

Исследование акустических свойств некоторых органических жидкостей на частотах 0,3—3 ГГц. Акуст. ж., 1972, 18, 2, 318—320.

3. И. Г. Михайлов, В. А. Соловьев, Ю. П. Сырников. Основы молекулярной акустики. М., «Наука», 1964.

4. Физическая акустика. Под ред. У. Мэзона, т. II, ч. А. М., «Мир», 1968.

Ташкентский государственный педагогический институт
им. Низами, Кафедра общей физики

Поступила
10 декабря 1973 г.

УДК 534.222.1

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЗАБОЛОТСКОЙ — ХОХЛОВА

О. В. Руденко

В работе [1] было получено нелинейное уравнение, описывающее распространение ограниченных звуковых пучков:

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial \rho'}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{c_0 \rho_0} \rho' \frac{\partial \rho'}{\partial \tau} \right] = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} \rho'.$$

Здесь ρ' — возмущение плотности среды, z — продольная координата, $\tau = t - z/c_0$, $\varepsilon = (\gamma + 1)/2$, Δ_{\perp} — лапласиан по поперечной координате $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Во многих случаях оказывается более удобной другая форма представления уравнения (1). К ней можно перейти, выполнив замену переменных

$$(2) \quad \tau = S[z, x, y, \rho'(z, x, y, \tau)].$$

Дифференцируя выражение (2) как неявную функцию, вычислим производные, входящие в уравнение (1); в результате придем к искомому представлению

$$(3) \quad \left[\frac{S_z + \frac{c_0}{2} (\nabla_{\perp} S)^2 + \frac{\varepsilon}{c_0 \rho_0} \rho'}{S_{\rho'}} \right]_{\rho'} = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} S.$$

Как нетрудно убедиться, выражения

$$(4) \quad S_1^{(0)} = - \frac{\varepsilon}{c_0 \rho_0} z \rho',$$

$$(5) \quad S_2^{(0)} = - \frac{\varepsilon}{c_0 \rho_0} z \ln \frac{z}{z_0} \rho' + \frac{r^2}{2c_0 z}$$

являются точными решениями уравнения (3), а следовательно, и исходного уравнения (1). Ценность этих решений состоит в том, что они представляют собой фазы плоской и сферической волн, распространяющихся в нелинейной среде. Однако сами по себе точные формулы (4), (5) малоинтересны. Для отыскания более интересных решений, описывающих поведение различных начальных возмущений, целесообразно, отталкиваясь от порождающих выражений (4), (5), искать асимптотическое (при $\omega \rightarrow \infty$) решение в виде

$$(6) \quad S_{1,2} = S_{1,2}^{(0)} + \frac{1}{\omega} F_{1,2}(z, r, \rho').$$

Подставляя это выражение в уравнение (3) и пренебрегая членами, нелинейными по F , получим

$$(7) \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial \rho'} + \frac{\varepsilon z}{2\rho_0} \Delta_{\perp} F_1 = 0,$$

$$(8) \quad \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial \rho'} + \frac{r}{z} \frac{\partial^2 F_2}{\partial r \partial \rho'} - \frac{\rho'}{z} \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial \rho'^2} + \frac{1}{\rho'} \frac{\partial F_2}{\partial \rho'} \right) + \frac{\varepsilon}{2\rho_0} z \ln \frac{z}{z_0} \Delta_{\perp} F_2 = 0.$$

Уравнения (7), (8) были выведены в работах [1, 2] непосредственно из уравнения (1). Использование формы (3) позволяет значительно облегчить выкладки, что важно для построения высокочастотной теории возмущений (см. [3]), и, кроме того, проясняет физический смысл получаемых решений.

Тривиальным следствием уравнений (7), (8) являются решения вида $F_1 = \Phi_1(\rho')$,

$F_2 = \Phi_2(z\rho')$, где $\Phi_{1,2}$ — произвольные функции, или иначе:

$$(9) \quad \rho' = \Phi_1^{-1} \left[\omega\tau + \frac{\varepsilon}{c_0\rho_0} \omega\rho'z \right],$$

$$(10) \quad \rho' = \frac{1}{z} \Phi_2^{-1} \left[\omega\tau + \frac{\varepsilon}{c_0\rho_0} \omega\rho'z \ln \frac{z}{z_0} - \frac{\omega r^2}{2c_0z} \right].$$

Выражения (9), (10) также представляют собой точные решения уравнений (1), (3). Они указывают на то, что в первом приближении нелинейность не влияет на амплитудные искажения волны. Это позволяет рассматривать нелинейные процессы в пучках без учета дифракции [4, 5] и учитывать зависимость всех величин от r параметрическим образом.

Наряду с выражениями (4), (5), (9), (10) можно построить еще один класс точных решений уравнения (3). Последнее, очевидно, будет тождественно удовлетворено при выполнении следующих соотношений:

$$(11) \quad S_z + \frac{c_0}{2} (\nabla_{\perp} S)^2 = -\frac{\varepsilon}{c_0\rho_0} \rho', \quad \Delta_{\perp} S = 0.$$

Нетрудно проверить, что решениями уравнений (11) являются выражения вида

$$(12) \quad S = \Phi \left(\frac{\rho'}{\rho_0'} \right) - \alpha \frac{\varepsilon}{c_0} \frac{\rho_0'}{\rho_0} z \left(\frac{\rho'}{\rho_0'} \right) \pm \pm X_{\perp} \left[\frac{2\varepsilon}{c_0^2} \frac{\rho_0'}{\rho_0} (\alpha-1) \left(\frac{\rho'}{\rho_0'} \right) \right]^{1/2}.$$

Здесь X_{\perp} может равняться x для плоского пучка и $r \cos(\varphi + \varphi_0)$ — для трехмерного; α , φ_0 , ρ_0' — произвольные константы. Решение (12) пригодно для анализа однополярных ($\alpha \neq 1$) возмущений, заданных при $z=0$ в виде

$$\rho' = \rho_0' \Phi^{-1} \left[\tau \pm X_{\perp} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{c_0^2} (\alpha-1) \rho'} \right].$$

Поперечное изменение формы импульса разрежения, обеспечивающее его стационарность

Значение $\alpha > 1$ соответствует импульсу сжатия, $\alpha < 1$ — импульсу разрежения. При $\alpha = 1$ решение (12) переходит в решение (9), а при $\alpha = 0$ — в стационарное (не зависящее от z) решение, описывающее распространение начального возмущения — импульса разрежения — без искажения его формы, когда действие нелинейных процессов в точности компенсируется влиянием дифракции. Можно представить себе такую экспериментальную ситуацию, в которой требуется передать интенсивный сигнал на некоторое расстояние без значительных искажений его формы при $X_{\perp} = 0$. Тогда решение (12) позволит определить требуемое распределение возмущений $\rho'(\tau, X_{\perp})$ при $X_{\perp} \neq 0$.

В качестве примера для плоского пучка возьмем Φ в виде, показанном на фигуре (кривая 1). Кривые 2, 3 для $x = x_1$ и $x_2 > x_1$ получаются путем графического сложения $\rho'(\tau, 0)$ и кривой $-(\rho'/\rho_0')^{1/2}$ (тонкая линия на фигуре), «высота» которой увеличивается пропорционально x .

Разумеется, для передачи сигнала $\rho'(\tau, 0)$ без искажений требуемое распределение $\rho'(\tau, x)$ можно реализовать лишь с некоторой точностью, например до $x = a$. В этом случае стационарное решение вблизи оси будет искажаться на длинах $x \geq a^2 / c_0 T$, где T — длительность импульса разрежения.

В заключение хочется подчеркнуть, что основным результатом работы, по-видимому, нужно считать предложенный подход, основанный на представлении (3). Рассмотренные примеры иллюстрируют преимущества подхода как при отыскании точных решений, так и при построении различных приближенных методов расчета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. А. Заболотская, Р. В. Хохлов. Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков. Акуст. ж., 1969, 15, 1, 40—47.
2. Е. А. Заболотская, Р. В. Хохлов. Сходящиеся и расходящиеся звуковые пучки в нелинейных средах. Акуст. ж., 1970, 16, 1, 49—53.
3. Е. М. Воробьев, Е. А. Заболотская. О распространении высокочастотных звуковых пучков. Акуст. ж., 1973, 19, 6, 815—818.
4. О. В. Руденко, С. И. Солуян, Р. В. Хохлов. Ограниченные квазиплоские пучки периодических возмущений в нелинейной среде. Акуст. ж., 1973, 19, 6, 871—876.
5. Л. А. Островский, В. Е. Фридман. О направленности мощного акустического излучения. Акуст. ж., 1972, 18, 4, 584—589.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила
29 марта 1974 г.