АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXI 1975 Вып. 1

УДК 534.26

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ФОРМИРОВАНИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ГОЛОГРАФИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ СКАЛЯРНЫМ ПОЛЕМ

С. А. Васильев

Рассматривается в строгой постановке задача о формировании действительного голографического изображения точечного предмета скалярным полем при бесконечности идеальной плоской голограммы. Найдено в конечном виде точное решение на оптической оси и в фокальной плоскости, а в остальной области — в форме, содержащей линейную комбинацию удобных для расчета однократных интегралов, взятых в конечных пределах, методы анализа которых хорошо разработаны в теории направленности антенн. Показано существенное нарушение степени тождественности обращенного во времени предметного поля и поля, формирующего действительное изображение предмета. Показано, что интенсивность последнего поля в точке, являющейся изображением источника, минимальна, если источник излучает сферическую волну ненулевого ранга. Уточнен характер изменения фазы в фокальной точке. Приведены примеры определения с помощью найденного решения предельной разрешающей способности голограммы по глубине и вдоль фокальной плоскости. Полученные результаты наиболее существенны для звуковой и особенно сейсмической голографии.

Пусть в точке O_1 (принятой за начало координат) нижнего полупространства D_1 (фиг. 1) расположен источник (точечный предмет), излучающий поле F, удовлетворяющее уравнению

$$\Delta F=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \tag{1}$$

всюду вне O_1, а $v=\text{const}$. Действительное голографическое изображение источника формируется в D_1 на втором этапе голографического процесса, когда из D_1 изъят источник, в результате искусственного создания на стороне плоской голограммы, обращенной к D_1, инвертированного во времени предметного поля $\overline{F}|_S$, где S — плоскость голограммы (фиг. 1); черта означает операцию инверсии времени, т. е. $\overline{F}(x, y, z, t)\equiv F(x, y, z, -t)$. Апертуру голограммы будем считать бесконечной. Таким образом, поле F_1, создающее действительное изображение, удовлетворяет уравнению (1) всюду в D_1, граничному условию $F_1|_S=\overline{F}|_S$ и не имеет источников в бесконечности.

Нередко высказывается общий принцип [1], согласно которому «...действительное изображение, полученное с помощью голограммы, всегда комплексно сопряжено исходному объекту. Такое изменение фазы не влияет на интенсивность изображения, но может быть существенным для ряда приложений, в которых используется не только амплитуда, но и фаза изображения». В настоящей работе находится точное решение F_1, что позволяет уточнить изложенный принцип и осуществить анализ предельной разрешающей способности голограмм по глубине и в фокальной плоскости $z=0$. Найденное решение пригодно для анализа импульсных и мо-

нохроматических полей. Полученные выводы наиболее существенны для звуковой и особенно сейсмической голографии.

Чтобы выяснить степень тождественности полей $\bar{F}_1$ и F, удобно сразу искать функцию $F_2 \equiv \bar{F}_1$, удовлетворяющую уравнению (1) всюду в D_1, граничному условию $F_2|_S = F|_S$ и не имеющую стоков в бесконечности.

Отсутствие источников поля F_1 в бесконечности означает его подчиненность принципу излучения. Поэтому решение F_1, единственно [2], и в силу линейности уравнения (1) можно использовать принцип суперпозиции:

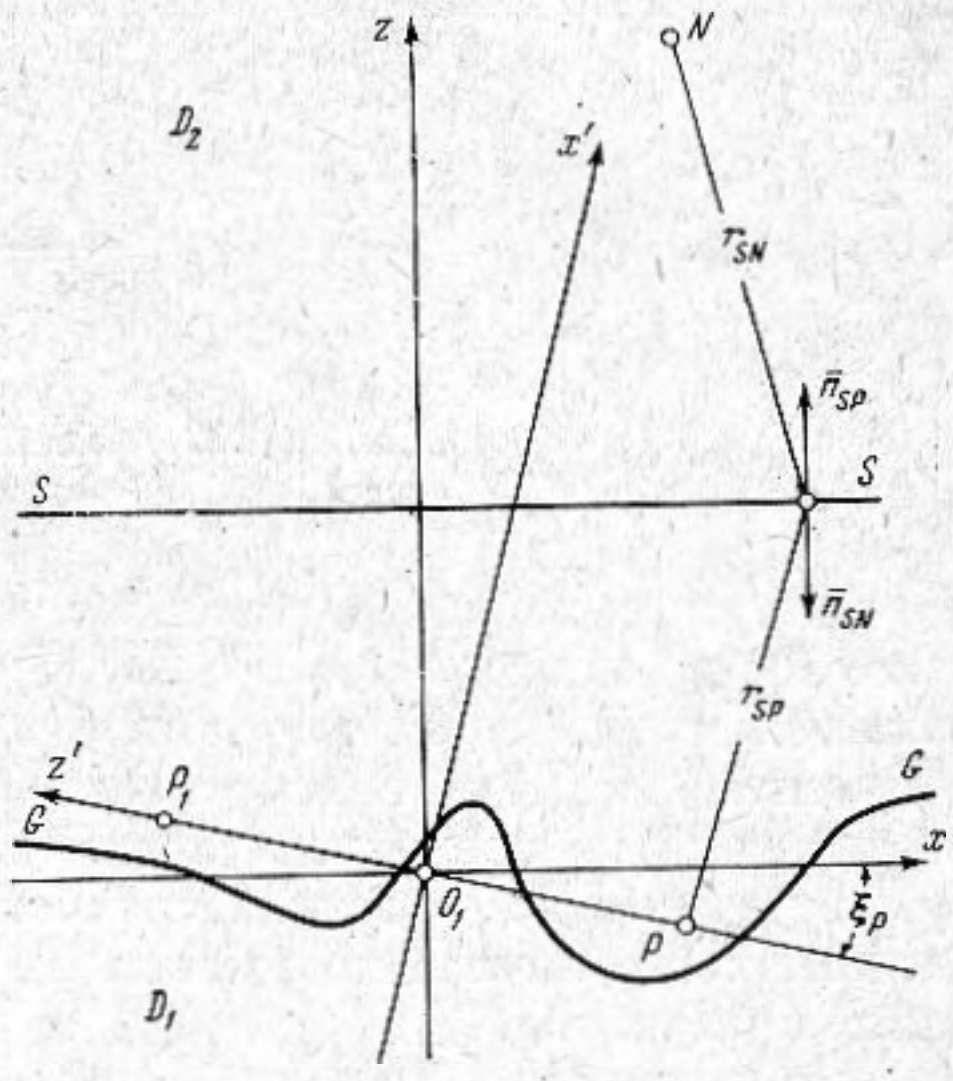
$$F_2 = \sum_{n,m} K_{nm} F_{2nm},$$

если $F = \sum_{n,m} K_{nm} F_{nm}$, где F_{2nm} — решение F_2 при $F = F_{nm}$, F_{nm} — сферическая волна порядка n ранга m,

(2) $$F_{nm} \equiv \chi_{nm}(\theta, \varphi) \sum_{\nu=0}^{n} \frac{B_{n\nu}}{r^{\nu+1}} f_\nu\left(t - \frac{r}{v}\right),$$

(3) $$\chi_{nm}(\theta, \varphi) \equiv b_{nm} P_n^{|m|}(\cos\theta) \exp(jm\varphi),$$

$$b_{nm} \equiv \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2n+1}{\pi} \cdot \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}},$$



Фиг. 1

r, θ, φ — полярные координаты, углы θ и φ отсчитываются от осей z и x соответственно, $P_n^{|m|}$ — присоединенные функции Лежандра первого рода, $B_{n\nu} \equiv (n+\nu)!/\nu!(n-\nu)!2^\nu$, $f_{\nu-1}(t) \equiv (1/v)\, df_\nu/dt$.

Будем искать $F_{2nm}(x, y, z, t)$ при условии, что функции $f_\nu(t)$ и df_ν/dt ограничены. Проведем через любую, но фиксированную точку $P \neq O_1, P \in D_1$ ось z' (фиг. 1) так, что $\partial z'/\partial z \geqslant 0$, ось x' так, что она лежит в плоскости zz', и ось y' так, что система осей (xyz) вращением g_P переводится в систему осей $(x'y'z')$. Обозначим символами $F_{nm}{}^P$ и $\chi_{nm}{}^P$ функции, описываемые формулами (2) и (3) соответственно, если угол θ отсчитывается от оси z', а угол φ — от оси x'. Согласно теории групп [3], $\chi_{nm} = \sum_{i=-n}^{+n} a_{mi}{}^n(g_P)\chi_{ni}{}^P$, где $a_{mi}{}^m(g_P)$ — известные матричные элементы (приведенные на стр. 181 работы [3]) унитарного неприводимого представления веса n группы вращений. Следовательно, в любой точке $Q \in D_1$, в том числе и в самой точке P, мы имеем

(4) $$F_{nm}(Q, t) = \sum_{i=-n}^{+n} a_{mi}{}^n(g_P) F_{ni}{}^P(Q, t), \quad F_{2nm}(Q, t) = \sum_{i=-n}^{+n} a_{mi}{}^n(g_P) F_{2ni}^P(Q, t),$$

где F_{2nm}^P — решение F_2 при $F = F_{nm}{}^P$. Теперь, чтобы найти значение поля F_{2nm} в точке $Q = P$, достаточно определить величину $F^P{}_{nm}$ в этой точке. Найдем $F_{2nm}^P(P, t)$.

Предварительно введем ряд специальных обозначений: h — расстояние от O_1 до поверхности S; G — поверхность, отделяющая точку O_1 от точки P и поверхности S, расположенная в полосе $\text{const}<z<h$; D_2 — верхнее полупространство; N и P_1 — точки, расположенные симметрично точке P относительно поверхности S и начала координат соответственно (фиг. 1), Q — любая текущая точка пространства при фиксированной точке P; x_Q, y_Q, z_Q — ее координаты; Ψ — любая поверхность; r_Q и $r_{\Psi Q}$ — расстояния от точки Q до начала координат и до точек поверхности Ψ соответственно, $\bar{n}_{\Psi Q}$ — нормаль к Ψ, внешняя по отношению к той области, где расположена точка Q,

$$\text{(5)} \qquad \tilde{A}_{\Psi Q}(F) \equiv -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Psi} \frac{1}{v r_{\Psi Q}} \frac{\partial r_{\Psi Q}}{\partial \bar{n}_{\Psi Q}} \left\{\frac{\partial F}{\partial t}\right\} + \frac{\partial \dfrac{1}{r_{\Psi Q}}}{\partial \bar{n}_{\Psi Q}}\{F\} \quad d\Psi,$$

$$\text{(6)} \qquad \tilde{J}_{\Psi Q}(F) \equiv \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Psi} \frac{1}{r_{\Psi Q}} \left\{\frac{\partial F}{\partial \bar{n}_{\Psi Q}}\right\} d\Psi + \frac{1}{2}\tilde{A}_{\Psi Q}(F),$$

где фигурные скобки $\{\}$ означают, что стоящая в них функция берется в момент времени $(t+r_{\Psi Q}/v)$; $A_{\Psi Q}(F)$ и $J_{\Psi Q}(F)$ — интегралы, аналогичные интегралам (5) и (6) соответственно и отличные от последних заменой аргумента $(t+r_{\Psi Q}/v)$ на аргумент $(t-r_{\Psi Q}/v)$ и изменением знака перед производной по времени. Условимся, что если, например, $Q=P$, а $\Psi=S$, то x_P, r_P, $\tilde{J}_{SP}(F), \ldots$ обозначают соответственно координату x точки P, ее расстояние до начала координат, интеграл (4), взятый по поверхности S для точки P, и т. д.

Докажем, что

(7а)

$$F^{P}_{2nm}(P,t) = U_{nm}(P,t) + W_{nm}(P,t) + \tilde{J}_{GN}(F_{nm}{}^{P}) \quad \text{при } p \in D_1,\ z_P \neq 0;$$

(7б)

$$F^{P}_{2nm}(P,t) = U_{nm}(P,t)\,|_{z_P=+0} + W_{nm}(P,t)\,|_{z_P=+0} + \tilde{J}_{GN}(F_{nm}{}^{P}) \quad \text{при } r_P \neq 0, z_P = 0;$$

$$\text{(7в)} \qquad F_{2nm}(O_1,t) = \lim_{Q\to O_1} F_{2nm}(Q,t);$$

$$\text{(8)} \qquad \tilde{J}_{GN}(F^{P}_{nm}) = -\sum_{\rho=-n}^{+n} a^{n}_{m\rho}(g_{PN})\, W_{n\rho}(N,t);$$

(9а)

$$W_{nm}(P,t)\,|_{z_P=+0} = b_{nm}\begin{cases} -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n}\left(\frac{f_\nu\left(t-\frac{r_P}{v}\right)}{r_P^{\mu+1}}\sum_{\beta=0}^{\leqslant\frac{n-\nu}{2}} C_{n\nu\beta}\right) - \\ -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n}\left(\frac{f_\nu\left(t+\frac{r_P}{v}\right)}{r_P^{\nu+1}}\sum_{\beta=0}^{\leqslant\frac{n-\nu}{2}} (-1)^{\delta} C_{n\nu\beta}\right) \\ \text{при } m=0, \quad r_P \neq 0; \\ -\dfrac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\pi m r_P}\displaystyle\int_0^{\pi} P_n^{|m|}(\cos\theta)\frac{df_\theta\left(t-\frac{r_P}{v}\cos\theta\right)}{d\theta}\,d\theta \\ \text{при нечетном } m\neq 0, \quad r_P\neq 0; \\ 0 \text{ при четном } \quad m\neq 0, \quad r_P \neq 0, \end{cases}$$

(9б)

где g_{PN} — вращение, переводящее оси (x', y', z'), связанные с точкой P, в аналогичные оси, связанные с точкой N; $\delta \equiv n-\nu-2\beta$,

$$U_{nm}(P,t) \equiv \begin{cases} \chi_{nm}(\theta=0,\varphi) \sum\limits_{\nu=0}^{n} \dfrac{B_{n\nu}}{r_P^{\nu+1}} f_\nu\left(t-\dfrac{r_P}{v}\right) \equiv F_{nm}^P(P,t) & \text{при} \quad z_P>0; \quad (10а) \\ \chi_{nm}(\theta=0,\psi) \sum\limits_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu+1} \dfrac{B_{n\nu}}{r_P^{\nu+1}} f_\nu\left(t+\dfrac{r_P}{v}\right) & \text{при} \quad z_P<0 \quad (10б) \end{cases}$$

$$W_{nm}(Q,t) = b_{nm} \begin{cases} \sum\limits_{\nu=0}^{n} \sum\limits_{\beta=0}^{\leqslant \frac{n-\nu}{2}} C_{n\nu\beta} I_{n\nu\beta}(Q,t) & \text{при} \quad x_Q^2+y_Q^2 \neq 0, \ z_Q>0, \ m=0; \quad (11а) \\ -\sum\limits_{\nu=0}^{n} \left(\dfrac{f_\nu(t)}{r_Q^{\nu+1}} \sum\limits_{\beta=0}^{\leqslant \frac{n-\nu}{2}} C_{n\nu\beta} P_\delta^0(0) \right) & \text{при} \quad x_Q=y_Q=0, \ z_Q>0, \ m=0; \quad (11б) \\ I_{nm}(Q,t) & \text{при} \quad x_Q^2+y_Q^2 \neq 0, \ z_Q>0, \ m \neq 0; \quad (11в) \\ 0 & \text{при} \quad x_Q=y_Q=0, \ z_Q>0, \ m \neq 0; \quad (11г) \end{cases}$$

(12) $$W_{nm}(P,t) \equiv (-1)^{n+1} W_{nm}(P_1,t) \text{ при } z_P<0;$$

(13) $$I_{n\nu\beta}(Q,t) \equiv \frac{1}{\pi r_Q^{\nu+1}} \int\limits_{\xi}^{\pi-\xi} P_\sigma^0(\cos\theta) \frac{d\alpha}{d\theta} f_\nu\left(t \frac{r_Q}{v} \cos\theta\right) d\theta$$

(14) $$I_{nm}(Q,t) \equiv \frac{1}{m\pi r_Q} \int\limits_{\xi}^{\pi-\xi} \frac{d[\sin m\alpha P_n^{|m|}(\cos\theta)]}{d\theta} f_0\left(t-\frac{r_Q}{v}\cos\theta\right) d\theta;$$

(15) $$\alpha \equiv \alpha(\xi,\theta) \equiv \pi/2 + \arcsin \operatorname{tg}\xi/\operatorname{tg}\theta;$$

$$C_{n\nu\beta} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \beta=0, \ \nu=0; \\ \prod\limits_{\sigma=0}^{\nu=1} (2n-2\sigma-1) & \text{при} \quad \beta=0, \ \nu>0; \\ 0 & \text{при} \quad \beta>0, \ \nu=0; \\ (2n-1)C_{n-1,\nu-1,\beta}+C_{n-2,\nu,\beta-1} & \text{при} \quad \beta>0, \ \nu>0; \end{cases}$$

ξ — угол наклона отрезка O_1Q к плоскости xy; по определению $0 \leqslant \xi \leqslant \pi/2$.

При доказательстве используются следующие равенства, справедливость которых показана в одной из предыдущих работ автора [4]:

(16) $$\mathcal{J}_{SQ}(F) = \mathcal{J}_{GQ}(F) \text{ при } Q \in D_2;$$

(17) $$\mathcal{J}_{GN}(F_{nm}{}^N) = -W(N,t) \text{ при } z_N>0, \ x_N^2+y_N^2 \neq 0;$$

$$J_{SP}(F_{nm}^{P}) = U_{nm}(P,t) +$$

$$\begin{cases} W_{nm}(P,t) & \text{при } x_P^2+y_P^2\neq 0,\quad z_P>0; \quad (18а) \\ \sum\limits_{\nu=0}^{n}\sum\limits_{\beta=0}^{\leqslant\frac{n-\nu}{2}} C_{n\nu\beta} i_{n\nu\beta}(P,t) & \text{при } x_P^2+y_P^2\neq 0,\quad m=0,\quad z_P<0; \quad (18б) \\ i_{nm}(P,t) & \text{при } x_P^2+y_P^2\neq 0,\quad m\neq 0,\quad z_P<0, \quad (18в) \end{cases}$$

где F_{nm}^{N} — сферическая волна (2), углы θ и φ которой отсчитываются от осей (x', y', z'), связанных с точкой N;

$$i_{n\nu\beta}(P,t) = \frac{(-1)^{\nu+1}}{\pi r_P^{\nu+1}} \int\limits_{\xi}^{\pi-\xi} P_\delta^0(\cos\theta)\frac{d\alpha}{d\theta} f_\nu\left(t+\frac{r_P}{v}\cos\theta\right)d\theta;$$

(19)

$$i_{nm}(P,t) = \frac{1}{m\pi r_P}\int\limits_{\xi}^{\pi-\xi}\frac{d[\sin m\alpha P_n^{|m|}(\cos\theta)]}{d\theta} f_0\left(t+\frac{r_P}{v}\cos\theta\right)d\theta.$$

Приведем доказательство. Интеграл $A_{SQ}(\overline{F}_{mn}^{P})$, как функция координат точки Q и времени, удовлетворяет уравнению (1) всюду в D_1 и воспроизводит граничное условие $A_{SQ}(\overline{F}_{mn}^{P})\to\overline{F}_{mn}^{P}(Q,t)$ при $Q\to S$ [2]. Из дальнейшего будет ясна подчиненность этого интеграла принципу излучения. Тогда в силу единственности решения $\overline{F}_{2mn}^{P}(Q,t)=A_{SQ}(\overline{F}_{nm}^{P})$. После громоздких, но не сложных выкладок можно убедиться, что $F_{2mn}^{P}(Q,t)=$ $=\tilde{A}_{SQ}(\overline{F}_{nm}^{P})=\tilde{A}_{SQ}(F_{nm}^{P})$; в частности, в самой точке P

$$F_{2nm}^{P}(P,t)=\tilde{A}_{SP}^{P}(F_{nm}^{P}). \quad (20)$$

Очевидно, $\tilde{A}_{SP}(F)=\tilde{A}_{SN}(F)$ для любой функции F, так как $r_{SP}=r_{SN}$, $\partial r_{SP}/\partial\overline{n}_{SP}=\partial r_{SN}/\partial\overline{n}_{SN}$ (фиг. 1). При этом $N\in D_2$, поэтому, согласно формуле (16), $\mathcal{J}_{SN}(F)=\mathcal{J}_{GN}(F)$. Поскольку $\overline{n}_{SP}=-\overline{n}_{SN}$ и в силу определения (6),

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\frac{1}{r_{SP}}\left\{\frac{\partial F}{\partial\overline{n}_{SP}}\right\}dS=\mathcal{J}_{SP}(F)-\frac{1}{2}\tilde{A}_{SP}(F)=-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\frac{1}{r_{SN}}\left\{\frac{\partial F}{\partial\overline{n}_{SN}}\right\}dS=$$

$$=\frac{1}{2}\tilde{A}_{SN}(F)-\mathcal{J}_{SN}(F)=\frac{1}{2}\tilde{A}_{SP}(F)-\mathcal{J}_{GN}(F).$$

Отсюда $\tilde{A}_{SP}(F)=\mathcal{J}_{SP}(F)+\mathcal{J}_{GN}(F)$ и, в частности,

$$\tilde{A}_{SP}(F_{nm}^{P})=\mathcal{J}_{SP}(F_{nm}^{P})+\mathcal{J}_{GN}(F_{nm}^{P}). \quad (21)$$

Подстановки выражения (18а) в формулу (21) и выражения (21) в формулу (20) показывают справедливость формулы (7а) при $x_P^2+y_P^2\neq 0$, $z_P>0$.

Как известно [3], $F_{nm}^{P}=\sum\limits_{\rho=-n}^{\pm n} a_{m\rho}^{n}(g_{PN})F_{n\rho}^{N}$. Следовательно,

$$\mathcal{J}_{GN}(F_{nm}^{P})=\sum_{\rho=-n}^{+n} a_{m\rho}^{n}(g_{PN})\mathcal{J}_{GN}(F_{n\rho}^{N}). \quad (22)$$

Но по определению $x_N=x_P$, $y_N=y_P$, $z_N=(2h-z_P)>0$. Поэтому, подставив выражение (17) в формулу (22), получим формулу (8) при $x_P^2+y_P^2\neq 0$.

Согласно формуле (15), (23) $\alpha(\xi,\pi-\xi)=0$, $\alpha(\xi,\xi)=\pi$.

Осуществляя в формулах (13) и (14) интегрирование по частям и переходя затем к пределу при $\xi \to \pi/2$ (при этом $x_Q \to 0$, $y_Q \to 0$) имеем: $I_{n\nu\beta} \to -f_\nu(t) P_\delta^0(0)/r_Q^{\nu+1}$, $I_{nm} \to 0$. Отсюда и в силу формул (11а) и (11в) следует, что предел $W_{nm}(Q, t)$ при $x_Q \to 0$, $y_Q \to 0$, $z_Q > 0$ существует и равен правым частям тождеств (11б) и (11г).

На любом отрезке $[\theta_1, \pi - \theta_1]$ функция $\alpha(\xi, \theta)$ равномерно стремится к $\pi/2$ при $\xi \to 0$, $0 < \theta_1 < \pi/2$. Поэтому можно показать, что

$$\lim_{\xi \to 0} \int_{\xi}^{\pi-\xi} \varphi_1(\alpha) \varphi_2(\theta) d\theta = \varphi_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \int_0^{\pi} \varphi_2(\theta) d\theta, \tag{24}$$

если $\varphi_2(\theta)$ — ограниченная на отрезке $[0, \pi]$ функция θ, а $\varphi_1(\alpha)$ — функция α, непрерывная в точке $\alpha = \pi/2$ и ограниченная при $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$. Если теперь положить в формулах (13) и (14) $Q = P$, проинтегрировать выражения (13) и (14) по частям, устремить затем ξ к нулю (при этом $z_P \to 0$) и учесть выражения (23) и (24), то после громоздких, но не сложных вычислений с помощью формул (11а) и (11в) мы получим, что предел $W_{nm}(P, t)$ при $z_P \to +0$, $r_P \neq 0$ существует и определяется формулами (9).

Непрерывность при $r_P \neq 0$ и существование предела при $r_P \neq 0$, $z_P \to +0$ функции $U_{nm}(P, t)$ очевидны. Можно показать сходимость, а также непрерывность по параметрам (x_Q, y_Q, z_Q) и (x_P, y_P, z_P) интегралов $\tilde{A}_{SQ}(F_{nm}^P)$ и $\tilde{A}_{SP}(F_{nm}^P)$ соответственно при $Q \notin S$, $P \notin S$, если $f_\nu(t)$ и df_ν/dt — ограниченные функции. Поэтому, и в силу изложенного в предыдущих двух абзацах, во-первых, верны предельные переходы (7б) и (7в), во-вторых, справедливо равенство (7а) при $x_P = y_P = 0$, $z_P > 0$.

Переходя к рассмотрению случая $z_P < 0$, заметим, что, согласно формуле (13), $I_{n\nu\beta}(P, t) = I_{n\nu\beta}(P_1, t)$, так как по определению $r_P = r_{P_1}$ и углы ξ также равны для обоих отрезков OP и OP_1. Осуществим теперь замену переменных в формуле (19), положив $\theta = \pi - \theta_1$ и обозначив $\varphi(\xi, \theta) \equiv d\alpha/d\theta$. Тогда $\cos\theta = -\cos\theta_1$, $t + r_P \cos\theta/v = t - r_P \cos\theta_1/v$, $\varphi(\xi, \pi - \theta_1) = \varphi(\xi, \theta_1)$, $P_\delta^0(-\cos\theta_1) = (-1)^\delta P_\delta^0(\cos\theta_1)$, $(-1)^\delta \equiv (-1)^{n-\nu-2\beta} = (-1)^{n-\nu}$, $d\theta = -d\theta_1$. Поэтому, очевидно, $i_{n\nu\beta}(P, t) = (-1)^{n+1} I_{n\nu\beta}(P, t) = (-1)^{n+1} \mathrm{I}_{n\nu\beta}(P_1, t)$. Аналогично, $i_{nm}(P, t) = (-1)^{n+1} I_{nm}(P, t)$. Подставляя найденные значения $i_{n\nu\beta}, i_{nm}$ в выражения (18б) и (18в), а выражения (18б) и (18в) в формулу (20), мы приходим к выводу о справедливости формулы (7а) при $x_P^2 + y_P^2 \neq 0$, $z_P < 0$, если $W_{nm}(P, t)$ определяется тождеством (12). Совершенно аналогично изложенному выше доказывается справедливость формулы (7а) при $x_P^2 + y_P^2 = 0$, $z_P < 0$, что и требовалось доказать.

Как известно [3], $A^{-1}(g_P) A^{-1}(g_{PN}) = (A(g_{PN}) A(g_P))^{-1} = A^{-1}(g_{PN} g_P)$, где где A — оператор представления группы вращений. Поэтому, подставив выражение (8) в выражение (7), а последнее выражение в формулу (4), с учетом унитарности матриц a_{mi}^n найдем

$$F_{2nm}(P, t) = \begin{cases} \sum\limits_{i=-n}^{+n} [a_{mi}^n(g_P) U_{ni}(P, t) + a_{mi}^n(g_P) W_{ni}(P, t) - \\ \quad - a_{mi}^n(g_{PN} g_P) W_{ni}(N, t)] & \text{при } P \in D_1,\ z_P \neq 0; \\ \sum\limits_{i=-n}^{+n} [a_{mi}^n(g_P) U_{ni}(P, t)|_{z_P=+0} + \\ \quad + a_{mi}^n(g_P) W_{ni}(P, t)|_{z_P=+0} - a_{mi}^n(g_{PN} g_P) W_{ni}(N, t)] \\ \qquad\qquad \text{при } r_P \neq 0,\ z_P = 0; \\ \sum\limits_{i=-n}^{+n} [a_{mi}^n(g_P) \lim\limits_{Q \to O_1} F_{2m}^P(Q, t)] & \text{при } P = O_1. \end{cases} \tag{25}$$

Теперь, используя конкретный вид функций (20) и (25), несложно показать с помощью громоздких выкладок, что найденные функции $\bar{F}_{2nm}$ и $\bar{F}_{2nm}{}^{P}$ подчиняются принципу излучения и, следовательно, являются искомыми решениями.

Проанализируем физический смысл полученных результатов, считая $f_n(t)=(\exp j\omega t)/(jk)^n$, где $k\equiv\omega/v=2\pi/\lambda$ — волновое число (тогда $f_0(t)=\exp j\omega t$). Основные выводы для импульсных волн по существу уже рассмотрены в других работах [4, 5] (так как эти свойства алгоритмов $\tilde{A}_{SP}(F)$ и $\tilde{J}_{SP}(F)$ совпадают).

Прежде всего следует уточнить изложенный в начале статьи принцип, так как согласно формулам (25) и (9)—(11) $F_{2nm}\neq F_{nm}$ и, следовательно, поле $\bar{F}_{2nm}$, формируемое идеальной голограммой бесконечной апертуры, отличается от обращенного во времени предметного поля $\bar{F}_{nm}$.

Положим сначала $z_P\geqslant 0$. Тогда, подставив тождество (10а) в формулу (25) и учитывая формулу (4), найдем конкретную степень отклонения

26)

$$\Psi_{nm}(P,t)\equiv F_{2nm}(P,t)-F_{nm}(P,t)=\begin{cases}\sum\limits_{i=-n}\left[a_{mi}{}^{n}(g_P)W_{ni}(P,t)-\right.\\ \left.-a_{mi}{}^{n}(g_{PN}g_P)W_{ni}(N,t)\right] & \text{при } z_P>0;\\ \sum\limits_{i=-n}^{+n}\left[a_{mi}{}^{n}(g_P)W_{ni}(P,t)\big|_{z_P=+0}-\right.\\ \left.-a_{mi}{}^{n}(g_{PN}g_P)W_{ni}(N,t)\right] & \text{при } z_P=0,\ r_P\neq 0,\end{cases}$$

которая может быть вычислена с помощью формул (9), (11), (13), (14) в зависимости от типа волны, длины волны λ, угла наклона ξ_P отрезка O_1P к фокальной плоскости $z=0$ (ср. фиг. 1), от r_P и h (так как $z_N=2h-z_P$). Заметим, что в случае монохроматического излучения интеграл (9б) сводится к комбинации бета- и гипергеометрической функций путем использования интеграла 3.384 (1) из таблиц [6]. Можно показать (используя асимптотику интегралов (13) и (14) при $\lambda\to 0$, $\xi\neq 0$, $\xi\neq\pi/2$), что в предельном случае геометрической акустики $F_{2nm}(P,t)\to F_{nm}(P,t)$ и, следовательно, изложенный выше принцип приближенно справедлив по отношению к полю (а не изображению) в любой точке P при $x_P{}^2+y_P{}^2\neq 0$, $z_P>0$ и при достаточно коротких длинах волн. В то же время в каждой точке P оси z и в фокальной плоскости $z=0$ погрешность $\psi_{nm}(P,t)$ в силу формул (11б) и (9а) соответственно не стремится к нулю даже при переходе к геометрической акустике, если поле F_{nm} содержит компоненты $F_{n0}{}^{P}$. Вблизи точки O_1 поля F_{2nm} и F_{nm} весьма не схожи, так как функция F_{nm} имеет особенность в точке O_1, а функция F_{2nm} непрерывна и конечна в окрестности этой точки. В частности, в точке O_1 имеет место минимум (а не максимум) интенсивности поля F_{2nm}, формируемого идеальной голограммой, если источник излучает сферическую волну (2) ненулевого ранга. Действительно, пусть $x_P=y_P=0$, $z_P>0$. Тогда в качестве осей (x',y',z'), связанных с точкой P, можно выбрать оси (x,y,z). При этом $a_{mi}{}^{n}=\delta_{mi}{}^{n}$ ($\delta_{mi}{}^{n}$ — символы Кронекера размерности n); в силу формул (26) и (11г) $\psi_{nm}(P,t)=W_{nm}(P,t)-W_{nm}(N,t)=0$ и, значит, $F_{2nm}(P,t)=F_{nm}(P,t)$. Однако на оси z угол $\theta=0$, $\cos\theta=1$, $F_{nm}(P,t)=P_n^{|m|}(1)=0$ при $m\neq 0$. Отсюда и из непрерывности поля $F_{2nm}(P,t)$ следует его равенство нулю в точке O_1. Таким образом, изображение точечного предмета не является комплексно-сопряженным самому предмету. При этом конечность поля F_{2nm} в окрестности

точки O_1 кладет предел разрешающей способности идеальных голограмм при бесконечной апертуре.

Поля F_{2nm} и $\overline{F}_{2nm}$ формируют изображение источника, фокусируясь в точке O_1. В приближении геометрической акустики в точке фокусировки, являющейся вырожденной каустикой, наблюдается скачок фазы поля $\overline{F}_{200}$, равный π [7]. Согласно формуле (25) в указанной точке происходит следующее: а) слагаемое $\sum\limits_{i=-n}^{+n} a_{mi}{}^{n}(g_P)\,U_{ni}(P,t)$ в силу формулы (10) изменяет знак, но только в нулевом лучевом приближении (т. е. при сохранении в формуле (10) лишь членов с $\nu=0$); б) слагаемое $\sum\limits_{i=-n}^{+n} a_{mi}{}^{n}(g_P)\,W_{ni}(P,t)$ в силу формулы (12) изменяет знак при четном n и не изменяет при нечетном n. Слагаемым $\sum\limits_{i=-n}^{+n} a_{mi}{}^{n}(g_{PN}g_P)\,W_{ni}(N,t)$ можно пренебречь вблизи точки O_1. На оси z относительный вклад члена $a_{m0}{}^{n}(g_P)\,W_{n0}(P,t)$, как вытекает из формул (10), (11б) и (12), весьма существен при всех частотах. Таким образом, скачок фазы, равный π, поля F_{2n0} на оптической оси z отсутствует даже в предельном случае $\lambda\to 0$, если n нечетно, и присутствует в нулевом лучевом приближении, если n четно или $n=0$. На лучах $0<\xi=\text{const}<\pi/2$ интегралы $I_{n\nu\beta}$ и I_{nm}, а потому и члены W_{ni} стремятся к нулю при $\lambda\to 0$. Поэтому на этих лучах наблюдается указанный скачок фазы, если $\lambda\to 0$.

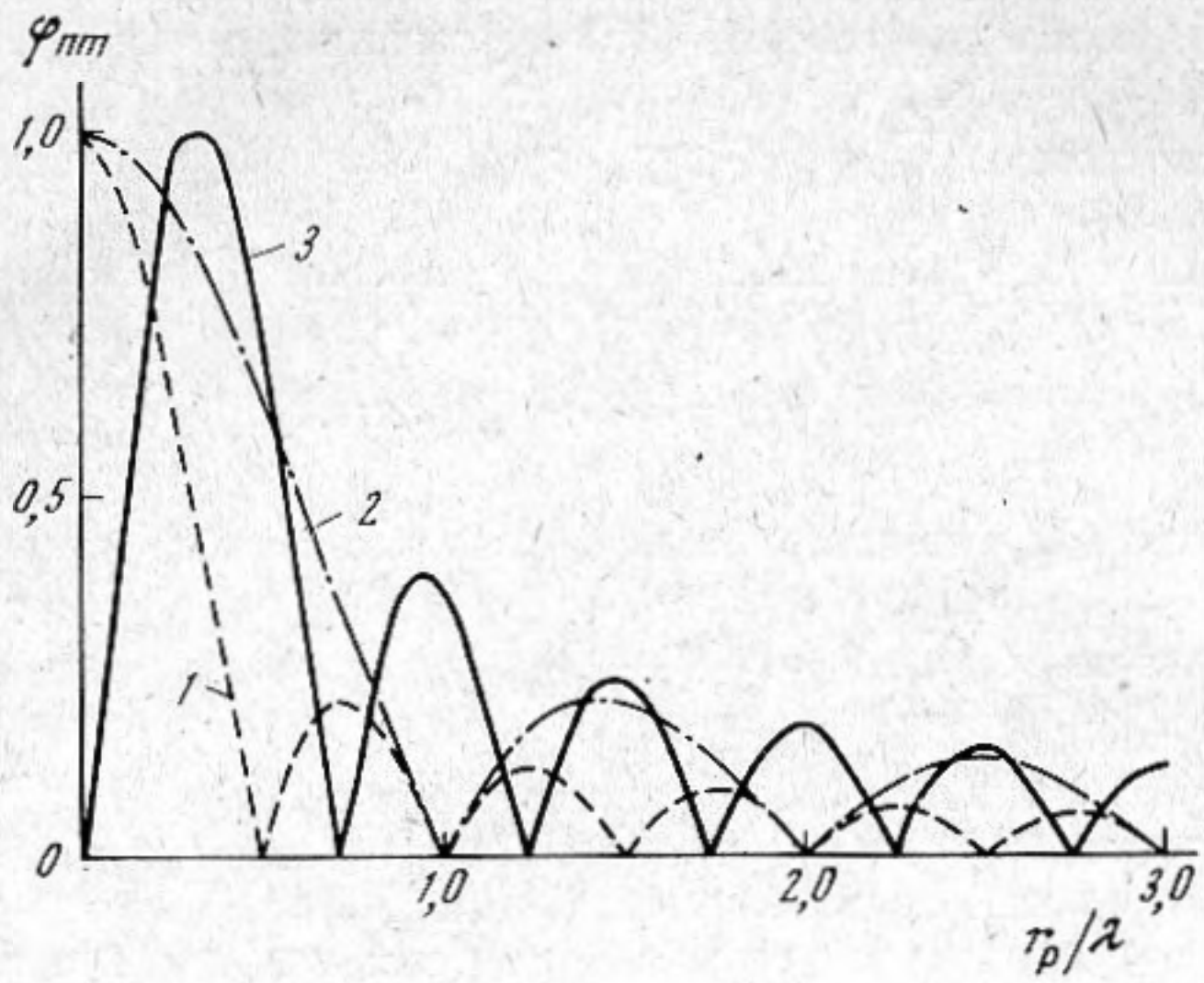
Определим предельную разрешающую способность голограмм для случаев $F=F_{00}$ и $F=F_{11}$. В первом случае [3] $a_{00}\equiv 1$, во втором случае [3] $a_{11}{}^{1}(g_P)=(\exp j\varphi)/2$, $a_{10}{}^{1}(g_P)=(\exp j\varphi)/\sqrt{2}$, $a_{1,-1}{}^{1}(g_P)=-(\exp j\varphi)/2$, где φ — полярный угол точки P, лежащей в плоскости xy, отсчитываемый от оси x. Тогда, пренебрегая членами с $W_{ni}(N,t)$ в формуле (26) и полагая $f_n(t)=(\exp j\omega t)/(jk)^n$, с помощью формул (9), (10), (11б) и (12) получим

$$F_{200}(P,t)=\begin{cases}\dfrac{\exp j\omega t}{r_P}[\exp(-jkr_P)-1] \text{ на оси } z,\ z_P>0;\\[2ex] \dfrac{\exp j\omega t}{2r_P}[\exp(-jkr_P)-\exp(+jkr_P)] \text{ в плоскости } z=0,\quad r_P\neq 0;\\[2ex] -\dfrac{\exp j\omega t}{r_P}[\exp(+jkr_P)-1] \text{ на оси } z,\ z_P<0;\end{cases}$$

$$F_{211}(P,t)=\begin{cases}0 \text{ на оси } z;\\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3\pi}{2}}\,\dfrac{\exp(j\omega t+j\varphi)}{r_P}\left[\cos kr_P-\dfrac{\sin kr_P}{r_P}\right]\\ \text{в плоскости } z=0,\ r_P\neq 0.\end{cases}$$

Относительная амплитуда поля $\varphi_{nm}(P,t)\equiv|F_{2nm}(P,t)|/\max|F_{2nm}|$ изменяется в фокальной плоскости и на оси z по кривым *1* и *2* фиг. 2 соответственно, если $n=m=0$, и по кривой *3* в фокальной плоскости, если $n=m=1$. Разрешающую способность R будем оценивать по диаметру первого «светлого» круга или кольца в плоскости $z=0$ и по протяженности первой «светлой» области на оси z. Тогда для волны F_{200} $R=\lambda$ в фокальной плоскости и $R=2\lambda$ по глубине. Для волны F_{211} $R=1{,}5\lambda$ в фокальной плоскости. Кривая *1* близка, а кривая *2* существенно отличается от приближенных результатов, полученных Пистолькорсом [8]. Отличие кривой *2*, по-видимому, связано с двухмерностью задачи, решаемой в работе [8].

Численные оценки функции $|\psi_{00}(P, t)/F_{00}(P, t)|$ показали, что она достигает величин порядка лишь процента для световых длин волн при $r_P \approx 1$ *мм*, $\xi_P = 15 \div 75°$ и десятков процентов при $r_P = (10 \div 100)\lambda$, $\xi_P = 15 \div 75°$. Поэтому изложенные эффекты наиболее ощутимо ограничивают предель-



Фиг. 2

ную степень тождественности исходного и формируемого голограммой полей в условиях звуковой и особенно сейсмической голографии, где $h \sim (10 \div 100)\,\lambda$. Эти эффекты могут оказаться также существенными для голографической интерферометрии и квазиконтактной оптической голографии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дж. Гудмен.* Введение в фурье-оптику. М., «Мир», 1970.
2. *Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль.* Теория дифракции. М., «Мир», 1964.
3. *Г. Я. Любарский.* Теория групп и ее применение в физике. М., Гостехтеориздат, 1957.
4. *С. А. Васильев.* Некоторые вопросы теории продолжения волнового поля в сторону источника. Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли, 1973. 3, 35—47.
5. *С. А. Васильев, А. К. Урупов.* Новое в принципах и оценках применимости сейсмической голографии. В сб.: Вопросы обработки и интерпретации геофизических наблюдений. Пермь, 1972, 10, 12—19.
6. *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
7. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Теория поля. М., Физматгиз, 1960.
8. *А. А. Пистолькорс.* О разрешающей способности голограммы. Докл. АН СССР, 1967, *172*, 2, 334—337.

Всесоюзный научно-исследовательский институт
геофизических методов разведки

Поступила
15 апреля 1972 г.