АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XXI
1975
Вып. 2

АКАДЕМИЯ
НАУК
СССР

Март
Апрель

Основан в 1955 г. МОСКВА *Выходит 6 раз в год*

УДК 534.231

ПРИНЦИП ВЗАИМНОСТИ В АКУСТИКЕ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РАСЧЕТА ЗВУКОВЫХ ПОЛЕЙ КОЛЕБЛЮЩИХСЯ ТЕЛ

(Обзор)

Ю. И. Белоусов, А. В. Римский-Корсаков

Принцип взаимности в линейных динамических системах имеет очень важное значение. Он позволяет в ряде случаев сводить решение задач, недоступное или затруднительное для прямых методов, к задачам расчета полей рассеяния на этих телах. Свойство взаимности зачастую может быть успешно использовано для экспериментального определения характеристик излучения и приема динамической системы. В силу этих обстоятельств формулировки соотношений взаимности для тех или иных частных случаев представляют существенный интерес.

В настоящее время имеется большое число оригинальных работ, посвященных принципу взаимности в акустике. Однако после выхода книги В. В. Фурдуева «Теоремы взаимности», в которой суммированы результаты работ до 1948 г., по этому вопросу, насколько нам известно, не было опубликовано ни одной работы обзорного характера. Настоящий обзор посвящен в основном вопросам применения принципа взаимности для расчета звуковых полей, возбуждаемых сложными колебательными системами. Большая группа исследований по применению взаимности в теории электромеханических четырехполюсников, а также специальные работы по калибровке преобразователей методом взаимности здесь не обсуждаются, за исключением материалов, имеющих, на наш взгляд, непосредственный интерес для темы настоящей работы.

Классические соотношения взаимности Рэлея и Гельмгольца

Впервые принцип взаимности, связывающий различные типы внешних воздействий на линейную динамическую систему с откликами этих воздействий, был установлен Рэлеем [1—4]. Правда, ранее Гельмгольцем [5—7] были обнаружены некоторые частные случаи.

Для вывода принципа взаимности Рэлей использовал уравнения движения (Лагранжа) линейной динамической системы с произвольным, однако конечным числом степеней свободы. Эти уравнения движения записываются исходя из вида функции Лагранжа с постоянными коэффициентами инерции, активного сопротивления и потенциальными коэффициентами.

© Издательство «Наука»
«Акустический журнал», 1975 г.

Рассматривая стационарный режим возбуждения колебаний под действием обобщенных сил, Рэлей получил классическое соотношение взаимности как следствие симметричности коэффициентов инерции, потенциальных коэффициентов и коэффициентов активного сопротивления. Симметричность указанных коэффициентов (их перестановочность) следует из формы функции Лагранжа и диссипативной функции.

Исходя из решений уравнений движения системы для двух совокупностей внешних воздействий, Рэлей вывел соотношение взаимности в виде

$$\sum_{к} (V_к F_к' - V_к' F_к) = 0,$$

где $V_к$, $V_к'$ — обобщенные скорости изменения обобщенных координат под действием обобщенных сил $F_к$, $F_к'$ соответственно. Суммирование производится по всем степеням свободы к. В простейшем частном случае для системы с двумя степенями свободы принцип взаимности можно сформулировать следующим образом: отклик обобщенной скорости по первой координате, наблюдаемый при внешнем воздействии в направлении второй координаты, совпадает с откликом обобщенной скорости по второй координате при наличии такого же воздействия по первой координате.

Обнаруженные Гельмгольцем (1886 г.) взаимные соотношения являются более общими. Они не ограничены условием линейности, обязательным для применения классического принципа взаимности. Гельмгольц использовал уравнение Лагранжа для вывода теоремы симметричной взаимности акцелерационного типа. Существует ли акцелерационная связь в том или ином конкретном случае или нет — зависит от значения коэффициентов взаимной инерции. Связи через скорости не являются взаимными в обычном смысле этого термина [6]. Даже в том частном случае, когда коэффициенты взаимной инерции постоянны, связь удовлетворяет условию антисимметричной взаимности (изменения сил обусловлены одинаковыми изменениями скоростей по соответствующим координатам, имеют одну и ту же величину, но противоположные знаки). Исследуя условие возможности связей, подчиненных теореме антисимметричной взаимности, Гельмгольц установил результат, показывающий, что связи, подчиняющиеся этой теореме, не могут существовать в системах, у которых все коэффициенты инерции постоянны, т. е. именно в тех линейных системах, для которых справедлив классический принцип взаимности Рэлея.

Позднее Фурдуев [8] исследовал консервативные связи, реализующиеся через обобщенные скорости, и показал, что они никогда не бывают симметрично взаимными; связь сил взаимодействия со скоростями обнаруживается только благодаря тому, что в стационарном режиме через эти скорости выражены координаты и ускорения, посредством которых реализуются симметрично взаимные консервативные связи. Поэтому можно сказать, что связь силы со скоростью верна, вообще говоря, только формально, физический смысл она имеет лишь для диссипативных связей.

Однако, замечает В. В. Фурдуев, антисимметричные связи через скорости могут иметь место в линейных динамических системах. Эти связи будут линейными при условии постоянства производной от обобщенной силы по обобщенной скорости. Оказывается, для этого необходимо, чтобы, во-первых, скорости поддерживались постоянными и, во-вторых, зависящие от конфигурации системы коэффициенты инерции были линейными функциями координат. С такими связями (которые принято называть гироскопическими) встречаются в механических задачах при исследовании колебаний около стационарного состояния движения [9].

Обращаясь к связям через обобщенные смещения (позиционные связи), Гельмгольц отмечает, что теорема симметричной взаимности позиционных связей существует или при отсутствии гироскопических связей,

или когда сопутствующая гироскопическая связь удовлетворяет условию линейности (постоянны производные от сил по скоростям).

Итак, рассмотрение видов взаимности показывает, что в основе классического принципа взаимности лежат условия симметричности взаимных связей акцелерационного и позиционного типов. Если динамическая система линейна, то частные производные от обобщенных сил по обобщенным ускорениям и смещениям являются постоянными величинами, тогда взаимные соотношения акцелерационного и позиционного видов в стационарном режиме приводят к существованию принципа взаимности для связей через обобщенные скорости. (Это справедливо при условии, что гироскопические связи отсутствуют.)

Соотношения взаимности в акустических полях

Вывод принципа взаимности для малых безвихревых движений упругой среды около положения равновесия можно найти в работах [4, 8, 10, 11].

Обычно вывод принципа взаимности основывается на двух волновых уравнениях для потенциалов с источниками звука. Математическую формулировку принципа взаимности можно получить после несложных преобразований волновых уравнений с применением формулы Грина и с учетом принципа излучения на бесконечности:

$$(1) \qquad \iint_S \left(\Phi_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} - \Phi_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \right) ds = \iiint_V (q_1 \Phi_2 - q_2 \Phi_1)\, dv,$$

где Φ_1 и Φ_2 — потенциалы скоростей, q_1 и q_2 — объемные скорости источников, приходящиеся на единицу объема, занятого источниками (плотности распределения источников).

Если в среде имеется ряд поверхностей либо абсолютно мягких, либо абсолютно жестких, либо импеданцных, то соотношение взаимности принимает вид

$$(2) \qquad \iiint_V q_1 \Phi_2\, dv = \iiint_V q_2 \Phi_1\, dv.$$

Морз и Фешбах [12] показывают симметричность функции Грина от координат точки наблюдения и точки источника. Эта симметричность является следствием принципа взаимности. Для уравнения Гельмгольца

$$(3) \qquad G_к(\mathbf{r} / \mathbf{r}_0) = G_к(\mathbf{r}_0 / \mathbf{r}).$$

Эта функция удовлетворяет некоторым однородным граничным условиям на поверхности тел, находящихся в пространстве, и имеет разрыв при $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0$. Для волнового уравнения

$$(4) \qquad G(\mathbf{r}, t / \mathbf{r}_0, t_0) = G(\mathbf{r}_0, -t_0 / \mathbf{r}, -t).$$

Соотношение (2) можно рассматривать и энергетически. Левая часть определяет мощность, затрачиваемую первым источником на преодоление дополнительного сопротивления, создаваемого действием второго источника. Следовательно, соотношение (2) означает, что мощность, которую затрачивает первый источник на преодоление действия второго, равна мощности, затрачиваемой вторым источником на преодоление действия первого.

Для получения математической формулировки принципа взаимности для диполей необходимо заменить $q_1(\mathbf{r})$ на $\partial q_1(\mathbf{r}) / \partial n_1$, где n_1 — направление оси диполя. Если же обе системы источников являются дипольными, то следует и $q_2(\mathbf{r})$ заменить на $\partial q_2(\mathbf{r}) / \partial n_2$ (n_2 — направление оси диполя во второй системе).

Принцип взаимности широко используется для сопоставления свойств обратимого преобразователя, работающего в качестве излучателя и в качестве приемника. Этой теме посвящена работа Шотки [13].

Пусть имеется исследуемый преобразователь 2 и малая пульсирующая сфера 1. Тогда звуковое давление p_0, развиваемое сферой в том месте, где находится преобразователь 2 при отсутствии этого преобразователя, определяется формулой

$$(5) \qquad p_0 = -\frac{i\omega\rho Q_1}{4\pi r} e^{ikr} = -\frac{i\rho c Q_1}{2r\lambda} e^{ikr},$$

где Q_1 — объемная колебательная скорость сферы.

Заменив в соотношении (2) величины $\Phi_{1,2}$ на $p_{1,2}/i\omega$ и используя формулу (5), можно записать

$$(6) \qquad \frac{p_1(B)}{p_0} = -\frac{2r\lambda}{i\rho c} e^{ikr} \frac{p_2(A)}{Q_1(A)}.$$

Последняя формула выражает общий закон, найденный Шотки: если в режиме приема исследуемый преобразователь имеет равномерную частотную характеристику, то в режиме излучения звуковое давление линейно возрастает при увеличении частоты. И наоборот, при равномерной характеристике в режиме излучения характеристика в режиме приема будет убывать обратно пропорционально частоте звука. Величина $2r\lambda/\rho c$ называется параметром взаимности, который, как видно, зависит от частоты звука. Заметим, что параметр взаимности существенно зависит от типа волнового поля. В рассматриваемом случае использовался сферический тип волн, поэтому найденная величина является параметром взаимности для сферического закона распространения. В работе [14] Тротт приравнивает звуковую энергию излучателя в ближнем и дальнем полях для получения из параметра взаимности сферической волны параметра взаимности плоской волны $J_p = 2A/\rho c$ (где A — площадь поперечного сечения нерасходящегося луча) и параметра взаимности цилиндрической волны $J_c = 2(a\lambda)^{1/2}L/\rho c$, где L — длина линейного источника звука, a — расстояние по нормали к источнику.

Впервые параметр взаимности для плоской волны введен Симмонсом и Уриком в работе [15], а параметр взаимности для цилиндрической волны — Боббером и Сэбином в работе [16].

Параметры взаимности находят применение при абсолютной калибровке преобразователей методом взаимности. Изложение метода и обзор литературы, посвященной калибровке этим методом, приведены в [17]. Используя различные представления параметра взаимности, можно производить калибровку не только при сферическом законе распространения, но и в случае более сложных звуковых полей [18].

Взаимность в электроакустических четырехполюсниках, связанных с механической стороны с полем, была рассмотрена Фолди и Примаковым в работе [19]. Из уравнений электромеханического четырехполюсника, записанных в форме линейных интегральных уравнений, там получены два соотношения, выражающие принцип взаимности. Одно соотношение утверждает, что поверхностная плотность электромеханической связи в преобразователе-излучателе и поверхностная плотность электромеханической связи в преобразователе-генераторе равны по амплитуде и фазовый угол между ними одинаков для всех точек поверхности преобразователя. Другое соотношение выражает классический принцип взаимности в применении к распределенной механико-акустической системе (равенство двух взаимных сопротивлений).

Принцип взаимности в теории упругости в акустике и некоторые случаи его применения для расчета звуковых полей колеблющихся тел

В механике теорема взаимности носит название теоремы Бетти. Математическая формулировка ее имеет следующий вид:

$$(7)\qquad \iiint_V f_1(\mathbf{r})\,u_2(\mathbf{r})\,dv = \iiint_V f_2(\mathbf{r})\,u_1(\mathbf{r})\,dv,$$

где f_1 и f_2 — плотности двух систем сил, приложенных к упругому телу; u_1 и u_2 — вызываемые ими смещения.

Левая и правая части равенства представляют собой работу, затраченную одной системой сил для преодоления действия другой системы. Справедливость теоремы Бетти была доказана в работе [20] лишь для однородных тонких оболочек без ребер жесткости. Лямшев установил [21] справедливость теоремы взаимности и для неоднородных оболочек, но лишь при условии, что операторы, соответствующие дифференциальным уравнениям колебаний ребер жесткости, будут самосопряженными операторами. Были получены частные случаи принципа взаимности в виде интегральных соотношений, связывающих решения самосопряженных задач дифракции упругих колебаний, распространяющихся вдоль поверхности оболочки, подпертой ребрами жесткости, и «излучения» в оболочку колебаний, возбуждаемых силами, действующими на ребро жесткости.

Примером применения интегральных соотношений для решения краевых задач теории колебаний пластин является работа [22]. В этой работе решена задача об изгибных колебаниях безграничной пластины, подкрепленной прямолинейным стержнем — балкой, когда на балку действует сосредоточенная гармоническая внешняя сила. При этом предполагается, что известно решение задачи о дифракции на балке круговых изгибных волн в пластине, возбуждаемых гармонической силой в некоторой точке пластины.

Для балки, взаимодействующей с пластиной, угловая характеристика излучения имеет два максимума: один обусловлен возбуждением в балке изгибных колебаний, а другой — возбуждением крутильных колебаний. Как следует из работы [23], в этом отношении имеется полная аналогия между угловой характеристикой излучения балки на пластине и угловой характеристикой излучения пластины в жидкости и газообразной среде.

При выводе соотношений взаимности обычно считают, что поверхности, расположенные в звуковом поле, являются либо абсолютно мягкими, либо абсолютно жесткими, либо импеданцными. Лямшев показал [24], что теорема взаимности остается справедливой также при наличии в пространстве упругих тел и оболочек, свойства которых не описываются нормальным локальным импеданцом. Математическая формулировка принципа взаимности при наличии упругих тел может быть записана в виде

$$(8)\qquad \iint_S \left[\frac{\partial p^{(1)}(\mathbf{r})}{\partial n} f^{(2)}(\mathbf{r}) - \frac{\partial p^{(2)}(\mathbf{r})}{\partial n} f^{(1)}(\mathbf{r})\right] ds =$$

$$= -i\omega\rho \iiint_V \left[q^{(1)}(\mathbf{r})\,p^{(2)}(\mathbf{r}) - q^{(2)}(\mathbf{r})\,p^{(1)}(\mathbf{r})\right] dv,$$

где $p^{(1)}(\mathbf{r})$, $p^{(2)}(\mathbf{r})$ — звуковые поля, создаваемые непрерывно распределенными по объему V системами объемных источников $q^{(1)}(\mathbf{r})$ и $q^{(2)}(\mathbf{r})$ соответственно; $f^{(1)}(\mathbf{r})$ и $f^{(2)}(\mathbf{r})$ — сторонние механические силы, действующие на упругое тело в направлении нормали n к поверхности S; ω — круговая частота; ρ — плотность среды.

Соотношение (8) справедливо и в случае неоднородных упругих тел, важно только, чтобы выполнялось условие самосопряженности оператора, описывающего их уравнение движения. Соотношение (8) определяет удобный метод вычисления звуковых полей, излучаемых упругой поверхностью под действием внешних сил, по известным выражениям для звукового поля, рассеянного этой поверхностью. Для вычисления звукового поля в точке $\mathbf{r}_0$, излучаемого поверхностью, на которой задана одна система сил $f^{(2)}(\mathbf{r})$, поместим в эту точку вспомогательный источник $q^{(1)}(\mathbf{r}) = Q_1\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$, поле которого $p^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ на упругой поверхности известно. Из формулы (8) после интегрирования получаем

$$p^{(2)}(\mathbf{r}_0) = -\frac{1}{i\omega\rho Q_1}\iint_S \frac{\partial p^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n} f^{(2)}(\mathbf{r})\, ds. \tag{9}$$

Таким образом, излученное поле $p^{(2)}(\mathbf{r})$ однозначно определяется через вспомогательное решение $p^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$. Вспомогательное решение $p^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ является по существу функцией Грина для пространства, содержащего упругие поверхности.

Указанный метод интегральных соотношений в применении к решению краевых задач об излучении звука оболочками в покоящейся среде был развит в работах [25, 26]. В работах [23, 26], по-видимому, впервые исследовалось поле излучения оболочек, возбуждаемых статистически распределенными силами. Одним из примеров применения интегральных соотношений, полученных Лямшевым [24], может служить работа Шендерова [27]. В этой работе найдено звуковое поле вне цилиндрической оболочки при условии, что внутри ее находится система дискретных или непрерывных источников. Измеренное поле хорошо совпадает с рассчитанным.

Примеры применения принципа взаимности разнообразны. Так, Морз [28] рассматривает случай, когда полное давление на поверхности жесткого цилиндра как функция угла, вызванное падающей плоской звуковой волной, пропорционально давлению на некотором расстоянии от центра цилиндра, на поверхности которого колеблется линейный элемент.

Оригинальное применение принципа взаимности можно найти в работе Бладеля [29], посвященной рассеянию плоских звуковых волн низких частот на твердых и мягких телах. В рассматриваемой работе проблема низкочастотного рассеяния ($kD \ll 1$) твердыми и мягкими телами сводится к решению ряда задач о потенциалах. Основная идея метода состоит в разложении давления в ряд по степеням волнового числа k и получении отдельных уравнений для членов разложения. В работе с помощью принципа взаимности объединяются на поверхности тела главный член разложения и член при первой степени волнового числа на основании стремления к нулю на бесконечности этих функций. Этим методом определяются первые два члена дальнего поля при помощи главного члена в разложении в ряд. Полученное выражение поперечного сечения рассеяния совпадает с соотношением, приведенным Ржевкиным [30].

Принцип взаимности в акустике движущейся среды

Как известно, в акустике движущейся среды принцип взаимности не выполняется. Впервые этот вопрос был детально изучен, по-видимому, в одной из работ Чернова [31]. В этой работе показано, что принцип взаимности для энергий сохраняется при потенциальном движении среды, так как при таком движении лучи прямолинейны с точностью до эффектов первого порядка малости относительно отношения скорости среды к скорости звука. В работе показано также, что невыполнение принципа взаимности следует из того, что два источника 1 и 2, один из которых расположен ниже другого по течению жидкости, находятся не в одинаковых условиях, т. е. фазы приходящих звуковых волн будут неодинаковы даже в том случае, если фазы выходящих волн совпадают.

Однако в случае движущейся среды удается сформулировать теорему, в известной мере подобную теореме взаимности в акустике покоящейся среды. Она получила название теоремы обращения потока. Лямшев показал [32], что теорема обращения потока представляет собой один из частных случаев более общих теорем и интегральных соотношений, которые связывают решение двух краевых сопряженных задач акустики движущейся среды, т. е. хотя физической взаимности в движущейся среде в отличие от случая неподвижной среды не наблюдается, теорема взаимности будет справедлива при условии, что вместе с изменением расположения излучателя и приемника заменяется и направление скорости потока на противоположное.

В работе [21] Лямшев выводит на основе установленных в работе [32] интегральных соотношений для однородно движущейся среды асимптотические формулы, позволяющие немедленно получить решение задачи излучения, справедливое на больших расстояниях от колеблющейся оболочки. Там же рассмотрена задача об излучении звука безграничной упругой пластиной под действием сосредоточенной гармонической силы и задача об излучении звука ограниченной цилиндрической оболочкой в движущейся среде. В работе установлено, что поле излучения пластины имеет характер излучения дипольного источника. Угловая характеристика излучения цилиндрической оболочки зависит от вида функции, характеризующей действующие на оболочку внешние силы и моменты.

На основе соотношений взаимности для движущейся среды, приведенных в работах [32, 33], получены выражения для среднего квадрата давления поля излучения (спектральной интенсивности) звука оболочками, колеблющимися под действием статистически распределенных сил и моментов.

Выполнение принципа взаимности в системах с диссипацией колебательной энергии

Рэлей [4] при рассмотрении классического принципа взаимности для систем с конечным числом степеней свободы при малых периодических движениях полагал, что в системе действуют диссипативные силы, допускающие функцию рассеяния в виде положительно определенной квадратичной формы от обобщенных скоростей с коэффициентами активного сопротивления, не зависящими от координат. При этих условиях Рэлей установил, что принцип взаимности выполняется без дополнительных ограничений.

Гельмгольц в работе [7] отмечает, что наличие диссипативных связей не нарушает взаимности, так как диссипативные связи удовлетворяют симметричному соотношению взаимности.

В общем случае коэффициенты рассеяния могут зависеть от конфигурации системы. Условия существования диссипативной функции, устанавливаемые методами статистической физики, имеют, по-видимому, достаточно общий характер; при малых периодических движениях можно почти всегда считать их выполненными даже при наличии необратимых термодиффузионных, термомагнитных и термоэлектрических явлений. Из принципа симметрии кинетических коэффициентов следует, что коэффициенты диссипативной функции удовлетворяют взаимно перестановочному соотношению [34, 19].

На основе своих исследований Фолди и Примаков [19] заключают, что возможно нарушение соотношений взаимности всякий раз, когда присутствуют заметные потери (диэлектрические, пьезоэлектрические, вязкие и т. д.), связанные с релаксационными процессами в материале преобразователя.

В известной книге Скучика [10] приводится разновидность принципа взаимности — закон взаимных энергий, который гласит, что разность между взаимной потенциальной и взаимной кинетической энергиями в

колебательной системе равна нулю. Там же утверждается, что это положение во всех подробностях соответствует условию ортогональности для собственных функций непрерывной системы и результат не зависит от трения. В работе [10] указывается, что для периодических процессов бесконечное множество постоянных, характеризующих «неидеальность» упругих свойств (внутреннее вязкое и релаксационное трение, механический гистерезис, пластическое течение) может быть сведено к двум зависящим от частоты комплексным модулям упругости, действительные части которых представляют собственно модули упругости, а мнимые части — трение. В той же работе утверждается, что принцип взаимности сохраняет силу в случае чисто упругого последействия только при периодических процессах; в этом случае потери строго учитываются в механическом импедансе, хотя тензор упругости несимметричен и зависит от предыстории движения *.

В работе [36] Хекл указывает, что с трудом можно ответить на вопрос, является ли действительным принцип взаимности также при наличии пористых веществ, поглощающих звук [37].

Изложенные в настоящем параграфе соображения свидетельствуют о том, что не имеется полной ясности по вопросу о существовании принципа взаимности при наличии потерь в общем виде.

Соотношения взаимности для нестационарных процессов

Ранее обсуждались разнообразные соотношения взаимности для гармонических процессов. Однако принцип взаимности, по-видимому, допускает более широкое применение и может быть распространен и на нестационарные процессы.

Харкевич [38] в 1938 г. привел формулировку принципа взаимности для электроакустического четырехполюсника, работающего в нестационарном режиме. Полученные соотношения по внешнему виду не отличаются от соотношений взаимности для гармонических сигналов, выведенных еще Рэлеем. В работе [38] дана также обобщенная формулировка закона Шоттки для нестационарных процессов. В этой формулировке закон получил новое содержание: если при возбуждении аппарата, служащего излучателем с объемной скоростью, изменяющейся как $\psi(t)$, получается давление, изменяющееся как $\varphi(t)$, то при работе аппарата в качестве приемника действующее на него в заторможенном состоянии давление пропорционально $\int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau$, если давление в том же месте при отсутствии аппарата выражается как $\psi(t)$.

Г. Чертоком опубликовано несколько работ, посвященных выполнению и применению принципа взаимности в акустике [39, 40]. Так, в [39] получено общее соотношение между полем излучения поверхности, на которой имеется произвольное распределение вибраций, и обобщенной силой, с которой произвольный внешний импульсный источник действует на поверхность, возбуждая то же распределение вибраций. В качестве примера применения соотношений, полученных в [39], Черток в работе [40] выводит соотношение взаимности для пульсирующего газового пузырька в воде и упругого колеблющегося твердого тела. В работе [41] Хаскинд приводит соотношение взаимности для случая различных движений плавающего тела, возбуждаемого цепочкой поверхностных волн.

Однако известные соотношения взаимности для нестационарных процессов в системах с сосредоточенными параметрами [38] и в распределен-

---

* Надо учитывать, что рассеяние колебательной энергии в конструкциях имеет разнообразный характер. Классификацию конструкционных потерь и их исследование можно найти в работе [35]. В частности, рассеяние энергии в конструкциях происходит в сочленениях, механизм потерь в которых еще недостаточно изучен.

ных системах [39] не только не вносят ясности в физический механизм взаимности в колебательных системах, но и не дают дополнительных по сравнению с соотношениями для гармонических процессов взаимосвязей между входящими в выражения взаимности величинами.

Некоторые случаи применения принципа взаимности для расчета вибраций и звуковых полей сложных конструкций

Известно, что принципиально имеется возможность точного расчета колебаний и излучения звука сложными механическими системами. Часто интерес представляют колебания и излучения конструкций в таком диапазоне частот, где возбуждаются много форм колебаний (степеней свободы). Такая задача сложна даже для большой цифровой вычислительной машины. Кроме того, при таком сложном характере колебаний интерпретация результатов расчета на цифровой машине оказывается очень трудной. С целью преодоления этих трудностей Лайон и Майданик [42] создали метод исследования колебаний, базирующийся на статистическом подходе к колебаниям связанных систем с большим числом степеней свободы. Благодаря связи через излучение устанавливается некоторое динамическое равновесие между энергиями, запасенными в степенях свободы для системы замкнутое помещение — конструкция. Соотношение равновесия получено в этой работе на основе формулы для равновесной энергии в системе с одной степенью свободы, выведенной Смитом [43]. Это соотношение позволяет вычислить усредненный коэффициент вибровозбудимости конструкции звуковым полем по такому же коэффициенту излучения. Эти коэффициенты на основе соотношения взаимности оказываются одинаковыми. В экспериментальной части работы [42] были измерены коэффициенты излучения непосредственно при возбуждении панели вибратором в третьоктавных полосах белого шума и при возбуждении панели акустическим полем. Измерения проводились для нескольких вариантов конструкций (с ребрами, с экранированными и неэкранированными краями). Из приведенных в работе результатов видно, что два способа определения коэффициентов излучения дают удовлетворительно согласующиеся результаты.

В работе [36] Хекл с помощью принципа взаимности выводит соотношение, которое позволяет найти общее соотношение между излучением (коэффициентом пропорциональности между квадратом действующей силы на конструкцию и излученной ею звуковой мощностью) и возбуждением (коэффициентом пропорциональности между среднеквадратичным звуковым давлением и квадратом скорости возбуждения конструкции звуковым полем). Аналогичным методом получены соотношения между излучением и возбуждением для линейного возбуждения конструкции. Мощности, излученные точечно и линейно возбужденной задемпфированной пластиной, определены в рассматриваемой работе значительно проще, чем в работе [44]. В частности, в работе [36] определена мощность излучения для точечного и линейного возбуждения задемпфированной пластины достаточного больших размеров с очень большой нагрузкой излучения. И здесь общая мощность излучения была определена с помощью принципа взаимности по величине среднеквадратичной скорости пластины, возбужденной диффузным звуковым полем. В рассматриваемой статье также найдена величина звукоизоляции для пластин выше граничной частоты звука. Аналогичная формула для этой величины была много ранее выведена Кремером [45], однако только для бесконечной демпфированной пластины, в то время как в выражении, выведенном Хеклом [36], учитываются в факторе потерь энергетические потери в звукоизолирующем материале и утечка энергии на границах закрепления.

Другие примеры применения принципа взаимности для определения связи между величиной звукоизоляции и уровнем нормально падающего

звука на твердый пол в зависимости от материала покрытия можно найти в работе [46].

В работе [47] Черток исследовал неустановившиеся колебания сложных структур, возбуждаемых близкими подводными взрывами. В этой работе изгибный отклик сложной структуры (оболочки) на близкий подводный взрыв анализируется на основе независимых вкладов нормальных мод структуры и воды, прилегающей к ней. Применение нормальных мод для такой сложной системы, как структура и вода, предполагает, что рассматриваются лишь низкочастотные движения структуры, так что вода считается несжимаемой жидкостью. Обобщенная сила для каждой фундаментальной моды изменяется во времени пропорционально объемному ускорению взрывного пузыря. Мгновенная модальная сила, действующая на оболочку, изменяется в зависимости от расстояния до места взрыва пропорционально тому мгновенному звуковому давлению, которое производилось бы в этом месте стационарными колебаниями структуры на резонансной частоте данной моды. Эта теорема взаимности проверялась измерениями звукового давления при помощи независимой серии стационарных колебаний структуры, возбужденной вибратором.

Для теоретического расчета реакции на отдельной моде сложной структуры на близкий подводный взрыв необходимо знать кроме модальной формы, резонансной частоты и объема взрывного пузыря в зависимости от времени также еще фактор положения для каждой моды. Фактор положения равен отношению обобщенной силы, с которой действует взрыв на некоторой моде, к объемному ускорению звукового пузыря или отношению звукового давления в точке, где должен производиться взрыв, к ускорению вибрирующего объекта. В рассматриваемой работе фактор положения определяется из измерений с помощью теоремы взаимности или аналитически. В работе [48] фактор положения вычисляется с помощью числового решения интегрального уравнения на ЭЦВМ.

Теоретические расчеты переходной характеристики на единичной моде проверялись экспериментально. При этом небольшие заряды подрывались вблизи плавающей или погруженной оболочки. Деформации структур измерялись с помощью тензодатчиков, связанных в специальные мостовые цепочки, чтобы получить нормальные координаты основных изгибных мод колебаний. Параметры мод для теоретического расчета были получены из независимой серии стационарных вибраций структур. Сравнение теории и эксперимента дает удовлетворительное совпадение для основного изгибного колебания и худшие результаты для более высоких изгибных мод.

В работе [49] выводятся соотношения взаимности для механико-акустических систем с учетом шести степеней свободы механической стороны. Справедливость законов взаимности обсуждается лишь кратко. Приводятся примеры применения принципа взаимности для экспериментального определения механико-акустических функций передачи звука от механизма по конструкции, причем рассматриваются акустические области на близких расстояниях от структуры. В этой же работе указывается на простоту и удобство взаимного эксперимента по сравнению с прямыми измерениями. Работа [50] является продолжением работы [49] и большей частью посвящена обзору работ по выполнению и применению принципа взаимности в акустике, однако выполнение взаимности рассматривается кратко, а при обсуждении применения принципа взаимности затрагиваются в основном работы авторов.

Выводы

Хотя принцип взаимности для линейных динамических систем с конечным числом степеней свободы известен уже давно (1873 г.), тем не менее справедливость этого принципа для акустических полей, в которых находятся колеблющиеся упругие тела, удалось доказать только в последнее

время (1959 г.). Принцип взаимности для систем с конечным числом степеней свободы вытекает из симметрии обобщенных импеданцев системы. Существование принципа взаимности для акустических полей можно рассматривать как следствие свойств симметрии (самосопряженности) оператора Гельмгольца или волнового уравнения. Принцип взаимности для акустических полей, в которых находятся упругие тела, следует из самосопряженности операторов теории упругости.

В акустике движущейся среды принцип взаимности не выполняется, но все же в этом случае удается сформулировать теорему, в известной мере подобную теореме взаимности в акустике покоящейся среды. Полученными соотношениями удается связать решения двух краевых сопряженных задач акустики.

Полученные интегральные соотношения взаимности для колеблющихся упругих тел сводят решение краевых задач излучения звука к решению соответствующей дифракционной задачи. Благодаря применению этих соотношений теоретически решены некоторые задачи о полях излучения тонкими упругими оболочками и пластинами, возбужденными как сосредоточенными, так и статистически распределенными силами.

При наличии диссипации энергии колебаний взаимность выполняется для гармонических процессов в системах, где потери пропорциональны колебательной скорости или могут быть учтены в комплексном коэффициенте упругости.

Принцип взаимности находит широкое применение для расчета энергетических характеристик звуковых полей на близких расстояниях, создаваемых сложными вибрирующими конструкциями. В известных нам работах по применению принципа взаимности не рассматриваются вопросы о звуковых полях излучения, о диаграммах направленности, а также о возбуждении сложных структур точечными импульсными источниками на больших расстояниях. Эти вопросы могут представить определенный интерес как в практическом, так и в теоретическом отношении.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. W. Strutt (Rayleigh).* Some General Theorems Relating to Vibrations. Proc. London Math. Soc., 1873, *4*, 357–368.
2. *J. W. Strutt (Rayleigh).* Astatical Theorem. Philos. Mag., 1874, *48*, 452–456; 1875, *49*, 183–185.
3. *J. W. Strutt (Rayleigh).* On the Application of the Principle of Reciprosity to Acoustics. Proc. Roy. Soc., 1876, *25*, 118–122.
4. *Дж. В. Стрэтт (Рэлей).* Теория звука, т. I, 72–78, 107–110; т. II, § 294, М., ГИТТЛ, 1955.
5. *H. V. Helmholtz.* Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. Crelle's J., 1860, *57*, 1–70.
6. *H. V. Helmholtz.* Ueber die physikalische Bedeutung Prinzips der kleisten Wirkung. Borchardt – Crelle's J., 1886, *100*, 137–166, 213–222.
7. *H. V. Helmholtz.* Vorlesungen über die mathematischen Prinzipien der Akustik. Leipzig, 1898, § 28, 54.
8. *В. В. Фурдуев.* Теоремы взаимности. М.– Л., ГИТТЛ, 1948.
9. *Ph Le. Corbeiller.* Origine des termes gyroscopiques dans les équations des appareils électromecaniques. Ann. Poste Telegr. Telephon., 1929, XVIII, 1, 1–22.
10. *Е. Скучик.* Основы акустики. М., Изд-во иностр. лит., 1958, т. 1, 409–420; 1959, т. 2, 279.
11. *Е. Л. Шендеров.* Волновые задачи гидроакустики. Л., «Судостроение», 1972.
12. *Ф. М. Морз, Г. Фешбах.* Методы теоретической физики. М., Изд-во иностр. лит., 1958, т. 1, 749, 773.
13. *W. Schottky.* Das Gesetz des Tiefempfangs in der Akustik und Elektroakustik. Z. Phys., 1926, *36*, 689–736.
14. *W. J. Trott.* Reciprocity Parameters Derivel from Radiated Power. J. Acoust. Soc. America, 1962, *34*, 7, 789.
15. *B. D. Simmons, R. J. Urick.* The Plane Wave Reciprocity Parameter and Its Application to the Calibration of Electroacoustic Transducers at Close Distances. J. Acoust. Soc. America, 1949, *21*, 6, 633–635.
16. *R. J. Bobber, G. A. Saben.* Cylindrical Wave Reciprocity Parameter. J. Acoust. Soc. America, 1961, *33*, 4, 446–451.

17. *И. И. Клюкин.* Акустические измерения в судостроении. Л., «Судостроение», 1966.
18. *А. А. Ямпольский.* Абсолютная градуировка электроакустических преобразователей методом взаимности в квазисферическом поле. Тр. Комиссии по акустике, Изд-во АН СССР, 1955, сб. № 8, 21–45.
19. *L. L. Foldy, H. Primakoff.* A General Theory of Passive Linear Electroacoustic Transducers and the Electroacoustic Reciprocity Theorem. J. Acoust. Soc. America, 1945, *17*, 2, 109–120; 1947, *19*, 1, 50–58.
20. *А. Л. Гольденвейзер.* Теория упругости тонких оболочек. М.– Л., ГИТТЛ, 1956.
21. *Л. М. Лямшев.* Некоторые вопросы рассеяния и излучения звука в движущейся среде (докт. дис.). Акуст. ин-т АН СССР, М., 1964.
22. *Л. М. Лямшев.* К теории колебаний неоднородных упругих пластин. Акуст. ж., 1964, *10*, 1, 81–97.
23. *Л. М. Лямшев.* К теории излучения звука тонкими упругими оболочками и пластинами. Акуст. ж., 1959, *5*, 4, 420–427.
24. *Л. М. Лямшев.* К вопросу о принципе взаимности в акустике. Докл. АН СССР, 1959, *125*, 6, 1231–1234.
25. *Л. М. Лямшев.* Об одном способе решения задачи излучения звука тонкими упругими оболочками и пластинами. Акуст. ж., 1959, *5*, 1, 122–124.
26. *Л. М. Лямшев.* Излучение статистических звуковых полей тонкими упругими оболочками и пластинами. Сб. рефератов докладов IV Всес. акуст. конф., М.–Л., Изд-во АН СССР, 1958.
27. *Е. Л. Шендеров.* Излучение звука системой источников сквозь упругую цилиндрическую оболочку. Акуст. ж., 1963, *9*, 3, 388–390.
28. *Ф. Морз.* Колебания и звук. М.– Л., ГИТТЛ, 1949, § 29.
29. *J. Van Bladel.* Low-Frequency Scattering by Hard and Soft Bodies. J. Acoust. Soc. America, 1968, *44*, 4, 1069–1093.
30. *С. Н. Ржевкин.* Курс лекций по теории звука. Изд-во МГУ, 1960, 262.
31. *Л. А. Чернов.* О кривизне лучей и принципе взаимности в акустике движущейся среды. Тр. Комиссии по акустике, 1951, сб. 6, 63–65.
32. *Л. М. Лямшев.* О некоторых интегральных соотношениях в акустике движущейся среды. Докл. АН СССР, 1961, *138*, 3, 575–578.
33. *Л. М. Лямшев.* Излучение звука упругими оболочками, возбужденными турбулентным аэродинамическим потоком. Акуст. ж., 1961, *7*, 1, 59–66.
34. *Л. Ландау, Е. Лифшиц.* Статистическая физика. М., «Наука», 1964, § 123; Механика сплошных сред. М.– Л., ГИТТЛ, 1944, § 56, § 74.
35. *M. A. Heckl.* Measurements of Absorption Coefficients on Plates. J. Acoust. Soc. America, 1962, *34*, 6, 803–808.
36. *M. A. Heckl.* Einige Anwendungen des Reziprozitäts Prinzips in der Akustik. Frequenz, 1964, *18*, 9, 299–310.
37. *J. H. Jansen.* A Note on Reciprosity in Linear Passive Acoustical Systems. Acustica, 1958, *8*, 2, 76–78.
38. *А. А. Харкевич.* Теоремы взаимности и закон Шоттки в применении к нестационарным процессам. Ж. техн. физ., 1938, *8*, 21, 1889–1895.
39. *G. Chertock.* General Reciprocity Relation. J. Acoust. Soc. America, 1962, *34*, 7, 989.
40. *G. Chertock.* The Flexural Response of a Submerged Solid to a Pulsating Gas. Bublle. J. Appl. Phys., 1953, *24*, 2, 192–197.
41. *М. Д. Хаскинд.* Возмущающие силы и заливаемость судов на волнении. Изв. АН СССР, Отд. техн. наук, 1957, *7*, 65–79.
42. *R. H. Lyon, G. Maidanik.* Statistical Methods in Vibration Analysis. A.J.A.A.J., 1964, *2*, 6, 1015–1024 (русск. пер.: Ракетная техника и космонавтика, 1964, *2*, 6, 50–52).
43. *R. W. Smith.* Response and Radiation of Structural Modes Excited by Sound. J. Acoust. Soc. America, 1962, *34*, 5, 640–670.
44. *M. A. Heckl.* Schallabstrahlung von Platten bei punktförmiger Anregung. Acustica, 1959, *9*, 6, 371–380.
45. *L. Cremer.* Theorie der Schalldämmung dünner Wände bei schrägem Einfall. Akust. Zeitschrift, 1942, *7*, 3, 81–104.
46. *M. A. Heckl, E. Rathe.* Relationship between the Transmission Los and the Impact – Noise Isolation of Floor Structures. J. Acoust. Soc. America, 1963, *35*, 11, 1825–1830.
47. *G. Chertock.* Transient Flexural Vibrations of Ship-Like Structures Exposed to Underwater Explosions. J. Acoust. Soc. America, 1970, *48*, 1(2), 170–180.
48. *G. Chertock.* Sound Radiation from Vibrating Surfaces. J. Acoust. Soc. America, 1964, *36*, 7, 1305–1313.
49. *H. F. Steenhock, T. Ten Wolde.* The Reciprocal Measurement of Mechanical-Acustical Transfer Functions. Acustica, 1970, *23*, 5, 301–305.
50. *T. Ten Wolde.* On the Valicity and Application of Reciprocits in Acoustical, Mechano-Acoustical and other Dynamical Systems. Acustica, 1973, *28*, 1, 23–32.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
12 июля 1974 г.