УДК 534.26

ПОТЕНЦИАЛЫ ДЕБАЯ В ЗАДАЧЕ О ТРЕХМЕРНЫХ КОЛЕБАНИЯХ УПРУГОЙ СФЕРОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ

Л. А. Клещев

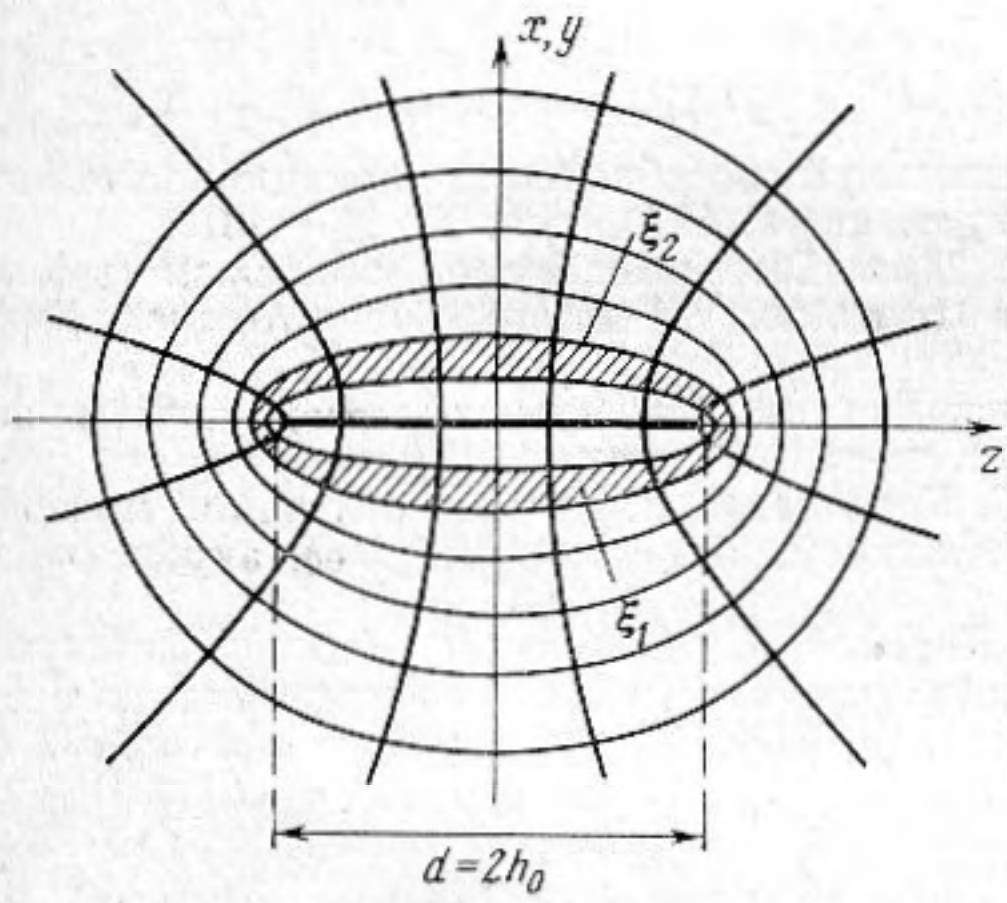
Безмоментная теория оболочек и метод собственных функций применялись до сих пор в задачах о колебаниях упругих тел сфероидальной формы в предположении, что движение двумерно (осесимметрично). Однако полученное недавно в [1] решение трехмерной задачи дифракции на упругом сфероиде с помощью потенциалов Дебая позволяет исследовать трехмерные (несимметричные) колебания подобных тел. Возьмем, например, упругую сфероидальную оболочку, ограниченную сфероидальными поверхностями ξ_1 и ξ_2 (фигура). При гармонических колебаниях оболочки вектор смещения ее подчиняется уравнению

$$(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}+\mu\Delta\mathbf{u}=-\rho\omega^2\mathbf{u}, \tag{1}$$

где λ и μ – коэффициенты Ламе материала оболочки, ρ – его плотность, ω – круговая частота. Выделим в векторе $\mathbf{u}$ в соответствии с теоремой Гельмгольца продольную и поперечную составляющие:

$$\mathbf{u}=-\mathrm{grad}\,\Phi+\mathrm{rot}\,\mathbf{A}, \tag{2}$$

при этом $\mathrm{div}\,\mathbf{A}=0$ [2]. В результате подстановки выражения (2) в уравнение (1) векторное уравнение движения сводится к двум уравнениям Гельмгольца (скалярному и векторному) [3] для выбранных нами потенциалов Φ и $\mathbf{A}$:



$$(\Delta+k_l^2)\,\Phi=0, \tag{3}$$

$$(\Delta+k_t^2)\,\mathbf{A}=0; \tag{4}$$

через k_l и k_t здесь обозначены волновые числа

$$k_l=\omega\left(\frac{\rho}{\lambda+2\mu}\right)^{1/2} \quad \text{и} \quad k_t=\omega\left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{1/2}.$$

Векторное уравнение Гельмгольца (4) в общем случае (трехмерная задача) в сфероидальных координатах не разделяется [2]. Однако компоненты векторной функции $\mathbf{A}$ могут быть разложены в ряды по сфероидальным волновым функциям, если обратиться к потенциалам Дебая U и V [4] и выразить через них функцию $\mathbf{A}$ [5, 1]:

$$\mathbf{A}=\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,(\mathbf{R}U)+ik_t\,\mathrm{rot}\,(\mathbf{R}V),$$

где $\mathbf{R}$ означает радиус-вектор точки наблюдения.

Эффективность такого представления становится очевидной, если учесть, что функции U и V подчиняются скалярному уравнению Гельмгольца, разделяющемуся в сфероидальных координатах:

$$(\Delta+k_l^2)\,U=0,$$

$$(\Delta+k_t^2)\,V=0.$$

Составляющие векторной функции $\mathbf{A}$ в сферической системе координат R, θ, φ определяются по формулам [5]:

$$A_R=\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2}+k_t^2\right)(RU),$$

$$A_\theta=\frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial R\,\partial\theta}(RU)+ik_t\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi},$$

$$A_\varphi=\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial R\,\partial\varphi}(RU)-ik_t\frac{\partial V}{\partial\theta}.$$

Выразим сфероидальные компоненты **A** через потенциалы Дебая, воспользовавшись формулами векторного анализа [6]:

$$
\begin{aligned}
A_\xi &= A_R \cos(R, \xi) + A_\theta \cos(\theta, \xi) + A_\varphi \cos(\varphi, \xi),\\
A_\eta &= A_R \cos(R, \eta) + A_\theta \cos(\theta, \eta) + A_\varphi \cos(\varphi, \eta),\\
A_\varphi &= A_R \cos(R, \varphi) + A_\theta \cos(\theta, \varphi) + A_\varphi \cos(\varphi, \varphi),
\end{aligned} \tag{5}
$$

где ξ, η, φ – сфероидальные координаты. В свою очередь

$$
\begin{gathered}
\cos(R, \xi) = (h_\xi)^{-1} \frac{\partial R}{\partial \xi}; \quad \cos(\theta, \xi) = \frac{R}{h_\xi} \frac{\partial \theta}{\partial \xi}; \quad \cos(\varphi, \xi) = \frac{R \sin\theta}{h_\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi},\\
\cos(R, \eta) = (h_\eta)^{-1} \frac{\partial R}{\partial \eta}; \quad \cos(\theta, \eta) = \frac{R}{h_\eta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta}; \quad \cos(\varphi, \eta) = \frac{R \sin\theta}{h_\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta},\\
\cos(R, \varphi) = (h_\varphi)^{-1} \frac{\partial R}{\partial \varphi} = 0; \quad \cos(\theta, \varphi) = \frac{R}{h_\varphi} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = 0; \quad \cos(\varphi, \varphi) = 1,\\
R = h_0 (\xi^2 - 1 + \eta^2)^{1/2}; \quad \theta = \arccos \frac{\xi\eta}{(\xi^2 - 1 + \eta^2)^{1/2}}; \quad \varphi \equiv \varphi.
\end{gathered} \tag{6}
$$

Здесь h_ξ, h_η, h_φ – масштабные множители сфероидальных координат, h_0 – половина межфокусного расстояния (фигура).

Подставляя выражения (6) в формулы (5), мы получим следующие выражения для сфероидальных компонент векторной функции:

$$
A_\xi = A_R \frac{h_0}{h_\xi} \frac{\xi}{(\xi^2 - 1 + \eta^2)^{1/2}} + A_\theta \frac{h_0}{h_\xi} (\xi^2 - 1 + \eta^2)^{1/2} \frac{\partial \theta}{\partial \xi}, \tag{7}
$$

$$
A_\eta = A_R \frac{h_0}{h_\eta} \frac{\eta}{(\xi^2 - 1 + \eta^2)^{1/2}} + A_\theta \frac{h_0}{h_\eta} (\xi^2 - 1 + \eta^2)^{1/2} \frac{\partial \theta}{\partial \eta}, \tag{8}
$$

$$
A_\varphi \equiv A_\varphi, \tag{9}
$$

где

$$
A_R = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial R^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial R^2} + k_t^2 \right) [h_0 (\xi^2 - 1 + \eta^2)^{1/2} U], \tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
A_\theta = {} & \frac{1}{h_0 (\xi^2 - 1 + \eta^2)^{1/2}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial R} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial R} \right]\\
& \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right] [h_0 (\xi^2 - 1 + \eta^2)^{1/2} U] + i k_t \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi}
\end{aligned} \tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
A_\varphi = {} & \frac{1}{(\xi^2 - 1 + \eta^2)^{1/2} \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial R} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial R} \right]\\
& \frac{\partial}{\partial \varphi} [(\xi^2 - 1 + \eta^2)^{1/2} U] - i k_t \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right] V,
\end{aligned} \tag{12}
$$

$$
\xi = \left[\frac{R^2 + h_0^2}{2h_0^2} + \sqrt{\frac{(R^2 + h_0^2)^2}{4h_0^4} - \frac{R^2 \cos^2\theta}{h_0^2}} \right]^{1/2}, \tag{13}
$$

$$
\eta_{1,2} = \pm \left[\frac{R^2 + h_0^2}{2h_0^2} - \sqrt{\frac{(R^2 + h_0^2)^2}{4h_0^4} - \frac{R^2 \cos^2\theta}{h_0^2}} \right]^{1/2}, \tag{14}
$$

где знак «плюс» соответствует $z > 0$, знак «минус» – $z < 0$.

Каждый из потенциалов Дебая и функции Ф можно разложить по фундаментальным решениям уравнения Гельмгольца:

$$
U = \sum_{n \geq m}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{S}_{m,n}(C_t, \eta) [A_{m,n} R_{m,n}^{(1)}(C_t, \xi) + B_{m,n} R_{m,n}^{(2)}(C_t, \xi)] \sin m\varphi, \tag{15}
$$

$$V = \sum_{n \geqslant m}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{S}_{m,n}(C_t, \eta) \left[C_{m,n} R_{m,n}^{(1)}(C_t, \xi) + D_{m,n} R_{m,n}^{(2)}(C_t, \xi) \right] \cos m\varphi, \tag{16}$$

$$\Phi = \sum_{n \geqslant m}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{S}_{m,n}(C_l, \eta) \left[E_{m,n} R_{m,n}^{(1)}(C_l, \xi) + F_{m,n} R_{m,n}^{(2)}(C_l, \xi) \right] \cos m\varphi, \tag{17}$$

где $\bar{S}_{m,n}(C_t, \eta)$ – нормированная угловая сфероидальная функция 1-го рода [7], $R_{m,n}^{(1)}(C_t, \xi)$ и $R_{m,n}^{(2)}(C_t, \xi)$ – радиальные сфероидальные функции 1-го и 2-го родов соответственно, $C_t = k_t h_0$ и $C_l = k_l h_0$ – волновые размеры.

На свободных границах оболочки отсутствуют нормальные и касательные напряжения. С помощью закона Гука и соотношений, связывающих между собой компоненты тензора деформаций и проекции вектора смещения **u**, напишем эти граничные условия:

$$\lambda k_l^2 \Phi + 2\mu \left(\frac{1}{h_\xi} \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} u_n \right) \Big|_{\xi=\xi_1;\ \xi=\xi_2} = 0, \tag{18}$$

$$\frac{h_\eta}{h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u_\eta}{h_\eta} \right) + \frac{h_\xi}{h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u_\xi}{h_\xi} \right) \Big|_{\xi=\xi_1;\ \xi=\xi_2} = 0, \tag{19}$$

$$\frac{h_\varphi}{h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u_\varphi}{h_\varphi} \right) + \frac{h_\xi}{h_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{u_\xi}{h_\xi} \right) \Big|_{\xi=\xi_1;\ \xi=\xi_2} = 0. \tag{20}$$

Подставляя выражения (2), (15) – (17) в формулы (18) – (20), мы получим бесконечную однородную систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложений $A_{m,n}$, $B_{m,n}$, $C_{m,n}$, $D_{m,n}$, $F_{m,n}$. Собственные частоты колебаний оболочки обращают в нуль определитель, составленный из членов при неизвестных коэффициентах *.

Заполняя оболочку жидкостью (на внешней границе по-прежнему вакуум), мы переходим от свободных колебаний к связанным. Рассмотренный способ расчета спектра собственных колебаний пригоден и в этом случае, но число типов неизвестных коэффициентов увеличивается на единицу вследствие наличия потенциала Φ_1 в жидкой внутренней среде:

$$\Phi_1 = \sum_{n \geqslant m}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} G_{m,n} \bar{S}_{m,n}(C, \eta) R_{m,n}^{(1)}(C, \xi) \cos m\varphi, \tag{21}$$

где C – волновой размер в жидкости.

Соответственно возрастает и число уравнений (а с ним и ранг определителя), появится условие непрерывности нормального смещения на внутренней границе оболочки и среды

$$u_\xi = u_{\xi 1}\Big|_{\xi=\xi_1}, \tag{22}$$

а нормальное напряжение в оболочке на этой границе будет равно давлению в жидкой среде и граничное условие (18) примет вид

$$\lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \left[(h_\xi h_\eta)^{-1} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} u_\eta + (h_\xi)^{-1} \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} \right] = \Lambda k^2 \Phi_1\Big|_{\xi=\xi_1}, \tag{23}$$

где Λ – модуль упругости жидкости, k – волновое число.

Если же оболочка помещена в жидкую среду, то гармонические колебания в ней могут поддерживаться только за счет энергии, подводимой извне (вынужденные колебания), так как во внешней среде появляется потенциал расходящейся от оболочки волны. Бесконечная система уравнений для неизвестных коэффициентов становится при этом неоднородной, и резонансы оболочки могут быть выявлены по максимумам излучения энергии в жидкую среду, значения частоты, соответствующие этим максимумам, обращают определитель системы в нуль.

Оболочка, выполненная из материала с потерями, требуют внешнего возбуждения (для поддержания гармонических колебаний в ней) даже при свободных границах. Учесть диссипацию энергии можно простой заменой вещественных постоянных упругости комплексными [9], комплексными станут и волновые размеры, а это означает, что мы должны перейти к сфероидальным функциям с комплексными параметрами, введенными Мейкснером и Шефке [10].

---

* Подобным способом в работе [8] находятся нормальные осесимметричные моды упругого сфероида.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Т. Л. Гутман, А. А. Клещев.* Дифракция упругих волн на упругом сфероиде. Тр. ЛОЛКИ, 1974, вып. 91, стр. 31—37.
2. *Ф. М. Морз, Г. Фешбах.* Методы теоретической физики М., Изд-во иностр. лит., т. 2, 1960.
3. *A. Clebsch.* Über die Reflexion an einer Kugelfläche. J. reine und angew. Math., 1863, *61*, 195—201.
4. *P. Debye.* Das Verhalten von Lichtwellen in der Nähe eines Brennpunktes oder einer Brennline. Ann. Physik, 1909, *30*, 4, 755—776.
5. *В. А. Фок.* Теория дифракции от параболоида вращения. Сб. Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения М., «Сов. радио», 1957.
6. *Н. Е. Кочин.* Векторное исчисление и начала тензорного анализа. М., «Наука», 1965.
7. *А. А. Клещев, Л. С. Шейба.* Рассеяние звуковой волны идеальными вытянутыми сфероидами. Акуст. ж., 1970, *16*, 2, 264—268.
8. *S. K. Datta, A. H. Shah.* Axially Symmetric Waves in an Elastic Solid of Revolution J. Acoust. Soc. America, 1968, *44*, 2, 473—477.
9. *Е. Скучик.* Простые и сложные колебательные системы. М., «Мир», 1971.
10. *J. Meixner, E. W. Schäfke.* Matieusche und Sphäroidfunktionen. Berlin, 1954.

Ленинградский кораблестроительный институт

Поступила 9 августа 1973 г.

УДК 534.29:532.28

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДАВЛЕНИЯ ВОКРУГ ДВИЖУЩЕЙСЯ ПОЛОСТИ

Г. И. Кузнецов, И. Е. Щекин

В неоднородных акустических и гидродинамических полях, вблизи твердой стенки или свободной поверхности пульсирующие полости взаимодействуют с градиентами давления и движутся поступательно. Исследование взаимосвязи радиальных пульсаций и поступательного движения полостей представляет интерес, в частности, для анализа физических закономерностей кавитационной эрозии твердых поверхностей, вблизи которых кавитационные полости захлопываются. Потенциал φ этого поступательного движения со скоростью $\dot{x}$ в направлении положительной оси x для сферической полости переменного радиуса $R(t)$ в системе координат, жестко связанной с полостью, имеет вид

$$\varphi = \frac{R^2\dot{R}}{r} + \frac{R^3\dot{x}}{2r^2}\cos\theta. \tag{1}$$

Давление P в любой точке идеальной и несжимаемой жидкости с плотностью ρ и давлением на бесконечности P_∞ в отсутствие внешних сил, действующих на элемент объема жидкости, определяется уравнением Лагранжа – Коши, которое после подстановки производных от потенциала φ записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{P-P_\infty}{\rho} = {} & \frac{R}{r}(2\dot{R}^2+R\ddot{R}) + \frac{1}{2}\frac{R^2}{r^2}(R\ddot{x}+5\dot{R}\dot{x})\cos\theta + \\ & + \frac{R^3}{r^3}\dot{x}^2\left(\cos^2\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right) - \frac{1}{2}\frac{R^4}{r^4}\dot{R}^2 - \\ & - \frac{R^5}{r^5}\dot{R}\dot{x}\cos\theta - \frac{1}{2}\frac{R^6}{r^6}\dot{x}^2\left(\cos^2\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta\right).\end{aligned} \tag{2}$$

Для определения параметров $\dot{R}$, $\ddot{R}$, $\dot{x}$, $\ddot{x}$ используем при начальных условиях $t=0$, $R=R_0$, $\dot{R}=0$, $x=0$, $\dot{x}=U$ систему дифференциальных уравнений, определяющих радиальные пульсации и поступательное движение полости во внешнем поле давления, полученную в работе [1].

Численное интегрирование полученной системы уравнений позволило установить [1], что поступательное движение существенно изменяет параметры радиальных пульсаций и, следовательно, может повлиять на характер создаваемого сжимающейся или растущей полостью поля давления.

В несколько упрощенной форме (пренебрегая величиной градиента давления по сравнению с инерционными членами, а также учитывая вязкость жидкости только в