вает быстрее, чем по сферическому закону. Это отличие обусловлено неполным отражением от нижней границы, т. е. связано с утечкой энергии в подстилающую среду.

Можно приблизительно оценить затухание вследствие утечки в грунт исходя из известных выражений для плоского слоя. Убывание в горизонтальном направлении амплитуды волны порядка n, обусловленное утечкой энергии в подстилающую среду, определяется функций $\varphi(r)$, имеющей вид [2]:

$$\varphi(r) \sim 20 \lg e^{-\mathrm{Im}\,(m_n) r}, \tag{1}$$

где r – расстояние по горизонтали между излучателем и приемником, m_n – комплексное горизонтальное волновое число. Для малых n при условии, что скорость распространения звука в подстилающей среде мала по сравнению со скоростью звука в воде, мнимая часть горизонтального волнового числа $\mathrm{Im}\,(m_n)$, определяющая утечку звуковой энергии в неидеальную подстилающую среду, равна [3]:

$$\mathrm{Im}(m_n) \approx \rho_1 c_1 c_0 n^2 / 4\rho_0 f^2 H^3 \sqrt{1-(n\lambda/2H)^2}, \tag{2}$$

где ρ_0, c_0 – действительные части плотности и скорости звука в воде, ρ_1, c_1 – те же величины для грунта, f – частота сигнала, λ – длина волны, H – глубина слоя.

Если предположить, что на небольших расстояниях распространение звука в клине мало отличается от распространения в слое, то можно оценить дополнительное затухание волны, характеризуемое функцией $\Delta\varphi$ и обусловленное утечкой в грунт, считая $H \approx r\alpha$:

$$\Delta\varphi \approx 8{,}69 \frac{\rho_1 c_1}{\rho_0 c_0 \alpha} \{\sqrt{[1-(n\lambda/2\alpha)^2/r_1^2]} - \sqrt{[1-(n\lambda/2\alpha)^2/r_0^2]}\}. \tag{3}$$

Расчет $\Delta\varphi$ был выполнен для грунта с параметрами $\rho_1=1{,}6$ *г/см*^{3} и $c_1=300$ *м/сек* при $\alpha=2°$ и $r_0=17$ *м*. Пунктирные кривые, характеризующие убывание параметров и построенные с учетом затухания $\Delta\varphi$ (фиг. 2, 3), хорошо согласуются с экспериментальными результатами для частот 1,8 и 2,5 *кгц*.

В заключение авторы благодарят С. Н. Ржевкина за полученные советы и постоянное внимание.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. П. Сахарова.* Асимптотическое представление звукового поля точечного источника в клиновидной области. Акуст. ж., 1959, *5*, 2, 215—220.
2. *И. Толстой, К. С. Клей.* Акустика океана. М., «Мир», 1969.
3. *Л. Н. Захаров, В. С. Нестеров, Э. Г. Федосеева.* Медленные флюктуации звукового поля под воздействием сейшевых колебаний мелкого пресноводного водохранилища. Акуст. ж., 1964, *10*, 3, 293—300.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Физический факультет,
кафедра акустики

Поступила
1 марта 1972 г.

УДК 534.26

ВЕКТОРНО-ФАЗОВЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ПОЛЕ ТОНАЛЬНОГО ИСТОЧНИКА ВБЛИЗИ ИДЕАЛЬНО ОТРАЖАЮЩЕЙ ПЛОСКОСТИ

В. Е. Иванов, С. Н. Ржевкин

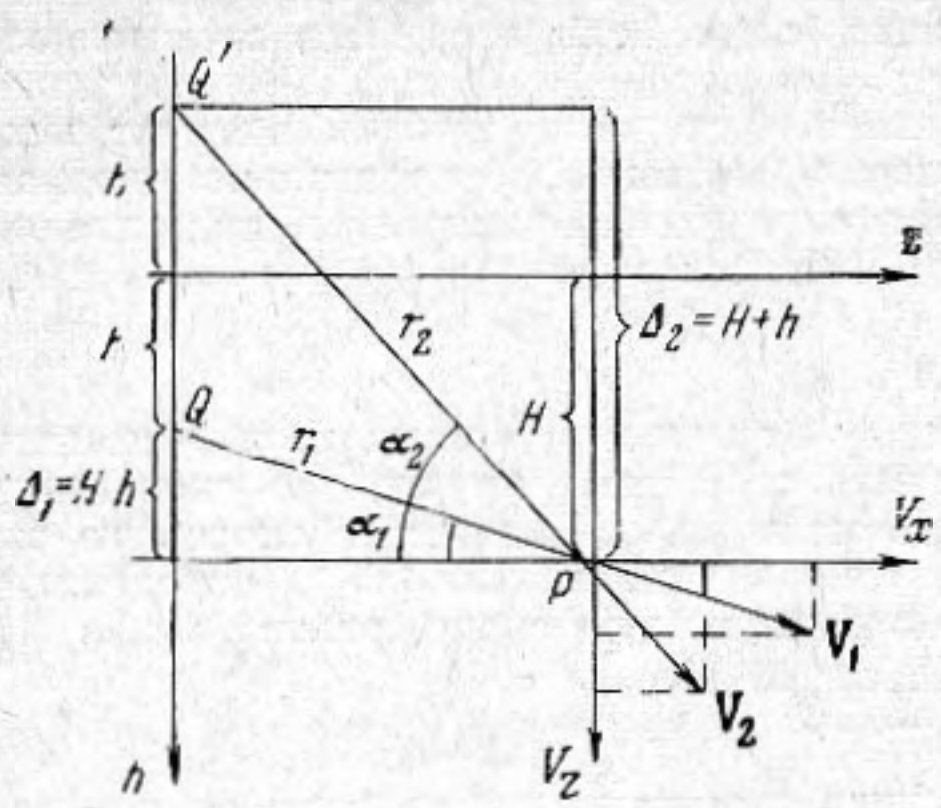
Рассмотрим звуковое поле тонального источника Q (фиг. 1), находящегося на расстоянии h от плоской идеально отражающей границы и на горизонтальном расстоянии x от точки наблюдения P, которая лежит на расстоянии H от той же плоской границы; на фиг. 1 пояснены обозначения величин, входящих в дальнейшие расчеты.

Потенциал источника Q в точке приема P выражается следующим образом:

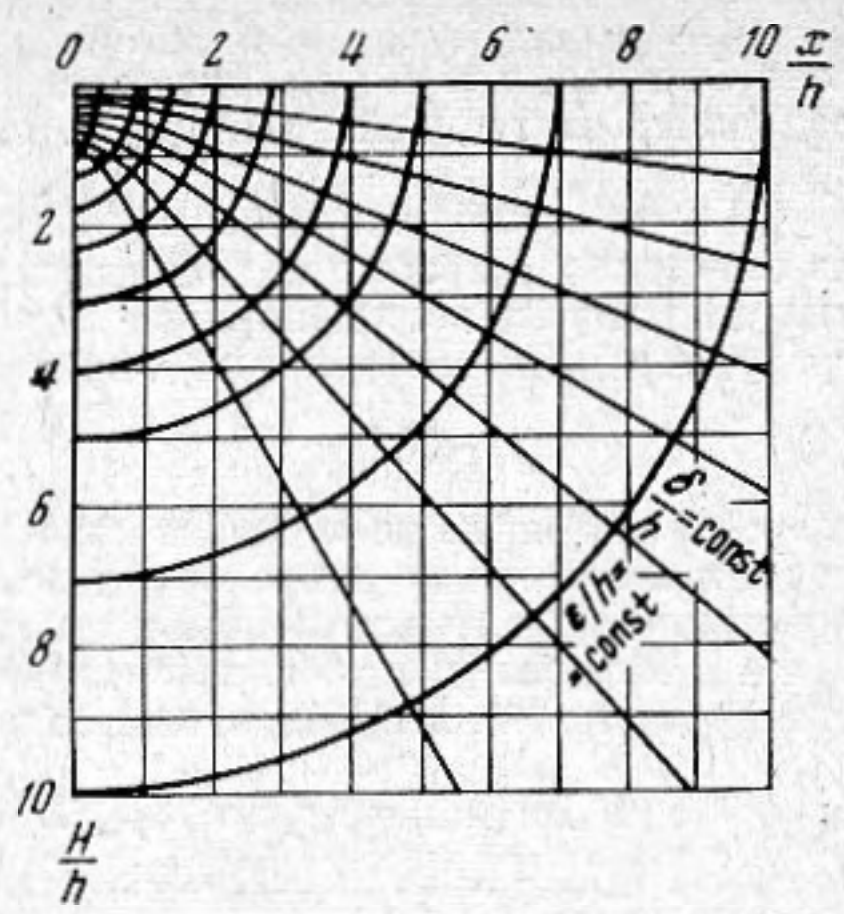
$$\Phi = \frac{A}{4\pi}\left[\frac{e^{-ikr_1}}{r_1} \pm \frac{e^{-ikr_2}}{r_2}\right],$$

где знак «+» относится к абсолютно жесткой отражающей границе, а знак «–» – к абсолютно мягкой границе; через A обозначена сила (производительность) источника. Звуковое давление выразится формулами

$$P = P_1 + P_2, \qquad P_1 = \frac{i\omega\rho A}{4\pi r_1} e^{-ikr_1}, \qquad P_2 = \frac{i\omega\rho A}{4\pi r_2} e^{-ikr_2}.$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Углы α_1 и α_2 с отражающей плоскостью, составляемые направлениями из точки приема на источник Q и его зеркальное изображение Q', определятся выражениями

(1) $$\cos\alpha_1 = x/r_1, \quad \sin\alpha_1 = \Delta_1/r_1; \quad \cos\alpha_2 = x/r_2, \quad \sin\alpha_2 = \Delta_2/r_2.$$

Расстояния PQ и PQ' от точки приема до источника и его зеркального изображения найдем по формулам

$$r_1^2 = x^2 + \Delta_1^2, \qquad r_2^2 = x^2 + \Delta_2^2.$$

Звуковое давление и компоненты вектора колебательной скорости в точке приема P, находящейся в дальней зоне источника Q, определятся следующими выражениями:

(2) $$P = P_1(1 \pm \beta e^{-ikd}) = P_1 r e^{i\varphi_p},$$

$$V_x = \frac{P_1 x}{\rho c r_1}(1 \pm \beta^2 e^{-ikd}) = \frac{P_1 x q}{\rho c r_1} e^{i\varphi_x},$$

$$V_z = \frac{P_1 \Delta_1}{\rho c r_1}\left(1 \pm \frac{\Delta_2}{\Delta_1}\beta^2 e^{-ikd}\right) = \frac{P_1 \Delta_1 s}{\rho c r_1} e^{i\varphi_z},$$

где $d = |r_2| - |r_1| = 2\delta, \quad \rho = \dfrac{r_1}{r_2},$

$$|P| = \frac{A\rho\omega}{4\pi r_1}|r|, \qquad r^2 = 1 + \beta^2 \pm 2\beta\cos kd, \qquad \operatorname{tg}\varphi_p = \frac{\mp\beta\sin kd}{1 \pm \beta^2\cos kd},$$

(3) $$|V_x| = \frac{A\rho\omega x}{4\pi r_1^2 \rho c}|q|, \qquad q^2 = 1 + \beta^4 \pm 2\beta^2\cos kd, \qquad \operatorname{tg}\varphi_x = \frac{\mp\beta^2\sin kd}{1 \pm \beta^2\cos kd},$$

$$|V_z| = \frac{A\rho\omega\Delta_1}{4\pi r_1^2\rho c}|s|, \qquad s^2 = 1 + \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)^2\beta^4 \pm 2\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\beta^2\cos kd,$$

$$\operatorname{tg}\varphi_z = \frac{\mp\dfrac{\Delta_2}{\Delta_2}\beta^2\sin kd}{1 \pm \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}\beta^2\cos kd}.$$

Источник и его зеркальное изображение дают в точке наблюдения P звуковые давления P_1 и P_2 и векторы колебательной скорости $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$. Между этими величинами имеют место соотношения

(4) $$P_1 = V_1\rho c, \qquad P_2 = V_2\rho c.$$

Из опыта величины P_1, P_2, V_1 и V_2 не могут быть определены раздельно. Однако суперпозиция векторов $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ на координатные оси дает суммарные компоненты колебательной скорости V_x и V_z, которые могут быть измерены на опыте при наличии соответствующей аппаратуры. Из фиг. 1 ясно, что

(5) $$V_x = V_1\cos\alpha_1 + V_2\cos\alpha_2,$$
$$V_z = V_1\sin\alpha_1 + V_2\sin\alpha_2.$$

Используя формулы (1) – (4), приведем соотношения (5) к виду

$$\frac{P_1}{P}\cos\alpha_1\left[1+\frac{P_2\cos\alpha_2}{P_1\cos\alpha_1}\right]=\frac{V_x}{P}\rho c, \tag{6}$$

$$\frac{P_1}{P}\sin\alpha_1\left[1+\frac{P_2\sin\alpha_2}{P_1\sin\alpha_1}\right]=\frac{V_z}{P}\rho c.$$

Величины

$$\frac{V_x}{P}=\frac{|V_x|}{|P|}e^{i\psi_x},\qquad \frac{V_z}{P}=\frac{|V_z|}{|P|}e^{i\psi_z}$$

могут быть определены из опыта при помощи аппаратуры, измеряющей звуковое давление и компоненты колебательной скорости по амплитуде и фазе (ψ_x и ψ_z). Следовательно, формулы (6) дают соотношения между теоретически вычисляемыми величинами (левые части) и экспериментально измеряемыми величинами (правые части). Приравнивая модули и фазы в правой и левой части уравнений (6), получим

$$\frac{q\,x^2}{r^2r_1^2}=\frac{|V_x|^2}{|P|^2}=g_x^2,\qquad \varphi_x-\varphi_p=\psi_x, \tag{7}$$

$$\frac{s^2\Delta_1^2}{r^2r_1^2}=\frac{|V_z|^2}{|P|^2}=g_z^2,\qquad \varphi_z-\varphi_p=\psi_z,$$

используя выражения (3) для $\operatorname{tg}\varphi_p$, $\operatorname{tg}\varphi_x$ и $\operatorname{tg}\varphi_z$ получим

$$\operatorname{ctg}\psi_x=\frac{1+\beta^3\pm\beta(\beta+1)\cos kd}{\mp\beta(\beta-1)\sin kd}=m, \tag{8}$$

$$\operatorname{ctg}\psi_z=\frac{1+\dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}\beta^3\pm\beta\left(\dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}\beta+1\right)\cos kd}{\mp\beta\left(\dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}\beta-1\right)\sin kd}=n.$$

На основании формул (8) получаем следующие соотношения:

$$\sin^2\psi_x=\frac{1}{1+m^2}=\frac{r_1^2(r_1-r_2)^2\sin^2 kd}{r_2^4q^2r^2}, \tag{9}$$

$$\sin^2\psi_z=\frac{1}{1+n^2}=\frac{r_1^2(\Delta_2r_1-\Delta_1r_2)^2\sin^2 kd}{r_2^4\Delta_1^2s^2r^2},$$

$$\operatorname{ctg}\psi_z-\operatorname{ctg}\psi_x=n-m=\frac{(\Delta_1-\Delta_2)r^2r_2^2}{(r_1-r_2)(\Delta_2r_1-\Delta_1r_2)\sin kd}. \tag{10}$$

Используя формулы (7) – (10), составим следующие выражения:

$$M^2=g_x^2\frac{(n-m)^2}{1+m^2}=\frac{x^2(\Delta_1-\Delta_2)^2}{(\Delta_2r_1-\Delta_1r_2)^2},$$

$$N^2=g_z^2\frac{(n-m)^2}{1+n^2}=\frac{(\Delta_1-\Delta_2)^2}{(r_1-r_2)^2}. \tag{11}$$

Величины $g_x^2\dfrac{(n-m)^2}{1+m^2}$ и $g_z^2\dfrac{(n-m)^2}{1+n^2}$ зависят от разности хода двух лучей ($\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$) в точке приема, поскольку в выражения (7) и (8) для g_x, g_z, m и n входят периодические функции $\sin kd$ и $\cos kd$, где $kd=\dfrac{2\pi f}{c}d$. Каждый из множителей, входящих в эти выражения, содержит величины, определяемые из опыта и принимающие различные значения в зависимости от частоты источника. Вместе с тем правые части в формулах (11) зависят только от геометрических параметров задачи и, следовательно, инвариантны относительно частоты и зависящей от нее интерференционной структуры поля.

Соотношения (11) являются системой двух уравнений, разрешив которую можно определить расстояние (x) от точки наблюдения до излучателя и расстояние от из-

лучателя до отражающей границы (h) на основании векторно-фазовых измерений, произведенных в одной точке.

Для решения системы уравнений (11) введем эллиптическую систему координат (фиг. 2), образующуюся из семейства эллипсов и гипербол с общим фокусом в точке Q, где расположен излучатель. Уравнения семейств эллипсов и гипербол имеют вид

$$\frac{H^2}{\varepsilon^2}+\frac{x^2}{\varepsilon^2-h^2}=1, \qquad \frac{H^2}{\delta^2}-\frac{x^2}{h^2-\delta^2}=1, \tag{12}$$

где ε и δ являются параметрами семейств эллипсов и гипербол. Величины ε и δ связаны с величинами r_1 и r_2 соотношениями $2\delta=r_2-r_1$, $2\varepsilon=r_1+r_2$. Уравнение $\delta=\mathrm{const}$ определяет гиперболу, вдоль которой разность хода остается постоянной; уравнение $\varepsilon=\mathrm{const}$ дает эллипс, на котором сумма расстояний от источника и его зеркального изображения до точки наблюдения постоянна. Из уравнений (12) вытекает связь декартовых координат излучателя (x и h) с эллиптическими координатами

$$x^2=\frac{(h^2-\delta^2)(\varepsilon^2-h^2)}{h^2}, \qquad h=\varepsilon\delta/H. \tag{13}$$

Учитывая, что $\Delta_1-\Delta_2=-2h$, из второго уравнения (11) получаем $h^2=N^2\delta^2$ и, подставляя $\delta^2=H^2h^2/\varepsilon^2$, получим один из корней системы уравнений (11)

$$\varepsilon^2=H^2N^2. \tag{14}$$

Из первого уравнения (11) при учете соотношения (14) найдем $M^2=\dfrac{\delta^2N^2(H^2-\delta^2)}{H^2(N^2-1)}$,

откуда определим второй корень системы уравнений

$$\delta^2=\frac{M^2+N^2-M^2N^2}{N^2}H^2.$$

Из выражений (13) найдем x_2 и h^2:

$$x^2=M^2(1-N^2)^2H^2/N^2,$$
$$h^2=[M^2+N^2-M^2N^2]H^2. \tag{15}$$

Таким образом, x^2 и h^2 выражаются через известное расстояние точки наблюдения от отражающей границы (H) и определяемые из опыта величины g_x, g_z, m, n. Существенно отметить, что решение задачи находится из одиночного опыта при любой заданной частоте. При изменении частоты и, следовательно, разности фаз двух лучей $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ величины g_x, g_z, m и n будут в каждом опыте принимать различные значения, поскольку в них входят, кроме независимых от частоты геометрических параметров, еще и частотно-зависимые величины $\sin kd$ и $\cos kd$, изменяющиеся в пределах от -1 до $+1$. Тем не менее при любой частоте и, следовательно, при совершенно различных опытных значениях величин g_x, g_z, m и n вычисляемые по формуле (15) значения x и h должны получаться одинаковыми.

Рассмотренные в данной заметке соображения указывают на интересные возможности получения при посредстве векторно-фазовых измерений существенных информативных данных о свойствах звукового поля и источниках звука.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
Физический факультет, кафедра
акустики

Поступила
1 ноября 1973 г.

УДК 534.26

КОМПЕНСАЦИЯ РАССЕЯННОГО ПОЛЯ В ЗОНЕ ФРЕНЕЛЯ

А. А. Клещев

В жидкую среду поместим рассеиватель P (фиг. 1), на который падает плоская монохроматическая волна с волновым вектором $\mathbf{k}$. Синтезируем компенсирующую антенну сфероидальной формы (фиг. 1), подавляющую поле рассеивателя по внешней области поверхности S, охватывающей рассеиватель и компенсатор и расположенной достаточно близко к рассеивателю и компенсатору. Первую вытянутую сфероидальную систему координат ξ_1, η_1, φ_1 свяжем с антенной (ξ_{01}) и поверхностью $S(\xi^*)$, вторую систему сфероидальных координат ξ_2, η_2, φ_2 – рассеивающим телом (ξ_{02}); оси двух соответствующих декартовых систем координат направлены одинаково (фиг. 2). Нетрудно показать, что гашение рассеянного поля вне S эквивалентно получению на S нулевого распределения давления p^* или его производной $\partial p^*/\partial n$ ($\mathbf{n}$ – внешняя к S нормаль), через p^* обозначена сумма давлений p_Σ и Φ, где p_Σ –