где

$$\psi(\xi^*, \eta, \varphi) = -\{p_1(\xi^*) + p_2(\xi^*) + F[p_0(\xi_{01})]\},$$

$$\psi(\xi^*, \eta, \varphi) = -\left\{ p_1(\xi^*) + p_2(\xi^*) + F\left[\frac{\partial p_0(\xi_{01})}{\partial n_0}\right]\right\},$$

$$f^{(1),(2)}[\eta', \varphi'; \psi(\eta', \varphi', \xi_{01})] = \begin{cases} p_0(Q) \to (1) \\ \dfrac{\partial P_0(Q)}{\partial n_0} \to (2) \end{cases};$$

ядро $K^{(1),(2)}$ пропорционально $\partial G_1/\partial n_0$ или G_2.

Для решения уравнения (12) можно применить метод последовательных приближений и положить $\psi_0(\eta', \varphi', \xi_{01}) \equiv 0$; тогда

$$\psi_1(\xi^*, \eta, \varphi) = \int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} K^{(1),(2)}(\eta, \varphi; \eta', \varphi') f^{(1),(2)}[\eta', \varphi'; 0]\, d\eta'\, d\varphi'$$

и последовательно получим

$$\psi_{n+1}(\xi^*, \eta, \varphi) = \int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} K^{(1),(2)}(\eta, \varphi; \eta', \varphi') f^{(1),(2)}[\eta', \varphi'; \psi_n(\eta', \varphi', \xi_{01})]\, d\eta'\, d\varphi'.$$

Сходимость итерационного процесса гарантируется при выполнении трех условий [6, 7]: 1) ядро $K^{(1),(2)} \in L^2$ (нетрудно установить, что наши ядра подчиняются этим требованиям); 2) функция $f[\eta', \varphi'; \psi=0] \in L^2$; 3) функция $f[\eta', \varphi'; \psi(\eta', \varphi', \xi_{01})]$ равномерно удовлетворяет условию Липшица

$$|f(\eta', \varphi'; \psi_1) - f(\eta', \varphi'; \psi_2)| < C(\eta', \varphi')|\psi_1 - \psi_2|.$$

Тогда последовательность ψ_0, ψ_1, ψ_2 сходится к решению уравнения (12), если

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} A^2(\eta, \varphi) C^2(\eta, \varphi)\, d\eta\, d\varphi = M^2 < 1,$$

где

$$A^2(\eta, \varphi) = \left| \int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} K^2(\eta, \varphi; \eta', \varphi')\, d\eta'\, d\varphi' \right|.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Е. А. Иванов.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск, «Наука и техника», 1968.
2. *А. А. Клещев.* Расчет рассеяния звука упругой сжатой оболочкой. Докл. на НТК проф.-препод. состава ЛОЛКИ, 1973, 36.
3. *Т. Л. Гутман, А. А. Клещев.* Дифракция волн в упругой среде на упругом сфероиде. Тр. ЛОЛКИ, 91, 1974.
4. *А. А. Клещев.* Синтез акустической антенны с криволинейной (сфероидальной) поверхностью в широком диапазоне волновых размеров. Акуст. ж., 1972, *18*, 3, 413—420.
5. *А. А. Клещев.* Синтез криволинейной поверхностной и объемной акустических антенн. Докл. на VI Всес. симпоз. по дифракции и распространению волн. Ереван, ВНИИРИ, 1973, *1*, 179—182.
6. *A. Hammerstein.* Nichtlineare Integralgleihungen nebst Anwendungen. Acta Math., 1930, *54*, 117—176.
7. *Ф. Трикоми.* Интегральные уравнения. М., Изд-во иностр. лит., 1960.

Ленинградский кораблестроительный институт

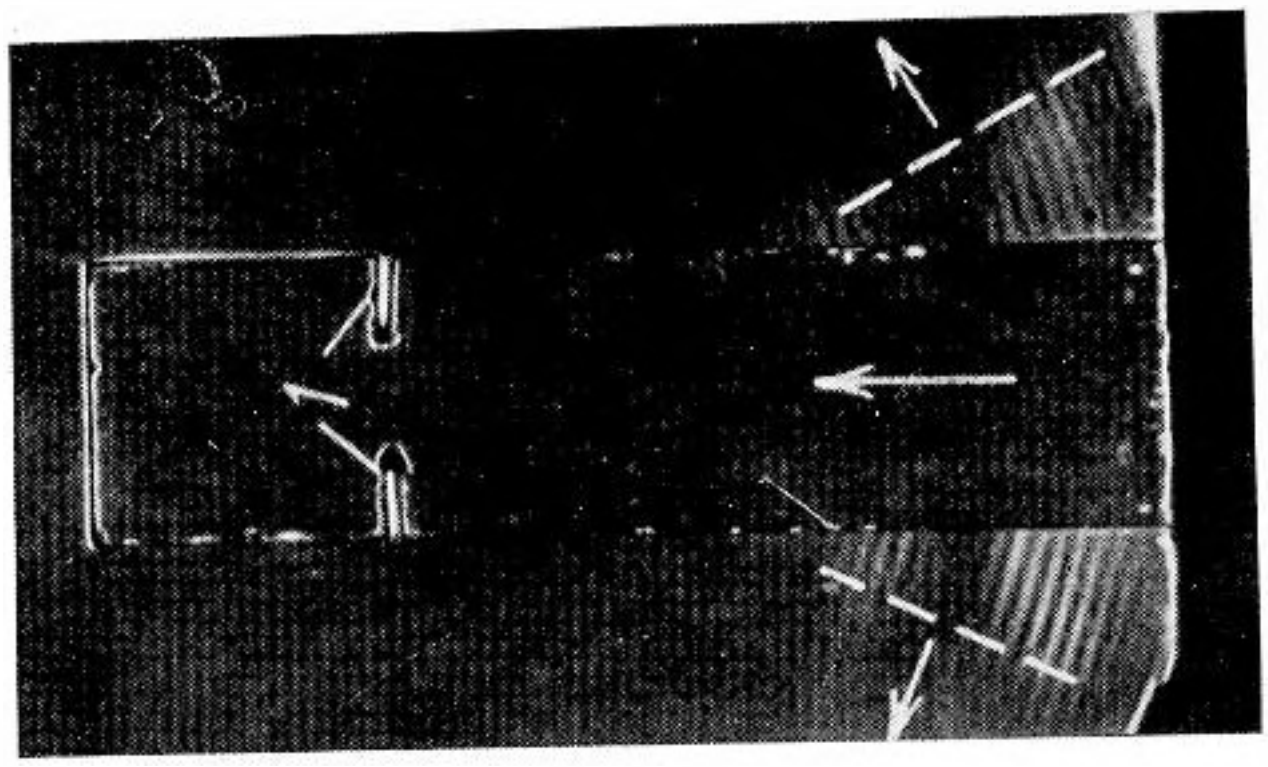
Поступила 14 января 1974 г.

УДК 534.23

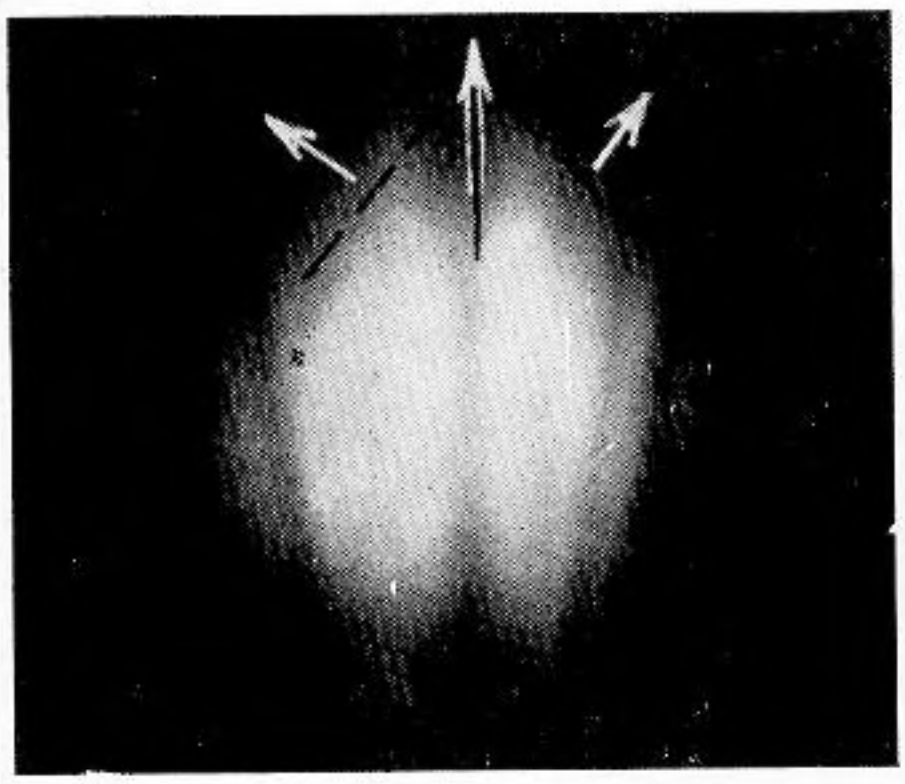
БОКОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН УЛЬТРАЗВУКОВЫМИ ПУЧКАМИ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

В. И. Макаров

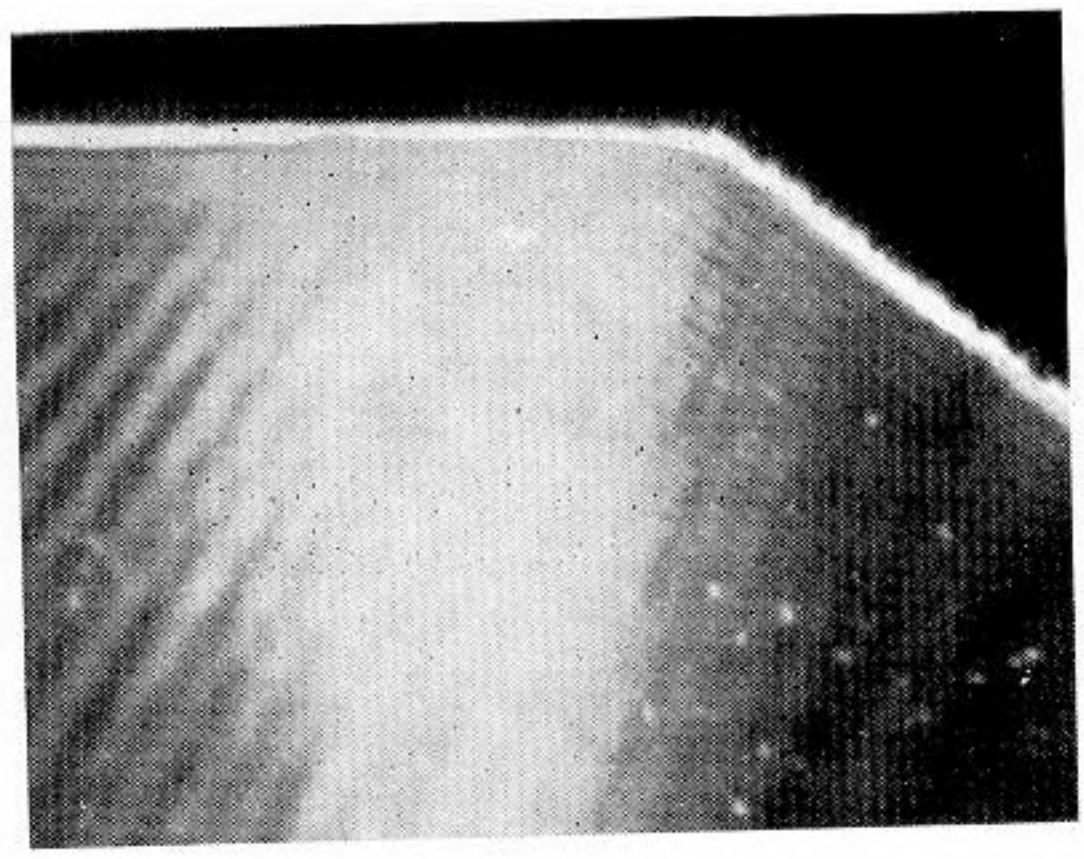
Как уже сообщалось [1], теневым методом обнаруживается боковое излучение пространственно модулированных упругих волн ультразвуковым пучком, распространяющимся в твердом образце, в жидкость, окружающую образец.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Мы продолжили эти исследования, применив импульсный режим излучения ультразвука и визуализацию ультразвуковых импульсов по методу, отличающемуся от описанного ранее в работе [2] тем, что фронты волн высокочастотного заполнения импульса не визуализировались. При использовании этого, более простого, метода виден передний фронт импульсов в исследуемом ультразвуковом поле, что дает возможность определять направление распространения звука, а также следить за развитием изучаемого процесса во времени.

На фиг. 1 приведена фотография стеклянного бруска прямоугольного сечения, находящегося в воде. Брусок имеет прорези, перпендикулярные его боковым граням и препятствующие распространению звука вдоль границы образца с жидкостью (обозначены цифрой *1*). Пьезокварцевой пластиной У-среза в образец излучается ультразвук (в направлении длинной стрелки на фиг. 1) с частотой $f=2{,}9$ *мгц*. На снимке, представляющем один из кадров кинофильма, видно упомянутое выше боковое излучение. Передний фронт бокового излучения в жидкости отмечен штриховыми линиями, а направление распространения – стрелками, параллельными полосам в картине звукового поля. Фотография иллюстрирует звуковое поле в жидкости, возникающее после двух отражений ультразвукового импульса от торцов бруска в течение паузы между посылками электрических импульсов на пьезоизлучатель. Зная скорость продольных и поперечных волн в бруске $C_l=5970$ и $C_t=3800$ *м/сек* и скорость звука в воде $C_0=1480$ *м/сек*, непосредственным измерением на фотографии убеждаемся, что излучение в жидкость создает поперечная волна, распространяющаяся в бруске под углом α к первоначальному направлению распространения излученного пьезопластиной ультразвукового пучка, причем

$$\alpha = \arcsin \frac{C_t}{C_l}. \tag{1}$$

Угол $\beta_в$ преломления звука на границе стекло – жидкость равен:

$$\beta_в = \arcsin \frac{C_0}{C_l} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{C_t}{C_l} \right). \tag{2}$$

Для приведенных выше значений скоростей формула (2) дает $\beta_в=17°\,30'\pm1°$. Из измерений по фотографии $\beta_в=17°\,30'\pm3°$.

Расчет, элементы которого были приведены автором совместно с С. Н. Ржевкиным в [3], дает возможность вычислить ширину полос на фиг. 1.

Боковое излучение поперечных волн пучками продольных волн можно наблюдать непосредственно в твердом теле теневым методом. На фиг. 2 приведена фотография ультразвукового импульса, излученного пьезокварцевой пластиной *X*-среза через масляный контакт в блок из оптического кронгласа. Направление распространения продольных волн указано длинной стрелкой на оси импульса. Применение поляризационной оптики в теневом приборе позволяет, как известно [4, 5], эффективно визуализировать поперечную волну и определить положение ее фронта. Этим методом удается доказать, что волновое поле, излучаемое импульсом продольных волн в боковом направлении (на фотографии указано короткими стрелками), содержит поле поперечных волн. Штрихами на фиг. 2 нанесено расчетное положение фронта волны, соответствующее формуле (1) и данным эксперимента.

Теоретическое истолкование явления бокового излучения связано с рассмотрением ограниченных по поперечному сечению волновых пучков и волны λ' в приграничном «слое». В рамках такой теории пучок продольных волн излучает поперечные волны в первоначально покоящуюся среду в направлении от своих границ под углом M к оси пучка. Угол M равен:

$$M = \arcsin \frac{\lambda_t}{\lambda_l} = \arcsin \frac{C_t}{C_l}, \tag{3}$$

где λ_t — длина поперечной волны; λ_l — длина продольной волны. *Формально* угол M можно уподобить углу Маха, а импульс продольных волн на фиг. 2 формально аналогичен как бы «телу», которое перемещается со скоростью C_l, большей скорости C_t волн в среде, окружающей «тело».

Боковое излучение поперечных волн обнаруживается наглядно, если ультразвуковой импульс продольных волн падает своей приосевой частью на границу стеклянного образца нормально, а край импульса отражается от скошенной границы, параллельной фронту поперечной волны. Для такого образца, изображенного на фиг. 3, $C_l=6070$ *м/сек*, $C_t=3714$ *м/сек*, а направление бокового излучения определяется по формуле (3) углом $M=37°\,40'$. Перпендикулярно этому направлению скошена граница образца. На фотографии видно образование продольных (в приосевой части) и поперечных (у правого края) стоячих волн в головной части импульса. Стоячая поперечная волна возникает в условиях этого эксперимента при отражении бокового излучения от скошенной границы. На фотографии можно непосредственно определить $\lambda_t/\lambda_l=0{,}7\pm0{,}1\approx\sin M$, что соответствует расчету по формуле (3).

Автор выражает благодарность В. В. Швареву, совместно с которым были проведены эксперименты, описанные в данном сообщении.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. И. Макаров.* Пространственно модулированное боковое излучение ультразвукового пучка в твердом теле. Акуст. ж., 1972, *18*, 2, 325—326.
2. *В. И. Макаров.* Визуализация ультразвуковых импульсов с высокочастотным заполнением. Акуст. ж., 1958, *4*, 3, 285—286.
3. *В. И. Макаров.* Исследование распространения ультразвуковых волн в твердых телах посредством оптического метода темного поля. Научн. конф. «Ломоносовские чтения», Изд-во МГУ, 1971, 33.
4. *Л. Бергман.* Ультразвук и его применение в науке и технике, М., Изд-во иностр. лит., 1956, 348.
5. *E. Hiedemann.* Grundlagen und Ergebnisse der Ultraschallforschung, Walter de Gruyter, Berlin, 1939, 68.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Физический факультет,
кафедра акустики

Поступила
20 февраля 1973 г.

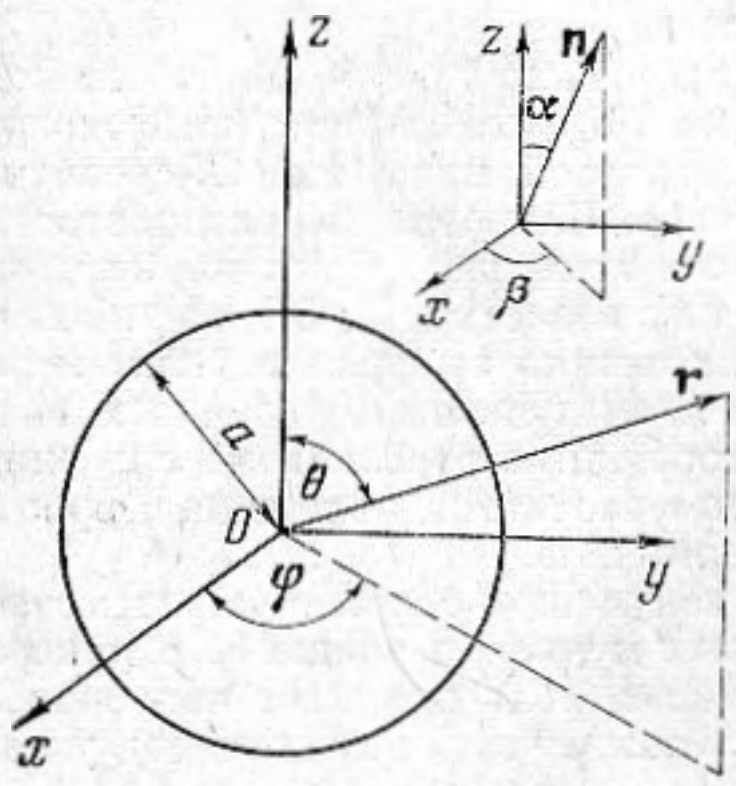
УДК 534.26

РАССЕЯНИЕ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ НА ШАРЕ, ДВИЖУЩЕМСЯ В ПРОСТРАНСТВЕ С ДОЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ

Л. А. Марневская

В работе [1] дан метод решения задачи о рассеянии плоской звуковой волны на акустически жестком приемнике, движущемся (относительно неподвижной системы координат) поступательно в однородном пространстве с постоянной скоростью, значительно меньшей скорости звука в данной среде ($v_0 \ll c$). В данной заметке этот метод конкретизируется для случая сферического приемника радиуса a.

Найдем звуковую волну, рассеянную шаром, и рассчитаем возникающее при этом давление на его поверхности. Для решения задачи введем подвижную систему координат $Oxyz$, начало которой совпадает с центром шара, а ось Oz направлена в сторону его движения (фиг. 1).



Фиг. 1

Пусть временная зависимость задается множителем $e^{-i\omega t}$, а плоская волна распространяется в направлении единичного вектора $\mathbf{n}$, образующего угол α с положительным направлением оси Oz; проекция вектора $\mathbf{n}$ на плоскость xOy образует угол β с осью Ox. Потенциал скоростей u^0 падающей волны задается разложением по сферическим волновым функциям [2]

$$u^0 = \exp[ik(\mathbf{nr})] = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!}\, i^n j_n(kr) P_n^m(\cos\alpha)\times \times P_n^m(\cos\theta)\exp[im(\varphi-\beta)], \tag{1}$$

где j_n — сферическая функция Бесселя 1-го рода, P_n^m — присоединенные функции Лежандра, r, θ, φ — сферические координаты точки наблюдения, имеющей радиус-вектор, $\mathbf{r}$, $k=\omega/c$ (ω — круговая частота). При этом следует учесть акустический эффект Допплера, в силу которого

$$\omega = \omega_0\left(1 - \frac{v_0}{c}\cos\alpha\right),$$

где ω_0 — частота в системе координат, в которой внешняя среда покоится.

Согласно работе [1], давление звуковой волны в каждой точке пространства определяется по формуле

$$p = -\rho[i\omega\psi + (\nabla\Phi, \nabla\psi)]\exp\left[i\left(\frac{k\Phi}{c} - \omega t\right)\right], \tag{2}$$

где ψ — потенциал скоростей звуковой волны в отсутствие потока, Φ — потенциал не возмущенного звуком потока, обтекающего шар, ∇ — оператор Гамильтона, ρ — плотность среды, заполняющей пространство.