УДК 534.232

ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ЗВУКОВЫХ ВОЛН ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ ПОРШНЕМ

В. П. Докучаев

Сравнительный анализ исследований по излучению звука осциллирующим поршнем содержится в работах [1, 2]. Ниже дано решение задачи о генерации волн конечной амплитуды поршнем, которое обобщает известное решение Бесселя – Фубини и описывает эволюцию плоской волны от границы поршня до места образования разрыва в волне. Обсуждается движение твердых частиц в поле этой волны.

Уравнение для возмущений скорости v в простой волне, распространяющейся в идеальном газе в направлении оси x, имеет вид [3]

$$\frac{\partial v}{\partial t}+(c_0+\varepsilon v)\frac{\partial v}{\partial x}=0, \tag{1}$$

где c_0 – скорость звука, $\varepsilon=(\gamma+1)/2$ и γ – отношение теплоемкостей. Граничное условие на поверхности движущегося поршня будет

$$v(x,t)\,|_{x=a(t)}=\frac{da}{dt}, \tag{2}$$

где $a(t)$ – закон движения поршня. Метод характеристик дает решение задачи (1), (2) только в неявной параметрической форме [3]

$$v(x,t)=\frac{da(\tau)}{d\tau},\qquad \tau-t=\frac{a(\tau)-x}{c_0+\varepsilon\dfrac{da}{d\tau}}. \tag{3}$$

Для акустики представляет интерес гармонический закон движения $a(t)=a_0(1-\cos\omega t)$, когда

$$\frac{v(x,t)}{c_0}=M\sin(\omega\tau),\qquad \omega(t-\tau)=\frac{k(x-a)+M\cos\omega\tau}{1+\varepsilon M\sin(\omega\tau)}, \tag{4}$$

где $k=\omega/c_0$, $M=(a\omega/c_0)$ – акустическое число Маха. При условии $\varepsilon M\ll 1$ уравнения (4) принимают вид

$$v/c_0=M\sin(\omega\tau),\qquad \omega\tau+M\cos(\omega\tau)-\sigma\sin(\omega\tau)=\omega\left(t-\frac{x-a_0}{c_0}\right). \tag{5}$$

Здесь $\sigma=\varepsilon kM(x-a)$ – параметр, связанный с нелинейностью свойств среды.

Фубини пренебрег членом $M\cos(\omega,\tau)$ в уравнении (5) и получил приближенное решение задачи. Получим точное решение уравнений (5) с сохранением этого члена. Для этого введем новые переменные и параметры

$$\alpha=\sqrt{\sigma^2+M^2},\quad \theta=\operatorname{arctg}(M/\sigma),\quad \varphi=\omega\tau-\theta, \tag{6}$$

$$\beta=\omega\left(t-\frac{x-a}{c_0}\right)-\theta.$$

В результате уравнения (5) преобразуются к виду

$$v/c_0=M\sin(\varphi+\theta),\qquad \varphi-\alpha\sin\varphi=\beta. \tag{7}$$

Здесь второе уравнение является известным трансцендентным уравнением Бесселя – Лагранжа и имеет решение [4]

$$\sin\varphi=\frac{2}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}J_n(n\alpha)\frac{\sin(n\beta)}{n},\qquad \cos\varphi=-\frac{\alpha}{2}+2\sum_{n=1}^{\infty}J_n'(n\alpha)\frac{\cos(n\beta)}{n}, \tag{8}$$

где J_n и J_n' – бесселева функция и ее производная. С помощью (7), (8) находим окончательный вид решения

$$\frac{v(x,t)}{c_0}=-\frac{M^2}{2}+\frac{2M^2}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_n'(n\alpha)}{n}\cos(n\beta)+ \tag{9}$$

$$+\frac{2\sigma M}{\alpha^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_n(n\alpha)}{n}\sin(n\beta).$$

Последний ряд здесь дает решение Фубини при условиях $\sigma \gg M$, $x \gg a$ (см., например, работу [2]):

$$\frac{v_F}{c_0} = 2M \sum_{n=1}^{\infty} J_n(n\sigma) \frac{\sin[n\omega(t - x/c_0)]}{n\sigma}. \tag{10}$$

Ряды в формуле (9) сходятся при $\alpha \leqslant 1$, однако производные скорости $v(x, t)$ по x и t при $\alpha = 1$ выражаются расходящимися рядами [4]. Из условия $\alpha = 1$ находим координату x_p образования разрыва

$$x_p = a + \lambda\sqrt{1 - M^2}\,(\gamma + 1)\pi M, \tag{11}$$

$$\lambda = c_0/2\pi\omega.$$

Обсудим физический смысл решения (9). При условии $\sigma \ll M$ (9) переходит в точное решение линейного уравнения (1) с $\varepsilon = 0$ и с полным граничным условием (2) при $a = a_0(1 - \cos\omega t)$

$$\frac{v}{c_0} = -\frac{M^2}{2} + 2M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n'(nM)}{n} \cos n\left[\omega\left(t - \frac{x - a_0}{c_0}\right) - \frac{\pi}{2}\right]. \tag{12}$$

Это означает, что возникновение гармоник основной частоты ω, а также нулевой гармоники, определяющей возвратное течение к поршню $v_0 = -c_0M^2/2$, происходит в области, примыкающей к поверхности поршня, вследствие учета движения этой поверхности в граничном условии (2).

Заметим, что задача о решении уравнения (1) при $\varepsilon = 0$ с граничным условием (2) является по существу параметрической. Действительно, если ввести новую независимую переменную $y = x - a(t)$, то соотношения (1) и (2) дают линейное параметрическое уравнение с условием на неподвижной границе

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left(c_0 - \frac{da}{dt}\right)\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad v(y, t)\,|_{y=0} = \frac{da}{dt}.$$

В пределе $M \to 0$ в формуле (12) остается только первая гармоника

$$v_1(x, t) = a_0\omega \sin\omega\left(t - \frac{x - a_0}{c_0}\right). \tag{13}$$

Именно это решение, а не решение (12) принято считать линейным, так как амплитуды обертонов в (12) нелинейно зависят от акустического числа Маха $v_n \sim cM^n$. По мере удаления волн от поршня становится существенным кумулятивный эффект слабой нелинейности свойств среды. С ростом параметра $\sigma \sim x$ возрастает роль второго ряда в формуле (9), а при $\sigma \gg M$ его члены значительно превосходят соответственные гармоники первого ряда, обусловленные только параметрическим граничным условием.

Найдем средние значения скорости, ее квадрата и куба за период $T = 2\pi/\omega$. Для этого воспользуемся суммами, которые вычисляются стандартным способом [4]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n'^2(nx)}{n^2} = \frac{2 - x^2}{8}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n^2(nx)}{n^2} = \frac{x^2}{4}, \quad x \leqslant 1. \tag{14}$$

С помощью сумм (14) из выражения (9) находим

$$\frac{\langle v\rangle}{c_0} = -\frac{M^2}{2}; \quad \frac{\langle v^2\rangle}{c_0^2} = \frac{M^2}{2}; \quad \frac{\langle v^3\rangle}{c_0^3} = -\frac{3M^4}{4}\left(1 - \frac{M^2}{3}\right). \tag{15}$$

В простой волне известна связь давления p, плотности ρ и температуры T со скоростью v [3]. Используя эти связи и соотношения (15), получим

$$\frac{\langle p - p_0\rangle}{p_0} = \frac{\gamma(\gamma - 3)M^2}{8}; \quad \frac{\langle \rho - \rho_0\rangle}{\rho_0} = -\frac{(\gamma + 1)M^2}{8}; \tag{16}$$

$$\frac{\langle T - T_0\rangle}{T_0} = \frac{(5 - \gamma)(1 - \gamma)}{8} M^2.$$

Выражения (16) совпадают с результатами, полученными путем усреднения по времени возмущений p и ρ в простой волне для эйлеровых переменных [5].

Заметим, что решение Бесселя – Фубини (15) не содержит нулевой гармоники и не дает правильных значений величин (15), (16). Интенсивность излучения звука поршнем $\langle I \rangle$ и средний поток массы $\langle j \rangle$ также получаются с помощью выражений (15), 16)

$$I = \left\langle v \left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{\gamma p}{\gamma - 1} \right) \right\rangle = \frac{\rho_0 c^3}{2} M^2, \quad \langle \rho v \rangle = 0, \tag{17}$$

Рассмотрим динамику шарообразной твердой частицы радиуса R, взвешенной в газе (аэрозоль) и помещенной близ осциллирующего поршня на расстоянии L. Будем считать $a_0 < L < x_p$ (11), $R < \lambda$ и число Рейнольдса $\mathrm{Re} = (\rho_0 \langle u \rangle R_\eta^{-1}) \ll 1$, η – вязкость, u – скорость частицы, усредненная за период $T = 2\pi/\omega$. Эта скорость определяется действием на частицу стоксовой силы вязкости и силы радиационного давления [1]. Усредненное уравнение движения частицы с массой m имеет вид

$$m \frac{du}{dt} = -6\pi\eta R(u - \langle v \rangle + 4\pi\rho_0 R^2 \left(\frac{\omega R}{c} \right)^4 \langle v^2 \rangle. \tag{18}$$

При начальном условии $u = 0$ при $t_0 = (L/c_0)$, когда в момент прихода волны частица неподвижна, решением этого уравнения является

$$u(t) = (\langle v \rangle + A \langle v^2 \rangle) \left[1 - \exp\left(-\frac{t - t_0}{t_1} \right) \right], \tag{19}$$

$$A = \frac{2\rho_0 \omega^4 R^5}{3 c_0^4 \eta}, \quad \langle v \rangle = -c_0 \frac{M^2}{2}, \quad \langle v^2 \rangle = c_0^2 \frac{M^2}{2}, \quad t_1 = \frac{m}{6\pi\eta R}.$$

Следовательно, при условии

$$\frac{2\rho_0 \omega^4 R^5}{3 c_0^3 \eta} > 1 \tag{20}$$

действие радиационного давления преобладает над влиянием вязкости и частица двигается от поршня при $t > t_0$. При обратном знаке неравенства в формуле (20) частица будет двигаться к поршню со скоростью, пропорциональной $|\langle v \rangle|$. Таким образом, наблюдая за движением частиц с различными размерами R, можно измерять средние величины $\langle v \rangle$ и $\langle v^2 \rangle$.

Благодарю К. А. Наугольных, Л. А. Островского и И. А. Урусовского за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. К. Зарембо, В. А. Красильников.* Введение в нелинейную акустику. М. «Наука», 1966.
2. *D. I. Blackstok.* Propagation Plane Sound Waves of Finite Amplitude in Nondissipative Fluids. J. Acoust. Soc. Amer., 1962, *34*, 1, 9–29.
3. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Механика сплошных сред, М.—Л., Гостехиздат, 1953.
4. *Г. Н. Ватсон.* Теория бесселевых функций, т. I, М., Изд-во иностр. лит., 1949.
5. *Н. Н. Андреев.* О некоторых величинах второго порядка в акустике. Акуст. ж., 1955, *1*, 1, 3—12.

Научно-исследовательский
радиофизический институт,
Горький

Поступила
3 июля 1972 г.
После переработки
3 сентября 1973 г.