

ДИФРАКЦИЯ ЗВУКА НА ТЕЛАХ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

А. А. Клещев

В жидкую среду поместим гладкое тело, на поверхности которого выполняются граничные условия трех типов: на участках поверхности S_1 и S_2 (фиг. 1) — однородные условия соответственно для потенциала Φ и нормальной составляющей скорости $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$, на оставшейся части поверхности — S_3 — потенциал Φ и нормальная компонента скорости $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ отличны от нуля. При решении этой краевой задачи с комбинированными граничными условиями мы воспользуемся методом, отличным от использованного в работах [1–3]. Распределение звукового поля в среде может быть вычислено с помощью интеграла Кирхгофа [4]

$$(1) \quad \Phi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\Phi(Q) \frac{\partial}{\partial n} G(P, Q) - \frac{\partial}{\partial n} \Phi(Q) G(P, Q) \right] dS,$$

где Q — точка поверхности S , P — точка среды, $G(P, Q)$ — функция Грина.

Будем искать потенциал $\Phi_s(P)$ рассеянной телом волны, учитывая граничные условия на поверхности S и считая, что тело находится в поле плоской монохроматической звуковой волны с потенциалом Φ_i единичной амплитуды; интеграл (1) в нашем случае примет вид

$$(2) \quad \Phi_s(P) = \frac{1}{4\pi} \left\{ - \int_{S_1} \Phi_i(Q) \frac{\partial}{\partial n} G_1(P, Q) dS + \int_{S_2} \frac{\partial \Phi_i(Q)}{\partial n} G_2(P, Q) dS + \right. \\ \left. + \int_{S_3} \left[\Phi_s(Q) \frac{\partial}{\partial n} G(P, Q) - \frac{\partial}{\partial n} \Phi_s(Q) G(P, Q) \right] dS \right\},$$

где $G_1(P, Q)$ — функция Грина, исчезающая на поверхности S_1 ; $G_2(P, Q)$ — функция Грина, имеющая нулевую производную по нормали к поверхности на участке S_2 .

Придадим телу сфероидальную форму и ограничимся условиями первого и второго типов: на части S_1 поверхности сфероида потенциал $\Phi = \Phi_i + \Phi_s$ обращается в нуль; на оставшейся части S_2 выполняется условие $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$. Потенциал Φ_s в точке наблюдения P со сфероидальными координатами ξ, η, φ найдем непосредственно из формулы (2); получаем

$$(3) \quad \Phi_s(\xi, \eta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \left[- \int_{S_1} \Phi_i(\xi', \eta', \varphi') \frac{\partial}{\partial n} G_1(\xi, \eta, \varphi; \xi', \eta', \varphi') dS + \right. \\ \left. + \int_{S_2} \frac{\partial \Phi_i(\xi, \eta, \varphi)}{\partial n} G_2(\xi, \eta, \varphi; \xi', \eta', \varphi') dS \right],$$

где ξ', η', φ' — координаты точки Q поверхности рассеивателя.

Потенциал плоской волны $\Phi_i(\xi', \eta', \varphi')$ представим в виде ряда по сфероидальным волновым функциям [5]

$$(4) \quad \Phi_i(\xi', \eta', \varphi') = 2 \sum_{n \geq m} \sum_{m=0}^{\infty} i^{-n} \epsilon_m \bar{S}_{m,n}(c, \eta_1) \bar{S}_{m,n}(c, \eta') R_{m,n}^{(1)}(c, \xi') \cos m\varphi',$$

где $\bar{S}_{m,n}(c, \eta')$ — нормированная угловая сфероидальная функция [6], $R_{m,n}^{(1)}(c, \xi')$ — радиальная функция первого рода, η_1 — угловая координата волнового вектора падающей волны, $\epsilon_m = \begin{cases} 1 & \text{при } m=0 \\ 2 & \text{при } m>0 \end{cases}$.

Нормальная составляющая скорости $\frac{\partial \Phi_i}{\partial n}$ на поверхности сфероида будет равна

$$(5) \quad \left. \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} \right|_{\xi=\xi'} = \frac{1}{h_\xi} \left. \frac{\partial \Phi_i(\xi', \eta', \varphi')}{\partial \xi'} \right|_{\xi=\xi'}$$

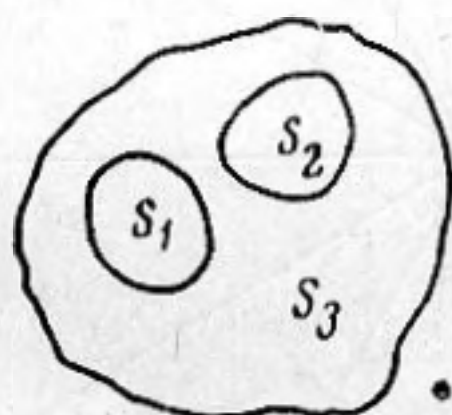
где h_ξ — масштабный множитель координаты ξ .

Разложения $\frac{\partial}{\partial n} G_1$ и G_2 по сфероидальным функциям возьмем из работы [5]

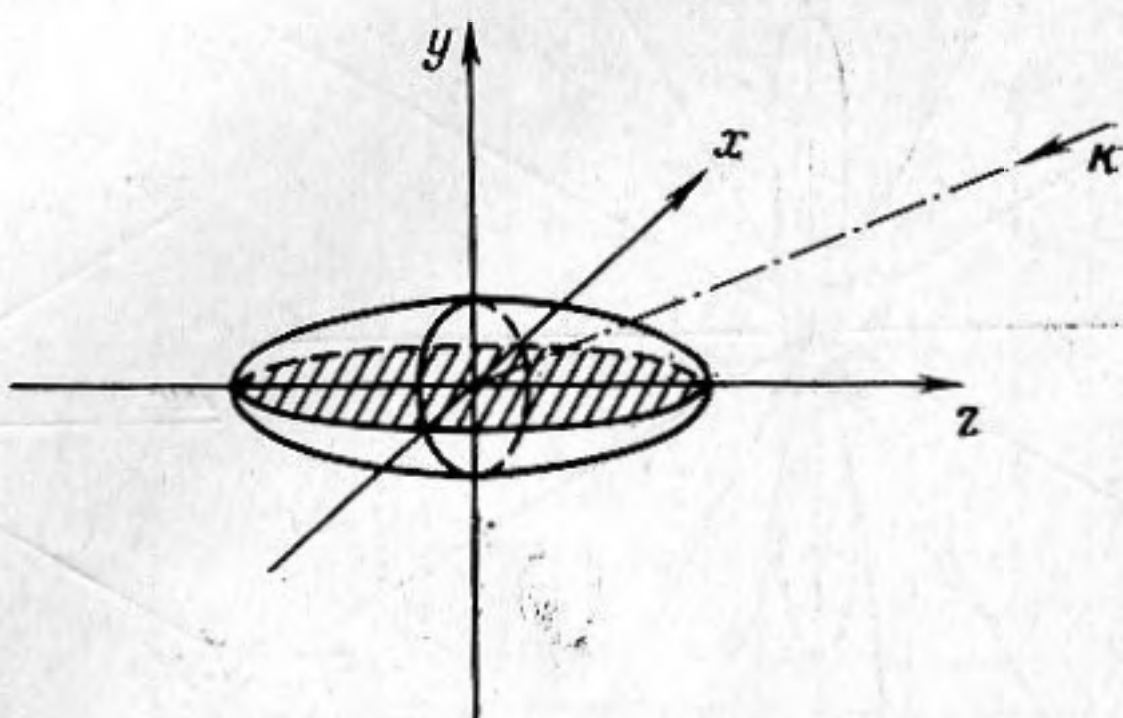
$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial n} G_1(\xi, \eta, \varphi; \xi', \eta', \varphi') = (h_{\xi'})^{-1} \cdot 2ik \sum_{n \geq m} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \bar{S}_{m,n}(c, \eta) \cdot \bar{S}_{m,n}(c, \eta') \times \\ \times \cos m(\varphi - \varphi') \left[R_{m,n}^{(1)'}(c, \xi') R_{m,n}^{(3)}(c, \xi) - \frac{R_{m,n}^{(1)}(c, \xi')}{R_{m,n}^{(3)'}(c, \xi')} R_{m,n}^{(3)}(c, \xi) R_{m,n}^{(3)'}(c, \xi') \right],$$

$$(7) \quad G_2(\xi, \eta, \varphi; \xi', \eta', \varphi') = 2ik \sum_{n \geq m} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \bar{S}_{m,n}(c, \eta) \bar{S}_{m,n}(c, \eta') \times \\ \times \cos m(\varphi - \varphi') \left[R_{m,n}^{(1)}(c, \xi') R_{m,n}^{(3)}(c, \xi) - \frac{R_{m,n}^{(1)'}(c, \xi')}{R_{m,n}^{(3)'}(c, \xi')} \cdot R_{m,n}^{(3)}(c, \xi) R_{m,n}^{(3)'}(c, \xi') \right],$$

где $R_{m,n}^{(3)}$ и $R_{m,n}^{(3)'}$ — радиальная функция 3-го рода и ее производная по радиальной координате соответственно.



Фиг. 1



Фиг. 2

Элемент поверхности dS в сфероидальных координатах запишется в виде

$$(8) \quad dS = h_{\eta'} h_{\varphi'} d\eta' d\varphi',$$

где $h_{\eta'}$ и $h_{\varphi'}$ — масштабные множители координат η' и φ' . Перепишем соотношение (3) с учетом формул (5) — (8); получаем

$$(9) \quad \Phi_s(\xi, \eta, \varphi) = \frac{h_0(\xi_0^2 - 1)}{4\pi} \left[- \int_{-1}^{\eta_1} \int_0^{\varphi_1} \Phi_i(\xi', \eta', \varphi') \frac{\partial}{\partial \xi'} G_1 d\eta' d\varphi' + \right. \\ \left. + \int_{\eta_2}^{+1} \int_{\varphi_2}^{2\pi} \frac{\partial \Phi_i(\xi', \eta', \varphi')}{\partial \xi'} G_2 d\eta' d\varphi' \right],$$

где h_0 — половина межфокусного расстояния.

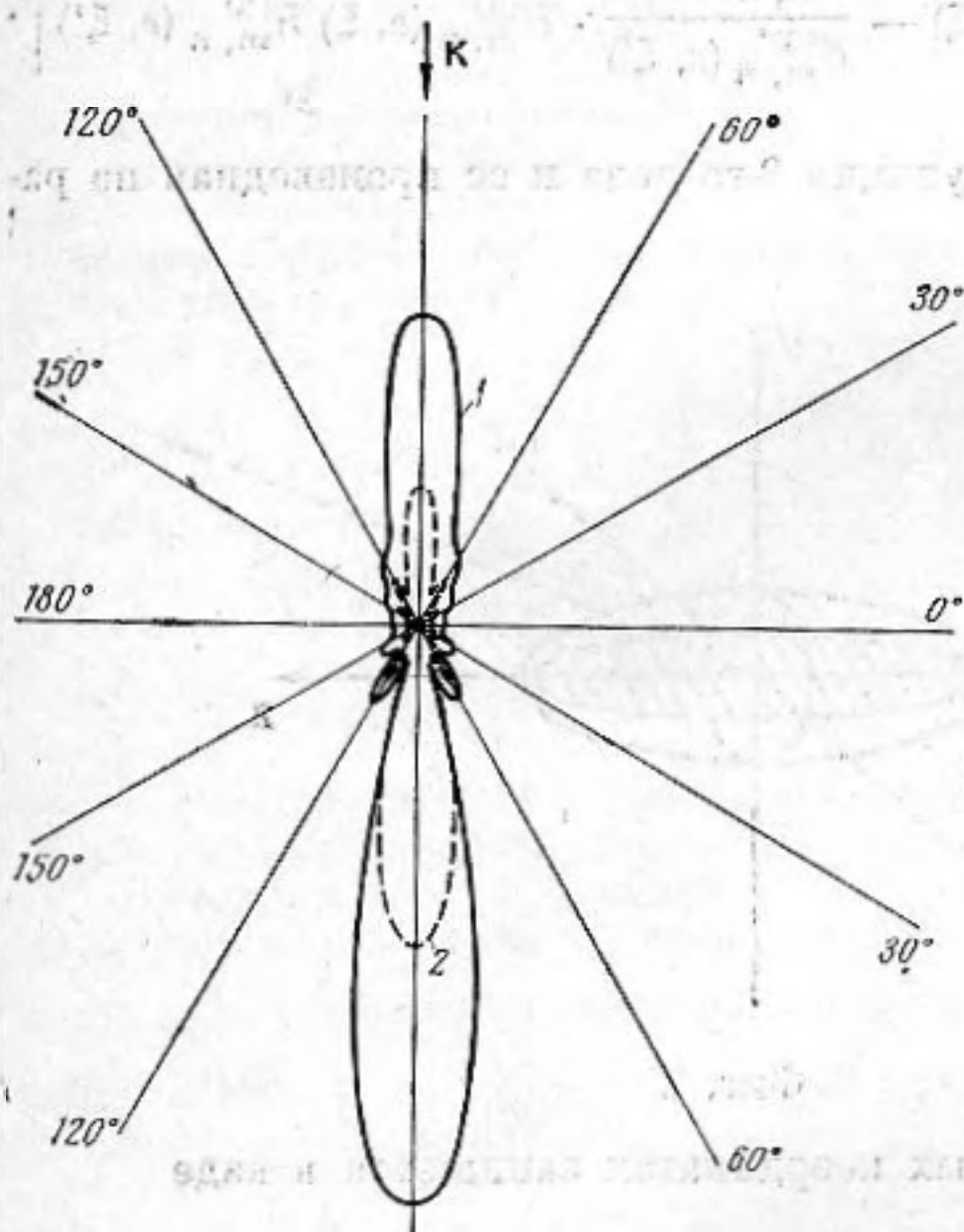
В общем случае интегралы в формуле (9) не берутся и решение находится в квадратурах; но в одном частном случае, а именно когда мягкая поверхность ($\Phi = 0$) составляет строго половину сфероида ($-1 \leq \eta' \leq +1$; $0 \leq \varphi' \leq \pi$), а жесткая поверхность ($\frac{\partial}{\partial n} = 0$) — его вторую половину ($-1 \leq \eta' \leq +1$; $\pi \leq \varphi' \leq 2\pi$), волновой вектор k плоской волны лежит в плоскости $\varphi = 0$ (фиг. 2), а точка наблюдения — в полуплоскостях ($\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$), интегрирование в формуле (9) выполняется строго (удаётся воспользоваться ортогональностью угловых сфероидальных и тригономет-

рических функций). Выделяя в формулах (6) и (7) вронскианы для радиальных функций 1-го и 3-го родов и подставляя эти формулы в соотношение (9), мы получим значения потенциала рассеянной волны $\Phi_s(\xi, \eta, \varphi)$ в полуплоскостях $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$:

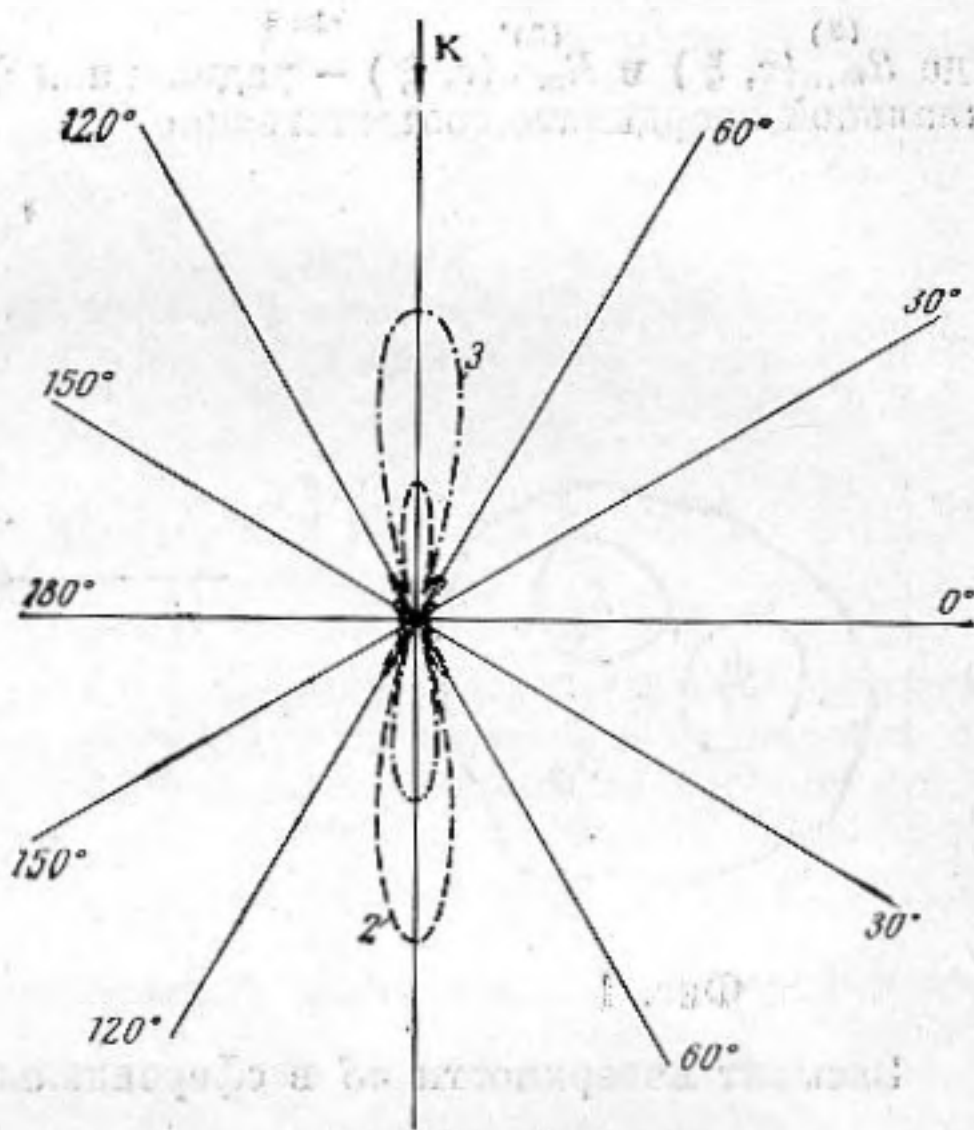
$$(10) \quad \Phi_s(\xi, \eta, 0) = \sum_{n \geq m} \sum_{m=0}^{\infty} i^{-n} \in_m \bar{S}_{m,n}(c, \eta_1) \bar{S}_{m,n}(c, \eta) R_{m,n}^{(3)}(c, \xi) \times \\ \times \left[\frac{R_{m,n}^{(1)}(c, \xi_0)}{R_{m,n}^{(3)}(c, \xi_0)} + \frac{R_{m,n}^{(1)'}(c, \xi_0)}{R_{m,n}^{(3)'}(c, \xi_0)} \right],$$

$$(11) \quad \Phi_s(\xi, \eta, \pi) = \sum_{n \geq m} \sum_{m=0}^{\infty} i^{2m-n} \in_m \bar{S}_{m,n}(c, \eta_1) \bar{S}_{m,n}(c, \eta) \times \\ \times R_{m,n}^{(3)}(c, \xi) \left[\frac{R_{m,n}^{(1)}(c, \xi_0)}{R_{m,n}^{(3)}(c, \xi_0)} + \frac{R_{m,n}^{(1)'}(c, \xi_0)}{R_{m,n}^{(3)'}(c, \xi_0)} \right].$$

Сравнивая выражения (10) и (11) со значениями потенциалов рассеянных волн для жесткого и мягкого сферидов [6], мы видим, что потенциал Φ_s в этом частном



Фиг. 3



Фиг. 4

случае равен их полусумме. На фиг. 3 и 4 приведены амплитудные угловые характеристики мягкого (фиг. 3, кривая 1) и жесткого (фиг. 4, кривая 3) сферидов и угловая характеристика сфероида со смешанными граничными условиями (фиг. 3 и 4, кривая 2).

Автор выражает благодарность Ю. А. Клокову и Н. И. Васильеву за помощь в проведении расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Карновский, В. Г. Лозовик. Акустическое поле бесконечного кругового цилиндрического излучателя при смешанных граничных условиях на его поверхности. Акуст. ж., 1964, 10, 3, 313-317.
2. М. И. Карновский, В. Г. Лозовик. Акустическое поле внешности сферы при смешанных граничных условиях. Акуст. ж., 1965, 11, 2, 176-180.
3. В. А. Андебура. Акустическое поле сфероида излучателя при смешанных граничных условиях. Акуст. ж., 1969, 15, 3, 441-444.
4. Е. Скучик. Основы акустики, т. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
5. К. Фламмер. Таблицы волновых сфероида функций. ВЦ АН СССР, 1962.
6. А. А. Клецев, Л. С. Шейба. Рассеяние звуковой волны идеальными вытянутыми сфероидами. Акуст. ж., 1970, 16, 2, 264-268.

Ленинградский кораблестроительный институт

Поступила
9 августа 1973 г.