

ОБ ЭФФЕКТЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО УСИЛЕНИЯ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ НИЗКОЧАСТОТНОЙ ВОЛНОЙ НАКАЧКИ

И. Г. Иванов, В. М. Плужников

Известно, что распространяющиеся в изотропной твердой среде волны могут взаимодействовать друг с другом [1, 2]. При этом образуется комбинационная волна, частота ω_2 и волновой вектор k_2 которой определяются условиями синхронизма

$$(1) \quad \omega_2 = n\omega_1 \pm m\omega; \quad k_2 = nk_1 \pm mk,$$

где k_1 ; k и ω_1 ; ω — волновые векторы и частоты взаимодействующих волн.

В работе [3] было предложено использовать резонансное взаимодействие продольной и поперечной волн в изотропном твердом теле для параметрического усиления ультразвука. Однако при таком взаимодействии частота волны накачки должна превышать частоту волны сигнала, что создает технологические и аппаратные трудности при реализации усилителей СВЧ диапазона.

В радиотехнике аналогичная задача решается с помощью трехчастотных регенеративных параметрических усилителей с двумя холостыми частотами, в которых используется низкочастотная накачка [4].

Ниже рассматривается случай резонансного взаимодействия неколлинеарных продольных волн с образованием двух поперечных волн комбинационных частот, поляризованных в плоскости взаимодействия.

На фигуре показана взаимная ориентация волновых векторов продольных волн сигнала (k), накачки (k_1) и поперечных волн комбинационных частот (k_2, k_3). Условия синхронизма в этом случае имеют вид

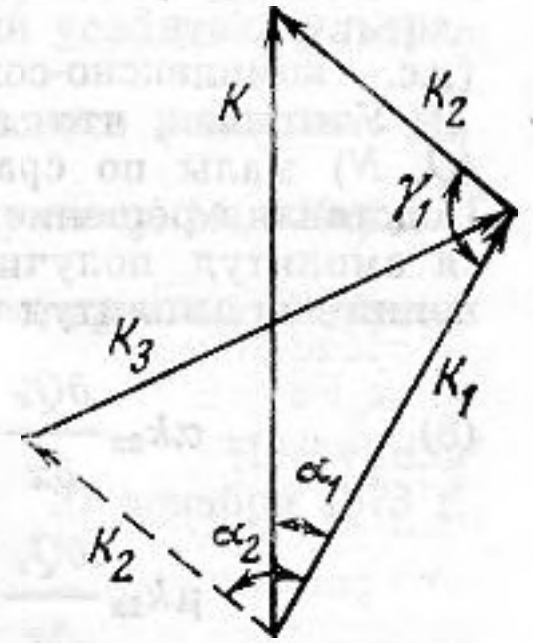
$$(2a) \quad \omega_2 = \omega - \omega_1, \quad k_2 = k - k_1,$$

$$(2b) \quad \omega_3 = \omega_1 - \omega_2 = 2\omega_1 - \omega, \quad k_3 = k_1 - k_2.$$

Направления распространения показанных на фигуре волн определяются углами α_1, α_2 и γ_1 [5], причем

$$(3) \quad \cos \alpha_1 = a^2 - \frac{p^2+1}{2p}(a^2-1); \quad \sin \gamma_1 = \frac{1}{a} \frac{p}{p-1} \sin \alpha;$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{1-a^2(3-2p)}{2a(p-1)}; \quad a = \frac{c_l}{c_t}; \quad p = \frac{\omega}{\omega_1},$$



где c_l и c_t — скорости распространения продольной и поперечной волн соответственно.

Поперечная волна (ω_2, k_2), образующаяся в результате взаимодействия волн сигнала и накачки, будет взаимодействовать с волной накачки, если выполняются законы сохранения энергии и квазиимпульса взаимодействующих фононов (2б).

Из этого условия, используя соотношения (3), можно получить уравнение

$$(4) \quad (a^2-1)p^4 - 4a^2(a^2-1)p^3 + 2(a^4-1)p^2 + 8a^2(a^2-1)p - 8a^2(a^2-1) = 0.$$

Корни уравнения (4) определяют отношение частот волн сигнала и накачки и, следовательно, угол пересечения, при котором будет иметь место четырехволновое взаимодействие. При этом, как следует из уравнений Мэнли и Роу [4], усиление возможно при $\omega > \omega_1 > \omega/2$. Поэтому для рассматриваемого в работе случая параметрического усиления продольной волны интерес представляют только корни уравнения (4) p_i , удовлетворяющие соотношению (5)

$$(5) \quad 1 < p_i < 2.$$

При рассмотрении этого явления предположим, что взаимодействующие волны имеют вид плоских волн, распространяющихся в плоскости XZ (фигура). Тогда для изотропного твердого тела без учета поглощения нелинейные уравнения движения [6] будут

$$(6) \quad \rho_0 \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} - \gamma \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial z} =$$

$$= \beta \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} \frac{\partial U_x}{\partial x} + \Gamma \left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} \frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \frac{\partial U_x}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \frac{\partial U_z}{\partial z} + 2 \frac{\partial^2 U_x}{\partial x \partial z} \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) +$$

$$+ \kappa \left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} \frac{\partial U_x}{\partial z} + 2 \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial z} \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) +$$

$$+ \tau \left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial z} \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial z} \frac{\partial U_x}{\partial x} \right) + \lambda \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} \frac{\partial U_z}{\partial z}.$$

Здесь ρ_0 — плотность недеформированного тела;

$$\beta = 3\alpha + 2A + 6B + 2C$$

$$\Gamma = \alpha + \frac{A}{2} + B; \quad \kappa = \mu + \frac{A}{2} + B,$$

$$\lambda = K - \frac{2}{3}\mu + 2B + 2C; \quad \tau = \lambda + \kappa;$$

где K — модуль сжатия, μ — модуль сдвига, A, B, C — модули третьего порядка. Уравнение для U_z имеет аналогичный вид и получается из уравнения (6) заменой индексов $x \rightarrow z; z \rightarrow x$.

Общее решение уравнений (6) можно написать в виде четырех волн

$$(7) \quad U_x = P_x \cos(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r}) + \frac{1}{2} (N_x e^{i(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r})} + Q_x e^{i(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r})} + \text{к. с.}),$$

$$U_z = P_z \cos(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r}) + \frac{1}{2} (V e^{i(\omega_1 t - k_z z)} + Q_z e^{i(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r})} + N_z e^{i(\omega_3 t - \mathbf{k}_3 \mathbf{r})} + \text{к. с.})$$

(к.с. — комплексно-сопряженная функция).

Учитывая, что амплитуда волн сигнала (V) и волн комбинационных частот (Q, N) малы по сравнению с амплитудой волны накачки (P), положим $P = \text{const}$. Подставляя решение (7) в уравнения (6) и применяя метод медленно изменяющихся амплитуд, получим при выполнении условия (2) следующие укороченные уравнения для амплитуд взаимодействующих волн:

$$(8) \quad \alpha k_{2x} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \mu k_{2z} \frac{\partial Q_x}{\partial z} + \frac{1}{2} \gamma \left(k_{2x} \frac{\partial Q_z}{\partial z} + k_{2z} \frac{\partial Q_z}{\partial x} \right) + g N_z^* + b N_x^* + kcV = 0,$$

$$\mu k_{2x} \frac{\partial Q_z}{\partial x} + \alpha k_{2z} \frac{\partial Q_z}{\partial z} + \frac{1}{2} \gamma \left(k_{2z} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + k_{2x} \frac{\partial Q_x}{\partial z} \right) + e N_z^* + d N_x^* + kfV = 0,$$

$$\alpha k_{3x} \frac{\partial N_x^*}{\partial x} + \mu k_{3z} \frac{\partial N_x^*}{\partial z} + \frac{1}{2} \gamma \left(k_{3x} \frac{\partial N_z^*}{\partial z} + k_{3z} \frac{\partial N_z^*}{\partial x} \right) + d Q_z + b Q_x = 0,$$

$$\mu k_{3x} \frac{\partial N_z^*}{\partial x} + \alpha k_{3z} \frac{\partial N_z^*}{\partial z} + \frac{1}{2} \gamma \left(k_{3x} \frac{\partial N_x^*}{\partial z} + k_{3z} \frac{\partial N_x^*}{\partial x} \right) + e Q_z + g Q_x = 0,$$

$$\alpha \frac{dV}{dz} - f Q_z - c Q_x = 0,$$

где коэффициенты уравнений g, b, c, d, e, f пропорциональны амплитуде накачки и зависят от величины и направления волновых векторов и от коэффициентов при нелинейных членах в уравнении (6). Так,

$$g = \frac{1}{4} \{ \Gamma (P_x k_{1z} k_{2z} k_{3z} - 2k_{1x}^3 P_z) +$$

$$+ \kappa [P_z k_{1x} k_{2z} (k_{3z} + 2k_{1z}) - 2P_x k_{1x}^2 k_{3z}] - \lambda (P_z k_{1x} k_{1z} k_{3z} + k_{1x}^2 k_{3z} P_x) \}.$$

Здесь k_{ix}, k_{iz} ($i=1, 2, 3$) — проекции волновых векторов на оси x, z . Подобным образом выражаются и остальные коэффициенты.

Из последнего уравнения системы следует, что амплитуды волн зависят только от координаты z , а следовательно, можно упростить задачу и рассматривать систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.

Полученная система решалась на ЭВМ для случая использования в качестве изотропной среды плавленого кварца. Для отношения скоростей продольной и поперечной волн, равном $a=1,59$ [5], корнем уравнения (4), удовлетворяющим условию параметрического усиления волны сигнала (5), является $p_0=1,43$. При этом $\alpha=25^\circ$. При нахождении коэффициентов системы (8) использовались значения модулей третьего

порядка для плавленого кварца, приведенные в работе [5]. Для найденного отношения частот p_0 и начальных условий

$$z=0; V=V_0; Q=0; N=0$$

существует неустойчивое решение для волны сигнала, нарастающее с координатой z , которое хорошо аппроксимируется выражением

$$V=V_0 \operatorname{ch} \nu z, \quad \nu=0,18 k_1^2 P,$$

где k_1 — модуль волнового вектора накачки, P — амплитуда волны накачки. Так, для волны накачки частоты 100 Мгц , мощность которой составляет 10 вт/см^2 , $\nu=0,5 \cdot 10^{-2} \text{ см}$.

Таким образом, полученные результаты свидетельствуют о том, что при некоторых дискретных отношениях частот и, следовательно, углах пересечения, продольных волн, определяемых из условий синхронизма для случая образования двух поперечных волн комбинационных частот, возможно усиление высокочастотной волны.

Рассмотренный эффект может найти применение, например, в оптоакустических устройствах, где необходимо усиливать продольные волны, частоты которых достигают сотен мегагерц. Использование низкочастотной накачки является, очевидно, наиболее перспективным решением этой проблемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. С. Степанов. К вопросу о взаимодействии продольных и поперечных упругих волн. Акуст. ж., 1967, 13, 2, 270–275.
2. З. А. Гольдберг, Р. В. Гребнева. Нелинейное взаимодействие продольной и двух поперечных волн в изотропном твердом теле. Акуст. ж., 1972, 18, 3, 386–390.
3. Е. А. Заболотская, С. И. Солуян, Р. В. Хохлов. Параметрический усилитель ультразвука. Акуст. ж., 1966, 12, 2, 188–191.
4. К. В. Филатов. Введение в инженерную теорию параметрического усиления, М., «Советское радио», 1971.
5. Л. К. Зарембо, В. А. Красильников. Введение в нелинейную акустику. М., «Наука», 1967.
6. З. А. Гольдберг. О взаимодействии плоских продольных и поперечных упругих волн. Акуст. ж., 1960, 6, 3, 307–310.

Московский инженерно-физический институт

Поступила
27 декабря 1973 г.

УДК 534.2:532.528

КАВИТАЦИОННАЯ ПРОЧНОСТЬ ВОДЫ ПРИ ВОЗНИКНОВЕНИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ КАВИТАЦИИ

В. П. Ильин, Ю. Л. Левковский, А. В. Чалов

Кавитационная прочность воды определяется числом и размерами содержащихся в ней ядер кавитации. Общеизвестно, что ядрами кавитации являются нерастворенные в воде мельчайшие газовые пузырьки. Неустойчивый рост этих пузырьков под воздействием растягивающих напряжений обуславливает возникновение кавитации. Поскольку ядра кавитации в воде распределены случайным образом, то и появление каверн в потоке является случайным процессом. Число зародышей определенных размеров, претерпевающих неустойчивый рост, зависит от величины и длительности действия растягивающих напряжений в данном объеме жидкости, а также от вероятности попадания зародышей в этот объем. В свою очередь вероятность попадания зародыша определенных размеров в объем жидкости, в котором действуют растягивающие напряжения, зависит от концентрации зародышей, их распределения по размерам и пространству, а также от величины этого объема. Естественно предположить, что зародыши распределены в пространстве равномерно, поэтому, чем больше объем жидкости, в котором действуют растягивающие напряжения, тем больше число прокавитировавших зародышей.

Предположим, что распределение зародышей по размерам является непрерывным и пусть $n(R)$ — плотность этого распределения в единице объема. Тогда функ-