первом захлопывании:

$$\theta^* = -\int_{R_0}^{R_-} \left[(\varepsilon - 1) \left(\frac{2P_0}{3\rho} - \frac{v_0^2 A^2 \varepsilon}{6} \right) \right]^{-1/2} dR. \qquad (11)$$

Интеграл (11) является неполным эллиптическим интегралом и может быть приближенно вычислен через гамма-функции [2].

2) $\mathrm{Re}_v = \dfrac{2Rv}{\nu} \gg 1.$

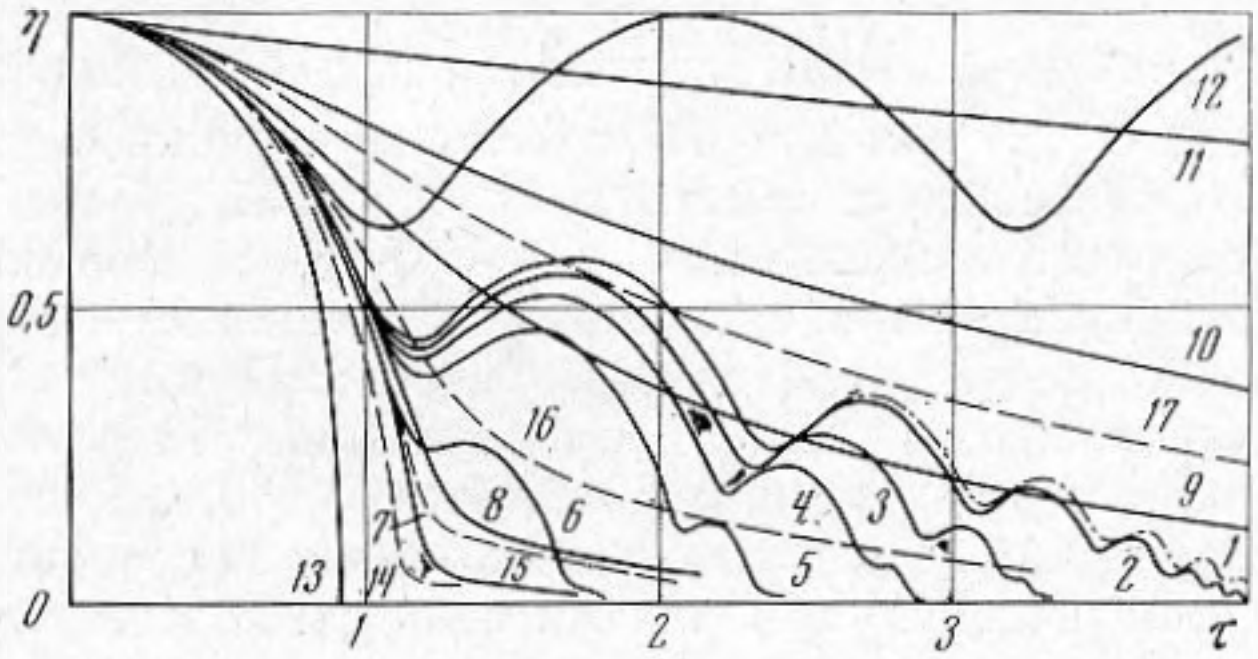
Полагая в формуле (4) $A = 1$, напишем

$$\dot{R} = -\left[\frac{2P_0}{3\rho}(\varepsilon - 1) + \frac{1}{2} v_0^2 R_0^3 \varepsilon \int_{R_0}^{R} R^{-4} \left(1 + \frac{0{,}2 v_0 \varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\dfrac{2P_0}{3\rho}}} \right)^{-2} dR \right]^{1/2}. \qquad (12)$$

Учитывая, что в фазе сжатия $R_0 \gg R$, и введя $B = 0{,}2 v_0 R_0^{3/2} (2P_0 / 3\rho)^{-1/2}$, получим

$$\dot{R} = -\left\{ \frac{2P_0}{3\rho}(\varepsilon - 1) + \frac{1}{3} v_0^2 R_0^3 \varepsilon \left[\frac{L - K}{BKL} - \frac{1}{B^2} \ln \frac{K\varepsilon^{1/2}}{L} \right] \right\}^{1/2}, \qquad (13)$$

где $K = R^{3/2} + B$, $L = R_0^{3/2} + B$. Из выражений (3) и (13) величины R_-, R_i, $\dot{R}_+$, v_+ могут быть определены только численно. Формулы, полученные



Фиг. 1

выше, при $A = 1$, $B = 0$ определяют параметры движения паровой полости, движущейся поступательно в невязкой жидкости. При $v_0 = 0$, $C_d = 0$ они тождественно переходят в формулы Релея для неподвижной полости.

Для численного интегрирования система уравнений (1.2) при принятых упрощениях была приведена к безразмерному виду:

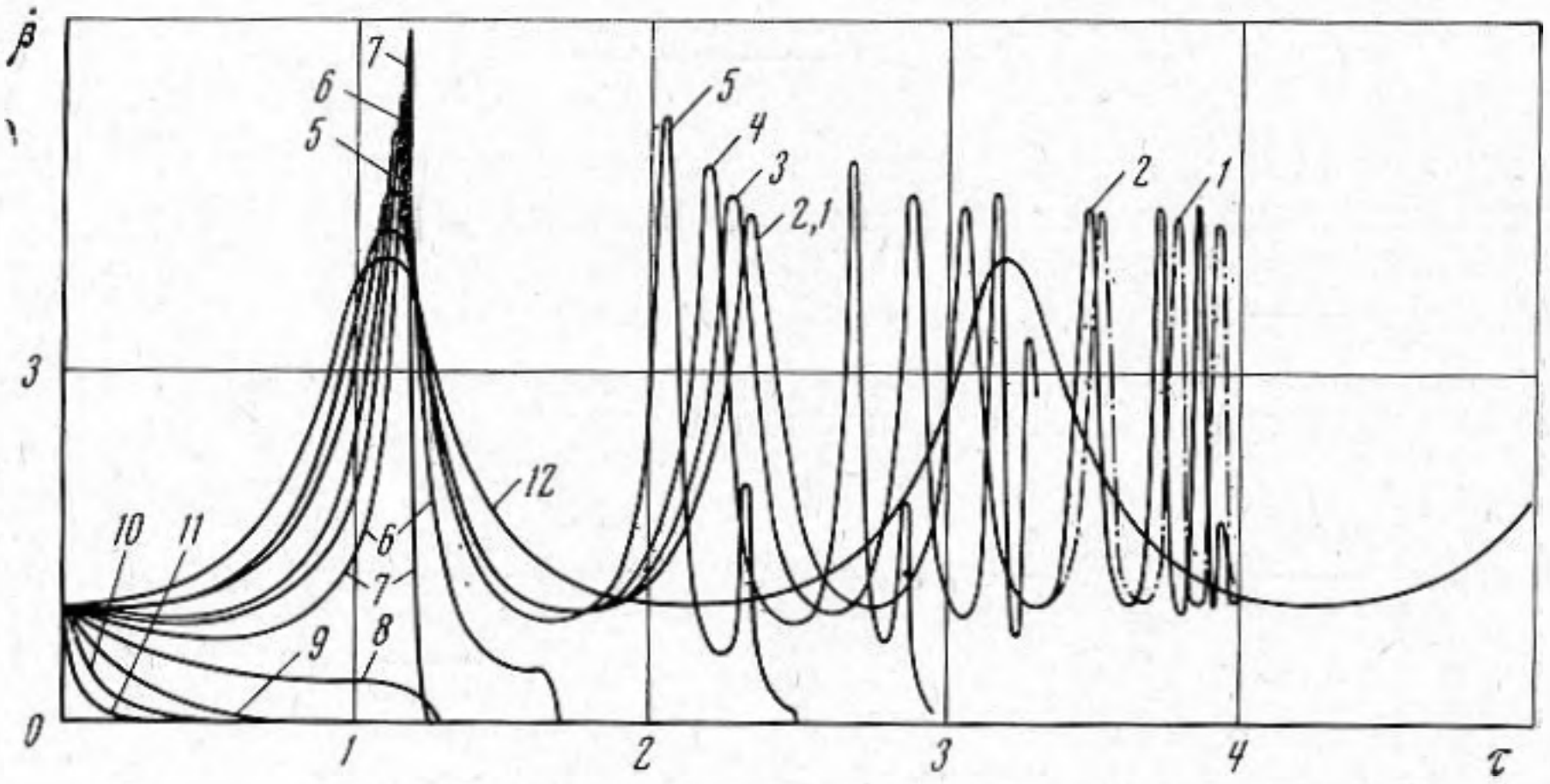
$$\ddot{\eta} + \frac{3}{2}\frac{\dot{\eta}^2}{\eta} + \frac{4M\dot{\eta}}{\eta^2} - \frac{\dot{\beta}^2}{4\eta} + \frac{1}{\eta} = 0, \qquad (14)$$

$$\ddot{\beta} + \left(3\frac{\dot{\eta}}{\eta} + \frac{9M}{\eta^2} \right) \dot{\beta} + \frac{0{,}3}{\eta} \dot{\beta}^2 + 2\varkappa = 0, \qquad (15)$$

где $\beta = z / R_0$ — безразмерная координата расположения центра пузырька, $\eta = R / R_0$ — безразмерный радиус пузырька, $\tau = t / R_0 \sqrt{P_0 / \rho}$ — безразмерное время, $M = \mu / R_0 \sqrt{\rho P_0}$ — безразмерный коэффициент вязкости, $\varkappa = \rho k_3 R_0 / P_0$ — безразмерный параметр, характеризующий постоянный гра-

диент давления, $\dot{\beta} = d\beta / d\tau$ – безразмерная скорость поступательного движения.

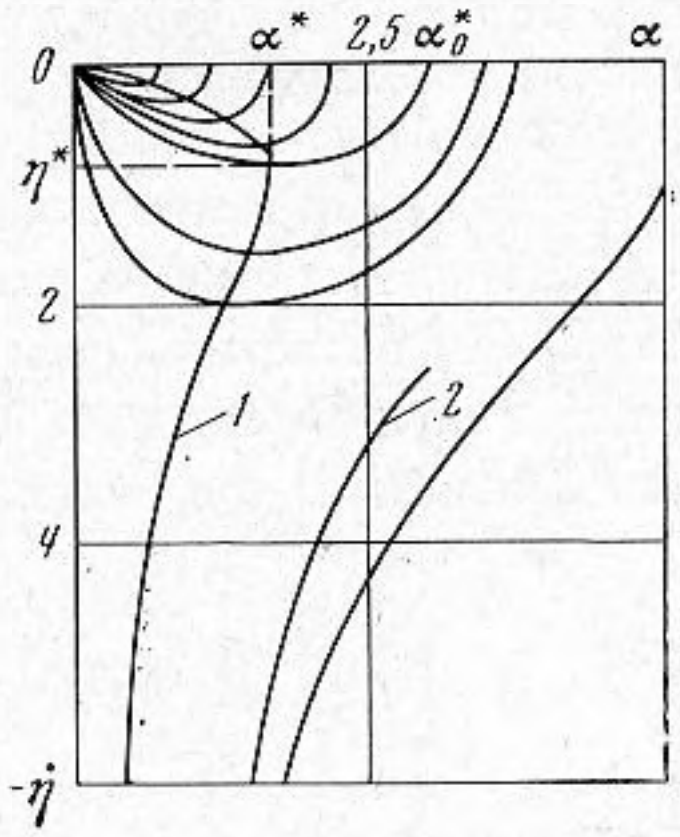
Численное интегрирование системы уравнений (14), (15) и исследование решений при $\varkappa = 0$, $\dot{\beta}_0 \neq 0$ показало, что характер зависимостей $\eta(\tau)$, $\dot{\eta}(\tau)$ и $\dot{\beta}(\tau)$ при постоянном $\dot{\beta}_0$ изменяется принципиальным образом в зависимости от величины безразмерной вязкости M. На фиг. 1, 2 сплошными



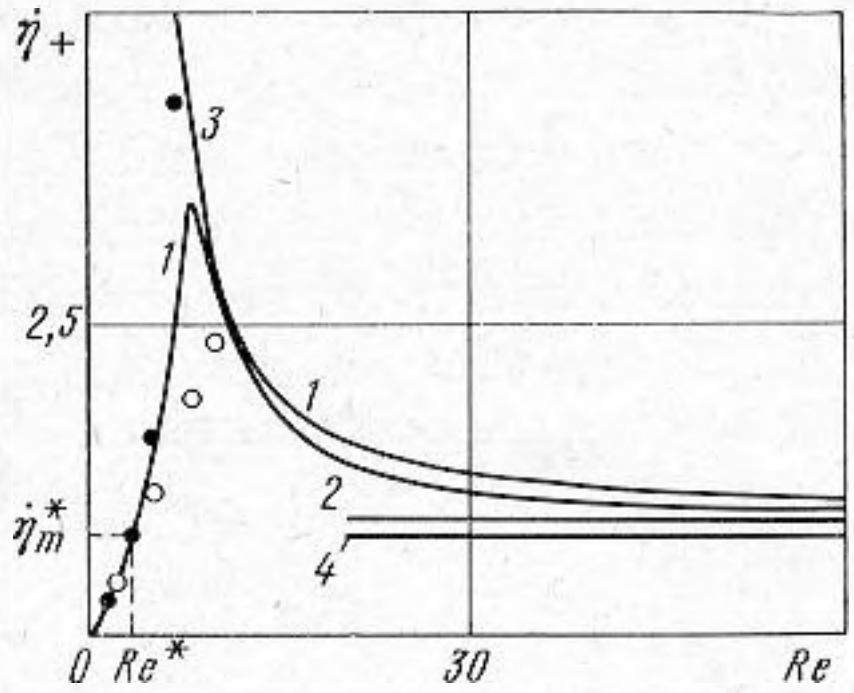
Фиг. 2

линиями представлены типичные семейства $\eta(\tau)$ и $\dot{\beta}(\tau)$, рассчитанные при значении $\dot{\beta}_0 = 1$. Кривые *1–11* получены соответственно при $M = 2 \cdot 10^{-6}$; $5 \cdot 10^{-4}$; $5 \cdot 10^{-3}$; 10^{-2}; $2 \cdot 10^{-2}$; $5{,}5 \cdot 10^{-2}$; 0,1; 0,2; 0,5; 1; 4. Кривые *12* соответствуют $M = 0$, $C_d = 0$ (идеальная жидкость). Кривая *13* является решением Релея для $M = 0$, $\dot{\beta}_0 = 0$. Семейство штриховых кривых *14–17* получено интегрированием уравнения (14) при $\dot{\beta}_0 = 0$ (полость неподвижна) для значений $M = 0{,}15$; 0,2; 0,3; 0,7. Следует отметить, что решения уравнения (14) при $M = 0{,}5$; 1; 4 практически совпадают с кривыми *9–11*, поскольку, как это видно из фиг. 2, поступательная скорость при больших M быстро обращается в нуль из-за диссипации кинетической энергии. При $M < 5 \cdot 10^{-4}$ значения $\eta(\tau)$, $\dot{\beta}(\tau)$ не зависят от величины M, поскольку поступательное движение осуществляется при текущих $\mathrm{Re}_v \gg 1$ и $C_d = 0{,}4$. Диссипированная кинетическая энергия полностью восстанавливается за счет потенциальной, переходящей в кинетическую при сжатии полости. В этом случае величины $\dot{\eta}_+$ и $\dot{\beta}_+$ не зависят от номера пульсаций и вид функций η и $\dot{\beta}$ полностью определяется $\dot{\beta}_0$. При $\dot{\beta}_0 > 2$ полость вначале растет, при $\dot{\beta}_0 < 2$ — сжимается. В обоих случаях при $M < 5 \cdot 10^{-4}$, $C_d = 0$ полость нелинейно пульсирует вокруг равновесного радиуса $\eta_0' = (1/2 \dot{\beta}_0)^{1/3}$. При $M = 0$, $C_d = 0$, $\dot{\beta}_0 = 2$ полость перемещается поступательно с постоянной скоростью, не изменяя своего размера $\eta_0' = \eta_0 = 1$. При $6 \cdot 10^{-2} \geqslant M \geqslant 5 \cdot 10^{-4}$ радиус полости пульсирует во времени, уменьшаясь в среднем по мере диссипации кинетической энергии. При этом характерно, что при данных значениях M диссипация происходит, согласно уравнению (15), из-за наличия вязкостного сопротивления поступательному движению. При достаточно малом $\eta(\tau)$ колебательное движение вырождается в апериодическое и η стремится к нулю при $\tau \to \infty$. Величина $\dot{\beta}$ изменяется в соответствии с пульсацией $\eta(\tau)$ и сохраняет постоянные значения $\dot{\beta}_+$ до тех пор, пока сохраняется постоянство отношения i-го максимума η_+ к i-му минимуму η_-. Большим значениям M соответствуют большие величины $\dot{\beta}_+$, однако минимальное значение $\dot{\beta}$ при периодических пульсациях не зависит от M и равно $\dot{\beta}_0$. При

дальнейшем увеличении безразмерной вязкости ($M > 0{,}1$) скорость поступательного движения из-за диссипации энергии уменьшается быстрее, чем она растет из-за сжатия пузырька. При медленном сжатии полости на кривой $\dot{\beta}(\tau)$ появляется характерный прогиб (фиг. 2, кривая 7), при еще большем M кинетическая энергия поступательного движения полностью гасится и полость сжимается в несжимаемой вязкости жидкости практиче-



Фиг. 3



Фиг. 4

ски как неподвижная. При этих значениях M зависимость $\eta(\tau)$ определяется уравнением (14), причем величина $\dot{\eta}$ при больших M имеет экстремум, а радиус η после точки перегиба, соответствующей $\dot{\eta}_+$, монотонно стремится к нулю.

Рассмотрим подробнее последнее обстоятельство. Решение уравнения (14) для таких M, что возможно значение $\dot{\eta} = 0$, напишем в виде

$$\dot{\eta}_+ = (-4M \pm \sqrt{16M^2 - 6\eta_i^2}) \,/\, 3\eta_i. \qquad (16)$$

Анализ зависимости $\dot{\eta}(\eta_i)$ при двух предельных случаях ($M \to \infty$, $\eta_i \to 1$, $\dot{\eta}_+ \to 0$ и $M \to 0$, $\eta_i \to 0$, $\dot{\eta}_+ \to \infty$) показывает, что в первом случае из физических соображений в выражении (16) необходимо брать знак плюс, во втором — знак минус. Из условия непрерывности решения $\dot{\eta}_+(\eta_i, M)$ следует, что критическое значение M, при котором происходит смена знака, находится при значении дискриминанта $D = 16M^2 - 6\eta_i^2 = 0$. Дальнейший анализ уравнения (14) мы выполним на фазовой плоскости, для чего введем текущее число Рейнольдса $\alpha = \eta / M$. Тогда уравнение (14) в новых переменных примет вид

$$\frac{d\dot{\eta}}{d\alpha} + \frac{3}{2}\frac{\dot{\eta}}{\alpha} + \frac{1}{\alpha\dot{\eta}} + \frac{4}{\alpha^2} = 0. \qquad (17)$$

Изоклину горизонтальных касательных будем искать из условия $d\dot{\eta} / d\alpha = 0$. В этом случае

$$\alpha = -4\left(\frac{3}{2}\dot{\eta} + \frac{1}{\dot{\eta}}\right)^{-1}. \qquad (18)$$

Отсюда видно, что при $\dot{\eta} \gg 1$ $\alpha \simeq -8 / 3\dot{\eta}$, при $\dot{\eta} \ll 1$ $\alpha \simeq -4\dot{\eta}$. Иными словами, при малых $\dot{\eta}$ зависимость $\dot{\eta}(\alpha)$ аппроксимируется прямой линией, при больших — гиперболой. При $\dot{\eta}^* = -\sqrt{2/3}$, $\alpha^* = 2\sqrt{2/3}$ выражение (18) имеет экстремум (фиг. 3, кривая 1). Изоклины вертикальных касательных получим из условия $d\dot{\eta} / d\alpha \to \infty$. Из формулы (17) видно, что это может быть при $\alpha \to 0$ или при $\dot{\eta} \to 0$. В первом случае изоклина совпадает с осью ординат, но направлена вверх, во втором случае изоклинами являются вертикальные отрезки, пересекающие ось абсцисс при $\dot{\eta} = 0$ и направленные

вниз. Для выяснения знака $d\dot{\eta}/d\alpha$ внутри и вне изоклины 1 исследуем равенство

$$\frac{d\dot{\eta}}{d\alpha} = k = -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{3}{2}\dot{\eta} + \frac{1}{\dot{\eta}} + \frac{4}{\alpha}\right). \tag{19}$$

Отсюда с учетом формулы (18) и того обстоятельства, что $\dot{\eta} < 0$, следует, что справа от изоклины 1 при изменении α для удовлетворения равенства (19) k должно быть положительным, в области слева от этой изоклины — отрицательным. Это означает, что существует класс решений, выходящих из точек $\alpha_0 \neq 0$, $\dot{\eta}_0 = 0$, которые после пересечения изоклины 1 изменяют знак $d\dot{\eta}/d\alpha$ на обратный. Следовательно, величина $\dot{\eta}$, достигаемая на этой изоклине, оказывается максимальной, после которой $\dot{\eta}$ убывает. Значение α, при котором $\dot{\eta} = \dot{\eta}_+$, является точкой перегиба зависимости $\dot{\eta}(\alpha)$. Таким образом, для малых $\dot{\eta}_+$ (большие M) и больших $\dot{\eta}_+$ (малые M) справедливы соотношения

$$\dot{\eta}_+{}' = -\frac{\eta_i}{4M}, \tag{20}$$

$$\dot{\eta}_+{}'' = -\frac{8M}{3\eta_i}. \tag{21}$$

Соответственно из условия равенства дискриминанта D нулю определяются критические значения M^* и $\dot{\eta}_+{}^*$:

$$M^* = \frac{\sqrt{6}}{4}\eta_i^*, \tag{22}$$

$$\dot{\eta}_+{}^* = -\frac{4M^*}{3\eta_i^*}. \tag{23}$$

Подставляя выражение (22) в формулу (23), получаем значение $\dot{\eta}_+{}^* = -\sqrt{2/3}$. Формируя из выражения (22) $\alpha^* = \eta_i^*/M^*$, мы получаем $\alpha^* = 2\sqrt{2/3}$, откуда следует, что экстремальное значение на изоклине 1 (фиг. 3) соответствует равенству $D = 0$ и смене знака в выражении (16) перед $\sqrt{D}$.

Удобно рассмотреть обращенное уравнение (17) в виде

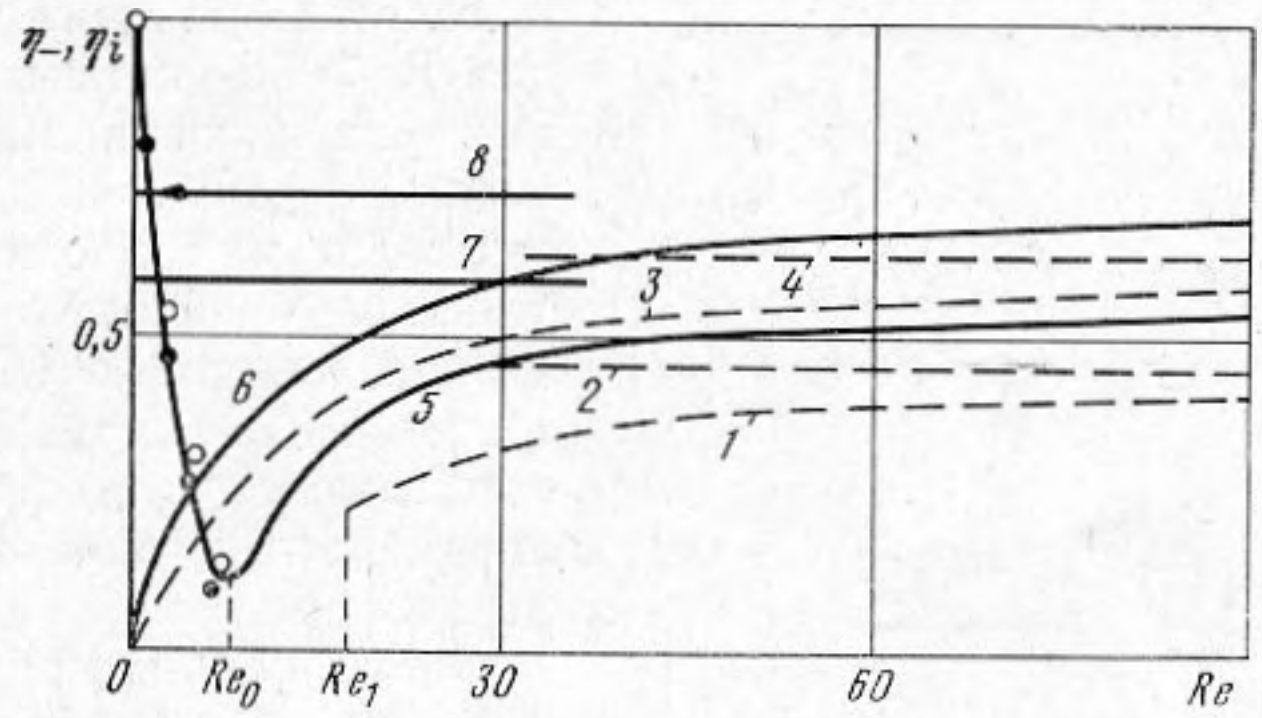
$$\frac{d\alpha}{d\dot{\eta}} = -\frac{2\alpha^2\dot{\eta}}{3\alpha\dot{\eta}^2 + 2\alpha + 4\dot{\eta}}. \tag{17'}$$

Из анализа уравнения (17′) видно, что изоклина вертикальных касательных $\alpha = 0$ является его решением. Применяя условие Липшица, можно доказать единственность этого решения, что позволяет сделать вывод об отсутствии интегральных траекторий, заканчивающихся на оси $\alpha = 0$ в точках $\dot{\eta} \neq 0$. Следовательно, все интегральные кривые, пересекающие изоклину 1, независимо от α_0 асимптотически устремляются в узловую точку с координатами $\alpha = 0$, $\dot{\eta} = 0$, причем $\alpha \to 0$ и $\dot{\eta} \to 0$ при $\tau \to \infty$.

Однако существует класс решений, не пересекающих изоклину 1. Как это было установлено в работе [3], можно найти сепаратриссу, разделяющую решения на «асимптотические» и «захлопывающиеся». На нашей фазовой плоскости асимптотой сепаратриссы при $\dot{\eta} \to \infty$ является гипербола $\dot{\eta} = -8/\alpha$, лежащая вне изоклины 1 (кривая *2*). Для этого класса решений значения $\frac{d\dot{\eta}}{d\alpha}$ всегда не равны нулю и экстремума зависимости $\dot{\eta}(\alpha)$ не существует. Характерно, что $d\dot{\eta}/d\alpha$ для этого класса решений всегда положительно, а $\dot{\eta} \to \infty$ при $\alpha \to 0$, всегда оставаясь справа от изоклины 1.

На фиг. 4 приведены зависимости $\dot{\eta}_+(\mathrm{Re})$, где $\mathrm{Re} = 1/M$, рассчитанные

различными способами. Кривая *1* получена в результате численного интегрирования системы (14, 15) при $\varkappa = 0$. Кривая *2* является асимптотой для кривой *1* при $\mathrm{Re} \to \infty$ и вычислена при $M = 0$, $C_d = 0{,}4$. Кривая *3* рассчитана по формуле (9) с учетом стоксовского сопротивления поступательному движению. Если в формуле (9) положить $A = 1$, то можно определить η_+ для идеальной жидкости (кривая *4*). Из сравнения полученных зависимо-



Фиг. 5

стей следует, что для заданного $\dot{\beta}_0 = 1$ при $\mathrm{Re} = 8 \div 60$ стоксовское сопротивление существенно. Решения при $M = 0$, $C_d = 0{,}4$ практически совпадают с решениями для идеальной жидкости. При $\mathrm{Re} < 8$ поступательное движение быстро затухает и зависимость $\dot{\eta}(\mathrm{Re})$ может быть найдена по уравнению (14) (черные кружочки).

Для малых Re ($\mathrm{Re} < 3$) удалось определить аппроксимирующую численные значения зависимость для $\dot{\eta}_+(\mathrm{Re})$: $\dot{\eta}_+ = \delta\,\mathrm{Re}/4$, где $\delta = 0{,}9-1$. На фиг. 4 светлыми кружками обозначены значения $\dot{\eta}_+$, полученные по этой формуле. Если данное выражение подставить в уравнение (14) или (18), можно найти приближенную формулу для точки перегиба η_i:

$$\eta_i \simeq \frac{32\delta}{3\delta^2\,\mathrm{Re}^2 + 32}. \tag{24}$$

В этом случае из условия $D = 0$ легко находится критическое начальное число Re^*, при котором зависимость $\dot{\eta}(\alpha)$ имеет экстремум: $\mathrm{Re}^* = 1/M = 4/\delta\sqrt{2/3}$. Соответственно значение радиуса $\eta_i^* = \delta/2 \simeq 0{,}5$; $M^* \sim 0{,}3$; $\mathrm{Re}^* \sim 3$ (фиг. 1, кривая *16*).

Численное исследование показало, что граничное значение числа Re_0, при превышении которого определяющими становятся вязкостные члены в уравнении (15), зависит от значения $\dot{\beta}_0$. Эта связь приближенно может быть установлена из равенства значений $\dot{\eta}_+$, определяемых соответственно по уравнениям (9) и (14). После упрощения мы получим выражение, из которого при заданных $\dot{\beta}_0$ можно установить Re_0:

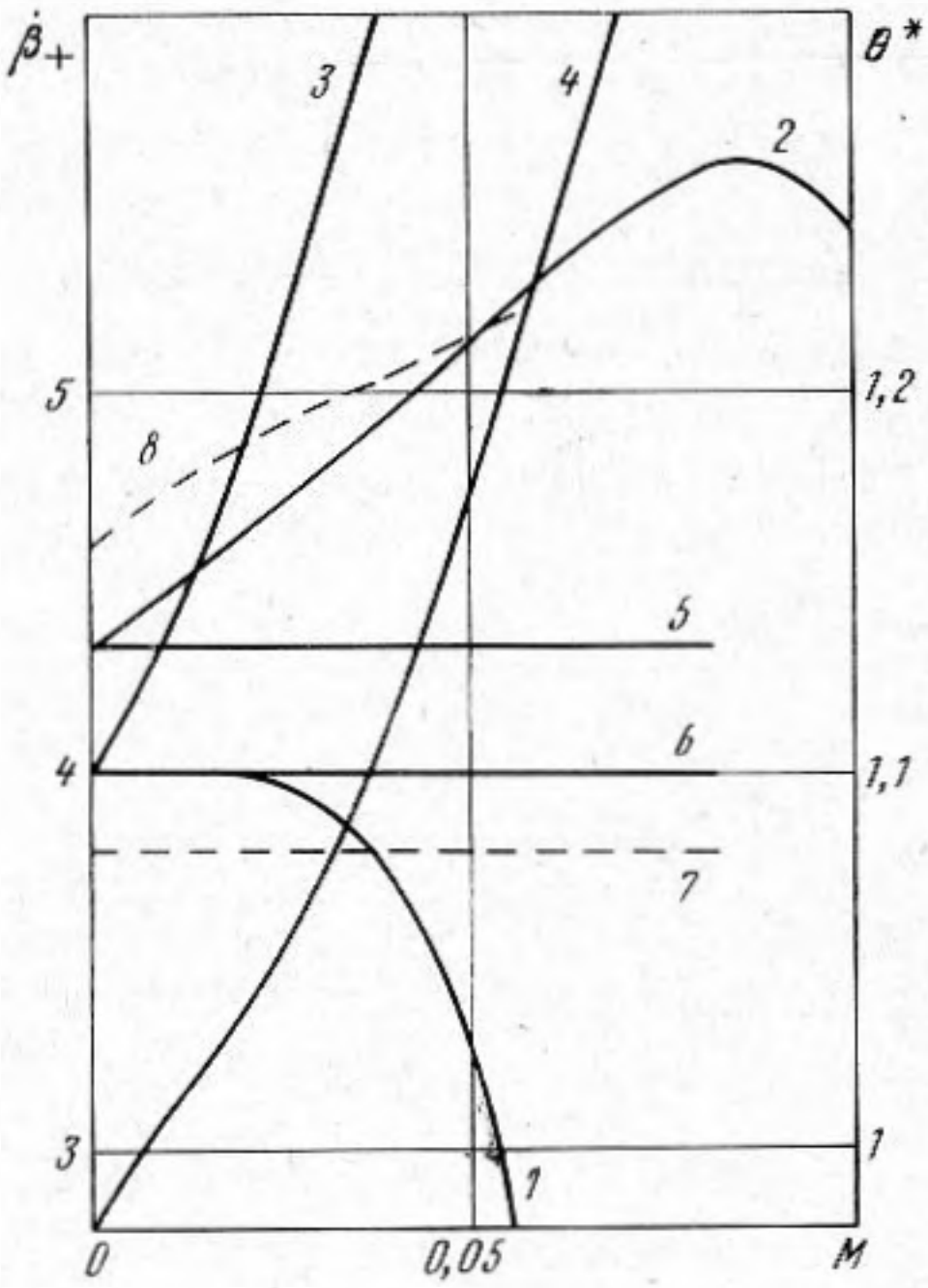
$$2\dot{\beta}_0^2 \exp\left(-\frac{11}{\mathrm{Re}_0}\right) + \sqrt{6}\,\mathrm{Re}_0\,\dot{\beta}_0 - 8\exp\left(\frac{11}{\mathrm{Re}}\right) = 0. \tag{25}$$

Аналогичное по смыслу приближенное соотношение может быть получено из условия равенства радиусов η_i, определяемых по формулам (10) и (24):

$$2\dot{\beta}_0^2\,(3\delta^2\,\mathrm{Re}_0^2 + 32)^3 = (32\delta)^3\left[\dot{\beta}_0^2 + 4\exp\left(\frac{22}{\mathrm{Re}_0}\right)\right]. \tag{26}$$

Обе формулы дают близкие между собой, хорошо согласующиеся с численными расчетами результаты.

На фиг. 5 сплошными линиями представлены зависимости точки перегиба $\eta_i(\mathrm{Re})$, штриховыми — зависимости минимального радиуса после первого сжатия $\eta_-(\mathrm{Re})$. Кривые *1, 5* получены интегрированием системы (14, 15) при общем законе сопротивления поступательному движению. Если положить в этих уравнениях $M = 0$, $C_d = 0{,}4$, то мы получим асимптотические значения η_i и η_-, не зависящие от числа Re и близкие к точным численным решениям для $\mathrm{Re} > 60$ (кривые *2, 7*). Значения η_- и η_i, вычисленные аналитически по формулам (7) и (10) при стоксовском сопротивлении, представлены кривыми *3* и *6*. Для идеальной жидкости ($M = 0$, $C_d = 0$) значения η_- и η_i (кривые *4, 8*) оказываются существенно преувеличенными по сравнению с точными решениями.



Фиг. 6

Из сравнения кривых *1, 5* и *3, 6* следует, что формулы (7), (10) качественно верно описывают тенденцию изменения η_i и η_- при уменьшении Re лишь до некоторых критических значений Re_0 и Re_1, зависящих от $\dot\beta_0$. Причиной этого является существенность при $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_0$ и Re_1 вязкостного члена в уравнении (14), который формулами (7), (10) не учитывается. Для значения $\dot\beta_0 = 1$ кривая *5* обрывается при $\mathrm{Re}_1 = 17{,}5$. При $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_1$ диссипация энергии столь велика, что η_- отсутствует. При $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_0$ и при условии, что $\mathrm{Re}_0 > \mathrm{Re}^*$, зависимость $\eta_i(\mathrm{Re})$ приближенно определяется формулой (24). Значения η_i, рассчитанные по этой формуле (светлые кружочки), хорошо согласуются с величинами η_i, определенными численно по уравнению (14) при $\dot\beta_0 = 0$ (зачерненные кружочки). В частности, видно, что при $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}^* = 3$, $\eta_i^* = \delta / 2 \simeq 0{,}5$.

На фиг. 6 сплошными линиями представлены зависимости максимальной скорости $\dot\beta_+(M)$, определенные различными способами. Штриховые кривые являются зависимостями $\theta^*(M)$. Кривые *1* и *2* получены численным интегрированием системы (14), (15) при $\dot\beta_0 = 1$ и различных M. Первая кривая иллюстрирует зависимость $\dot\beta_+$ от M, взятую при $\eta = \eta_-$, т. е. при минимальном значении радиуса. Это кривая обрывается сразу же после прекращения пульсационного режима $\eta(\tau)$. Характерно, что в отличие от случая идеальной жидкости абсолютный максимум $\dot\beta_+$ достигается не при $\eta = \eta_-$, а раньше — при η, несколько большей η_-. Причиной этого является влияние вязкости жидкости на величину текущей $\dot\beta$. Если в уравнении (15) положить $\ddot\beta = 0$, то для $\dot\beta_+$ мы получим соотношение

$$\dot\beta_+ = 10\dot\eta' + 30\frac{M}{\eta'}, \qquad (27)$$

где η' и $\dot\eta'$ — радиус полости и скорость движения ее границ в момент достижения $\dot\beta = \dot\beta_+$. Сравнение кривой *2* с численными значениями $\dot\eta'$ показывает, что можно принять $\dot\beta_+ \simeq 10\dot\eta'$.

Кривые *3* и *4* вычислены по формуле (8) для $\eta = \eta_-$. Кривая *3* получена в стоксовском приближении. Если сохранить зависимости от Re, т. е. η_- определить из стоксовского приближения (формула 7), а при определении $\dot{\beta}_+$ принять полное сопротивление C_d, то результаты будут иными (кривая *4*). Кривая *5* получена в приближении $C_d = 0{,}4$; $M = 0$, кривая *6* вычислена для идеальной жидкости. Из сравнения кривых следует, что стоксовское приближение неудовлетворительно определяет зависимость $\dot{\beta}_+(M)$, поскольку текущее число Re_v, определенное по поступательному движению, всегда существенно больше единицы:

$$\mathrm{Re}_v = \frac{2Rv}{\nu} \simeq \frac{2R_0v_0}{\nu}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \gg 1. \qquad (28)$$

Однако пренебречь величиной M в уравнениях (14), (15) нельзя, так как вязкостная диссипация энергии существенно влияет на величину $\dot{\beta}_+$.

Кривые *7* (идеальная жидкость) и *8* ($M \neq 0$) характеризуют изменение безразмерного времени сжатия полости до $\eta = \eta_-$, кривая *8* определена в результате численного интегрирования системы (14), (15), кривая *7* — по формуле (11).

В результате выполненного исследования установлено, что зависимости $\eta(\tau)$, $\dot{\eta}(\tau)$, $\dot{\beta}(\tau)$ в вязкой жидкости существенно отличны от аналогичных зависимостей в идеальной жидкости. Вид этих зависимостей в значительной мере определяется величиной безразмерной вязкости M. При $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_0$ влиянием поступательного движения на радиальные пульсации можно пренебречь. Полученные аналитические соотношения могут быть использованы для оценки параметров движения захлопывающейся и движущейся поступательно полости в вязкой жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Ильичев, А. А. Канзеба, Г. Н. Кузнецов, А. Т. Листров. Движение газового пузырька в гидродинамическом поле обтекаемого тела. Тр. Акуст. ин-та АН СССР, 1969, вып. 6, 136—144.
2. О. В. Воинов, А. М. Головин. Уравнение Лагранжа для системы пузырей изменяющихся радиусов в жидкости малой вязкости. Изв. АН СССР. Сер. «Механика жидкости и газа», 1970, 3, 117—123.
3. Е. И. Забабахин. Заполнение пузырьков в вязкой жидкости. Прикл. матем. и механ., 1960, **24**, вып. 6, 1129—1131.

Акустический институт
Академии наук СССР
Сухумский филиал

Поступила
20 августа 1972 г.