В соответствии с формулой (14) можно сделать вывод о том, что случайное поле с большими пространственными масштабами позволяет получить малые погрешности оценивания параметра корреляционной функции.

Необходимо сделать еще одно замечание об особенностях оценки максимального правдоподобия параметра корреляционной функции при больших отношениях сигнал/шум. Если $2S_\eta(0, \alpha)/N_0 \gg 1$, то, как правило, и $\sigma_\alpha^2 \to 0$ при любом T и H, т. е. при отсутствии шума оценка максимального правдоподобия параметра корреляционной функции может быть осуществлена с бесконечно высокой точностью при любом времени анализа и любых размерах приемника. Этот вывод является следствием сингулярности рассматриваемого случая [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. М. Лямшев, С. А. Салосина.* О влиянии размеров приемника на результаты измерения спектра пристеночных пульсаций давления в пограничном слое. Акуст. ж., 1966, *12*, 2, 261–263.
2. *P. H. White.* Effects of tranducers size and surface sensitivity on the measurement of boundary layer pressure. J. Acoust. Soc. America, 1967, *41*, 5, 1358–1363.
3. *В. С. Петровский.* Осреднение турбулентных пульсаций давления приемником звука со случайным распределением чувствительности. Акуст. ж., 1973, *19*, 3, 404–410.
4. *Г. С. Нахмансон.* О точности оценки параметра функции корреляции нормального случайного процесса при приеме на фоне белого шума. Радиотехника и электроника, 1971, *16*, 8, 1492–1494.
5. *Д. Е. Вакман.* Асимптотические методы в линейной радиотехнике. М., «Сов. радио», 1962.
6. *D. Slepian.* Some comments on the detection of Gaussian signals in Gaussian noise. IRE Trans., 1958, IT-4, 2, 65–68.

Северо-Западный заочный политехнический институт

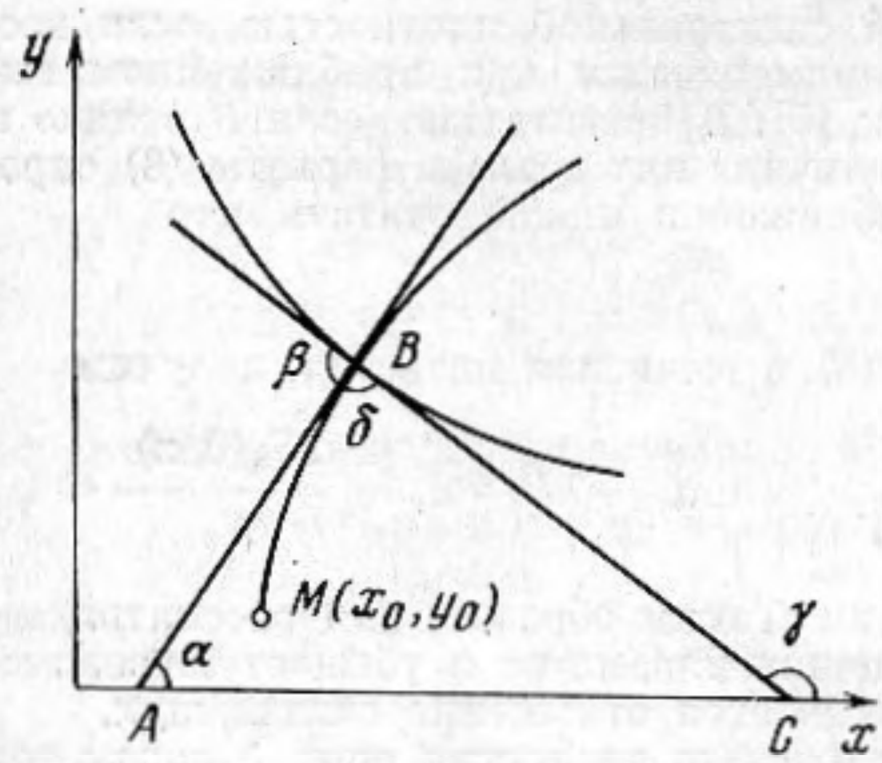
Поступила 29 октября 1973 г.

УДК 534.222.1

К ВОПРОСУ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЗВУКА В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

В. И. Чупрынин

При изучении распространения звуковых волн наряду с волновыми методами широко используется метод лучевого приближения. Определение геометрии акустического луча в случае, когда скорость звука зависит от одной координаты, сводится к решению известного дифференциального уравнения



$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{n^2(y)}{\cos^2 \alpha_0} - 1}, \tag{1}$$

где $n(y) = c_0/c(y)$, c_0 и $c(y)$ — скорости звука в точках с координатами (x_0, y_0) и (x, y) соответственно, α_0 — угол между осью x и касательной к лучу в точке (x_0, y_0). Уравнение (1) интегрируется в зависимости от вида функции численно или аналитически.

Ниже получено дифференциальное уравнение луча для неоднородной среды, характеризуемой произвольно изменяющейся в плоскости x, y скоростью звука. Получить интеграл этого уравнения в общем виде не удается, поэтому выбрано несколько случаев задания скорости звука, для которых это уравнение возможно проинтегрировать.

Представим распределение скорости звука в плоскости x, y в виде

$$c(x, y) = \frac{c_0}{n(x, y)}. \tag{2}$$

Акустический луч выходит из точки $M(x_0, y_0)$ (фигура). В любой точке луча

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha, \tag{3}$$

где α – угол между осью x и касательной к лучу в данной точке. Проведем через произвольно выбранную точку B линию равных скоростей и построим касательную к этой линии в точке пересечения луча и изолинии скорости. Угол наклона этой касательной к оси x обозначим γ. Выразим α через γ и β, где β – угол между касательной к лучу и касательной к изолинии скорости. Результаты дальнейших выводов не изменятся, если вместо β ввести угол $\delta=\pi-\beta$. Из треугольника ABC следует, что $\alpha=\gamma+\beta-\pi$, а

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}. \tag{4}$$

Выразим $\operatorname{tg}\beta$ и $\operatorname{tg}\alpha$ через координаты x, y и β_0 – угол между касательной к лучу и к изолинии скорости в точке M. Согласно закону Снеллиуса $n(x, y)\cos\beta=\cos\beta_0$, и, следовательно,

$$\operatorname{tg}\beta=\sqrt{K^2n^2-1}, \tag{5}$$

где $K=1/\cos\beta_0$. Здесь и в дальнейшем подразумевается, что n является функцией x и y. Тангенс угла наклона касательной к линии равных скоростей получается дифференцированием выражения (2) по x, считая y функцией от x, а $c(x, y)$ – постоянной величиной

$$-\operatorname{tg}\gamma=\frac{\partial n/\partial x}{\partial n/\partial y}. \tag{6}$$

Объединяя соотношения (3) – (6), получаем дифференциальное уравнение луча

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{K^2n^2-1}-\dfrac{\partial n}{\partial x}\Big/\dfrac{\partial n}{\partial y}}{1+\sqrt{K^2n^2-1}\,\dfrac{\partial n}{\partial x}\Big/\dfrac{\partial n}{\partial y}}. \tag{7}$$

При $n=n(y)$ это уравнение переходит в уравнение (1).

Для практического расчета луча удобнее выразить $1/\cos^2\beta_0$ через углы α_0 и γ_0 в точке выхода луча (x_0, y_0). С помощью соотношения (4) получаем

$$\frac{1}{\cos^2\beta_0}=1+\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha_0-\operatorname{tg}\gamma_0}{1+\operatorname{tg}\alpha_0\operatorname{tg}\gamma_0}\right)^2,$$

где α_0 – произвольно заданный угол выхода луча из начальной точки и

$$\gamma_0=-\left(\frac{\partial n}{\partial x}\Big/\frac{\partial n}{\partial y}\right)_{x=x_0,\ y=y_0}.$$

Рассмотрим три случая задания показателя преломления как функции двух координат, для которых уравнение (7) интегрируется

$$n=f(ax+by+d), \tag{8}$$

$$n=f\left(\frac{ax+a_1}{by+b_1}\right), \tag{9}$$

$$n=f[(ax+a_1)(by+b_1)], \tag{10}$$

где f – любая функция, коэффициенты a, b, d, a_1, b_1 могут иметь как положительные, так и отрицательные значения. Уравнение (7) для каждой из этих функций соответственно принимает вид

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{K^2n^2-1}-a/b}{1+\sqrt{K^2n^2-1}\,a/b}, \tag{11}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{K^2n^2-1}+a(by+b_1)/b(ax+a_1)}{1-\sqrt{K^2n^2-1}\,a(by+b_1)/b(ax+a_1)}, \tag{12}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{K^2n^2-1}-a(by+b_1)/b(ax+a_1)}{1+\sqrt{K^2n^2-1}\,a(by+b_1)/b(ax+a_1)} \tag{13}$$

Вводя вместо y новые переменные $u=ax+by+d$ и $u=(ax+a_1)/(by+b_1)$ соответственно для уравнений (11) и (12), получаем уравнения с разделяющимися переменными, которые после интегрирования принимают вид

$$\int \frac{du}{\sqrt{K^2 f^2(u) - 1}} + \frac{a}{b} u - \frac{a^2 + b^2}{b} x = c_1, \tag{14}$$

$$\int \frac{b\,du}{(b^2u^2 + a^2)\sqrt{K^2 f^2(u) - 1}} + \frac{a}{2} \ln \left(\frac{a^2}{u^2} + b^2 \right) + \frac{1}{a} \ln (ax + a_1) = c_2. \tag{15}$$

Уравнение (13), если ввести в него новые переменные $u = ab(ax + a_1)(by + b_1)$ и $v = b^2(ax + a_1)^2$, приводится к уравнению в полных дифференциалах следующего типа:

$$2 \left(\frac{1}{\sqrt{K^2 f^2 \left(\frac{u}{ab} \right) - 1}} + \frac{u}{v} \right) du - \left(1 + \frac{u^2}{v^2} \right) dv = 0.$$

Это уравнение интегрируется в квадратурах

$$\int \frac{2\,du}{\sqrt{K^2 f^2 \left(\frac{u}{ab} \right) - 1}} + \frac{u^2}{v} - v = c_3. \tag{16}$$

Постоянные интегрирования c_1, c_2 и c_3 в уравнениях (14) – (16) определяются из начальных условий.

Для простейших видов функции f решение уравнений (14) – (16) получается в аналитической форме.

Дальневосточный государственный университет

Поступила 8 февраля 1974 г.