УДК 534.222.2

САМОВОЗДЕЙСТВИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН В СРЕДЕ С ПУЗЫРЬКАМИ ВОЗДУХА

Е. М. Воробьев, Е. А. Заболотская

Вода с пузырьками воздуха обладает высокой нелинейностью и дисперсией. При распространении ограниченного звукового пучка в такой среде должны иметь место эффекты самовоздействия, аналогичные тем, что наблюдаются в нелинейной оптике. На возможность самофокусировки интенсивных звуковых волн указано в работе [1].

Оценим самовоздействие звуковых волн, распространяющихся в виде ограниченного пучка в среде с равномерно распределенными воздушными полостями. Полная система уравнений, описывающая этот процесс, состоит из уравнений гидродинамики и уравнения движения одиночного пузыря. Если частота волны сравнима или много ниже собственной частоты колебаний пузырька, то нелинейность, обусловленная движением воздушной полости, значительно превосходит гидродинамическую нелинейность. В этом случае уравнения гидродинамики можно считать линейными и свести их к волновому уравнению

$$\Delta P = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \rho_0 n \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}. \tag{1}$$

Здесь введены обозначения: $P(\vec{r}, t)$ – возмущение давления в среде, $V(\mathbf{r}, t)$ – отклонение объема воздушной полости от равновесного объема V_0, c_0 – скорость распространения звука в воде, ρ_0 – плотность воды, n – концентрация пузырьков.

В предположении малости колебаний пузырька уравнение Рэлея с точностью до членов $(V/V_0)^3$ можно записать в виде

$$\ddot{V} + \omega_0^2 V - \alpha_0 V^2 - \beta_0 (2\ddot{V}V + \dot{V}^2) + \alpha V^3 + \beta (V^2\ddot{V} + \dot{V}^2 V) = -\varepsilon P, \tag{2}$$

где $\omega_0^2 = 3\gamma P_0/\rho_0 R_0^2$ – собственная частота колебаний воздушной полости, γ – показатель адиабаты в уравнении состояния, P_0 – равновесное давление в среде, R_0 – равновесный радиус пузырька, $\alpha_0 = (\gamma+1)\omega_0^2/2V_0$, $\beta_0 = 1/6V_0$, $\alpha = (\gamma+1)(\gamma+2)\omega_0^2/6V_0^2$, $\beta = 2/9V_0^2$, $\varepsilon = 4\pi R_0/\rho_0$. Точками в уравнении (2) обозначены производные по времени.

Допустим, что среда занимает полупространство $x>0$, а на границе среды возбуждается гармонический сигнал

$$P_{x=0} = A(y, z)\cos\omega t.$$

Дисперсионные свойства среды позволяют записать решения уравнений (1) и (2) в виде квазиплоской волны основной частоты ω, распространяющейся вдоль оси x

$$P = \mathrm{Re}\,\{A(\mu x, \sqrt{\mu}y, \sqrt{\mu}z)\exp[i(\omega t - k_0 x)]\}, \tag{3}$$

$$V = \mathrm{Re}\,\{B(\mu x, \sqrt{\mu}y, \sqrt{\mu}z)\exp[i(\omega t - k_0 x)]\}, \tag{4}$$

где μ – малый безразмерный параметр, $k_0 = \dfrac{\omega}{c_0}$. Действительно, вторая гармоника, образующаяся из-за нелинейности, мала. Ее амплитуда не превышает 0,1 амплитуды основной волны при $\omega \sim 0{,}5\omega_0$ и 10^{-4} амплитуды волны частоты ω при $\omega \gg \omega_0$ [2].

Подставляя выражения (3) и (4) в уравнения (1), (2) и исключая B, получим для функции $A_0 = Ae^{i\Delta x}$ следующее уравнение:

$$2ik_0 \frac{\partial A_0}{\partial x} = \Delta_{y,z} A_0 - k_0^2 \nu |A_0|^2 A_0, \tag{5}$$

где коэффициенты Δ и ν определяются по формулам

$$\Delta = \varepsilon\rho_0 n\omega^2 / 2k_0(\omega_0^2 - \omega^2),$$

$$\nu = \varepsilon^3 \rho_0 n c_0^2 \left(\frac{3}{2}\alpha - \beta\omega^2\right) / 2(\omega_0^2 - \omega^2)^4. \tag{6}$$

Уравнение (5) для функции A_0 подробно исследовано в нелинейной оптике [3]. Опираясь на результаты работы [3], можно сделать вывод, что при $\nu>0$ нелинейная среда оказывает на звуковой пучок расфокусирующее действие, а при $\nu<0$ – фокусирующее.

Из выражения (6) следует, что при низких частотах ($\omega<\omega_0$) среда дефокусирующая. Параметром, характеризующим расфокусирующие свойства нелинейной среды для пучка с параболическим распределением амплитуды, является величина

$$R_{\text{нл}} = a\sqrt{\frac{1}{2\nu A_0^2}}, \tag{7}$$

где $2a$ – ширина пучка. Пусть $nV_0 \sim 10^{-4}$. Сравнивая выражение (7) с параметром $R_{\text{диф}} = ka^2/2$, определяющим дифракционную расходимость, мы видим, что при амплитуде распространяющейся волны $A_0 = 0{,}1$ *атм* для узкого пучка ($a \sim \lambda$) величины $R_{\text{нл}}$ и $R_{\text{диф}}$ одного порядка. Для широкого пучка ($a \sim 10\lambda$) имеем $R_{\text{нл}} = 0{,}1 R_{\text{диф}}$, и поэтому дифракционной расходимостью можно пренебречь.

При частоте $\omega = 3\omega_0$ нелинейность меняет знак, и среда становится фокусирующей. Критическое значение амплитуды волны с частотой $\omega = 4\omega_0$ при концентрации пузырьков, обеспечивающей содержание воздуха, равное $nV_0 = 10^{-4}$, составляет $A_{0\,\text{кр}} = 50\lambda/a$ *атм.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. А. Аскарьян.* Самофокусировка мощного звука при рождении пузырьков. Письма ЖЭТФ, 1971, *13*, 7, 395.
2. *Е. А. Заболотская, С. И. Солуян.* Нелинейное распространение волн в жидкости с равномерно распределенными воздушными пузырьками. Акуст. ж., 1973, *19*, 5, 690–694.
3. *С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов.* Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде. Успехи физ. наук, 1967, *93*, 1, 19–70.

Московский институт
электронного машиностроения

Поступила
4 апреля 1973 г.

УДК 534.222.1

РАССЕЯНИЕ В ОДНОМЕРНОЙ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

В. И. Гельфгат

В работах [1, 2] были найдены средние характеристики поля плоской монохроматической волны, распространяющейся в одномерной непоглощающей среде со случайными дискретными независимыми рассеивателями. Относительно каждого рассеивателя предполагалось, что фаза его коэффициента отражения независима от остальных параметров и распределена равномерно. Ниже методом, предложенным в работе [2], решается та же задача, но в более слабых предположениях относительно параметров рассеивателей.

В работе [2] показано, что для нахождения интересующих нас величин (как-то: среднего отраженного и прошедшего полей, средней плотности энергии поля и т. п.) необходимо знать совместный закон распределения параметров сложного рассеивателя, состоящего из нескольких элементарных. Там же показано, что k-му элементарному рассеивателю удобно сопоставить матрицу g_k, составленную из его коэффициентов отражения V_k и прохождения D_k:

$$g_k = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{D_k^*} & \dfrac{V_k}{D_k} \\ \left(\dfrac{V_k}{D_k}\right)^* & \dfrac{1}{D_k} \end{pmatrix},$$

где * означает комплексное сопряжение.

Удобство описания рассеивателей с помощью матриц g_k заключается в том, что сложный рассеиватель, содержащий N элементарных, описывается при этом также матрицей $g(N)$, равной произведению (упорядоченному в направлении падения волны) матриц элементарных рассеивателей:

$$g(N) = g_1 g_2, \ldots, g_N.$$

Благодаря принятому описанию, задача нахождения статистических характеристик коэффициентов отражения $V(N)$ и прохождения $D(N)$ волны через слой с N независимыми рассеивателями сведена к задаче о произведении независимых слу-