

не более  $\pm 7\%$  при 95%-ном уровне значимости. Как видно, рассчитанные и измеренные с помощью трубок Вентури разного диаметра величины кавитационной прочности отстоявшейся водопроводной воды удовлетворительно согласуются между собой.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Перник. Проблемы кавитации. Л., «Судостроение», 1966, 195–228.
2. Ю. Л. Левковский. Статистические характеристики пузырьковой кавитации. Акуст. ж., 1973, 19, 2, 200–206.
3. М. Г. Сиротюк. Экспериментальные исследования ультразвуковой кавитации. В кн. Мощные ультразвуковые поля. М., «Наука», 1968, 167–182.
4. Л. Р. Гаврилов. Содержание свободного газа в жидкостях и методы его измерения. В кн.: Физические основы ультразвуковой технологии. М., «Наука», 1970, 396–426.
5. M. Strasberg. Undissolved air cavities as cavitation Nuclei. Cavitation in Hydrodynamics, London, 1956, 1–13.
6. G. Iernetti. Cavitation Threshold Dependence on Volume. Acustica, 1971, 24, 4, 191–196.

Поступила  
11 марта 1974 г.

УДК 534.2 : 532.528

### РОСТ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА ВСЛЕДСТВИЕ МИКРОПОТОКОВ В ШУМОВОМ ПОЛЕ

А. В. Чалов

Влияние акустических микропотоков на рост газового пузырька, совершающего линейные объемные пульсации в растворе газа в жидкости под действием звуковой монохроматической волны, рассмотрено в работах [1, 2]. Представляет интерес рассмотреть аналогичную задачу для случая пульсаций пузырька в шумовом поле.

Для звуковой волны уравнение, описывающее рост во времени среднего радиуса пузырька в поле микропотоков в пересыщенном растворе газа в жидкости, имеет вид [3]

$$(1) \quad R^2 \dot{R} \left[ \left( \frac{f_r^2}{f^2} - 1 \right)^2 + \delta^2 \right]^{1/2} = \frac{(C_0 - C_s) P_a}{8\pi^2 \rho_r \rho_{ж} f} \left( \frac{D}{f} \right)^{1/2},$$

где  $R$  и  $\dot{R}$  — радиус и радиальная скорость пузырька,  $P_a$  — амплитуда звукового давления,  $f$  — циклическая частота,  $\rho_r$  и  $\rho_{ж}$  — массовая плотность газа и жидкости,  $D$  — коэффициент диффузии,  $C_0$  — концентрация растворенного газа в жидкости,  $C_s$  — равновесная концентрация (предполагаем, что  $C_0 > C_s$ ),  $f_r$  — резонансная частота пузырька, связанная с его радиусом формулой Миннаерта

$$(2) \quad f_r = \frac{1}{2\pi R} \left( \frac{3\gamma P}{\rho_{ж}} \right)^{1/2},$$

где  $P$  — статическое давление жидкости в месте расположения пузырька,  $\gamma$  — показатель политропы,  $\delta$  — коэффициент потерь пузырька, который для простоты будем полагать не зависящим от  $f$  и  $f_r$ . Выражения (1) и (2) справедливы при пренебрежении влиянием сил поверхностного натяжения жидкости.

Выражению (1) можно придать другой вид, более удобный для дальнейших рассуждений. Используя известную формулу для амплитуды  $r$  радиальных колебаний пузырька

$$(3) \quad r = \frac{P_a}{4\pi^2 \rho_{ж} f^2 R \left[ \left( \frac{f_r^2}{f^2} - 1 \right)^2 + \delta^2 \right]^{1/2}}$$

и производя преобразования в формуле (1) с учетом зависимости (3), получим

$$(4) \quad R \dot{R} = \frac{(C_0 - C_s)}{2\rho_r} D^{1/2} (r f^{1/2}).$$

Рассмотрим пульсации пузырька в шумовом поле, полагая, что спектр мощности шума  $S(f)$  непрерывен и не зависит от времени. Воспользуемся известным соотношением, имеющим место при воздействии случайного стационарного процесса на линейную колебательную систему [4]

$$(5) \quad F_2(f) = F_1(f) |K(jf)|^2,$$

где  $F_1(f)$  и  $F_2(f)$  — спектры мощности на входе и выходе системы,  $K(jf)$  — комплексный коэффициент передачи системы,  $j$  — мнимая единица.

Тогда для спектра мощности  $r_f$  амплитуды радиальных колебаний пузырька получим выражение

$$(6) \quad r_f = \frac{S(f)}{16\pi^4 \rho_{ж}^2 R^2 f^4 \left[ \left( \frac{f_r^2}{f^2} - 1 \right)^2 + \delta^2 \right]}.$$

С учетом выражения (6) среднеквадратичное значение произведения  $(rf^{1/2})$  определится в виде

$$(7) \quad \overline{rf^{1/2}} = \left\{ \int_0^{\infty} \frac{S(f) f df}{16\pi^4 \rho_{ж}^2 R^2 f^4 \left[ \left( \frac{f_r^2}{f^2} - 1 \right)^2 + \delta^2 \right]} \right\}^{1/2}$$

Строго говоря, для частот, превышающих резонансную частоту на два порядка и более, когда длина волны оказывается близкой или меньше радиуса пузырька, выражения типа (3) и (6) становятся несправедливыми. Однако учитывая, что при  $f \gg f_r$  квадрат амплитудной характеристики пузырька уменьшается пропорционально  $f^{-4}$ , можно полагать, что вклад в значение интеграла (7) высокочастотных составляющих спектра будет весьма мал. Поэтому без существенной погрешности верхний предел этого интеграла можно принять равным  $\infty$ . Подставляя среднеквадратичное значение множителя  $(rf^{1/2})$  из формул (7) в (4), после преобразований получим

$$(8) \quad R^2 \dot{R} = \frac{(C_0 - C_*) D^{1/2}}{8\pi^2 \rho_{ж} \rho_r} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{S(f) df}{f^3 \left[ \left( \frac{f_r^2}{f^2} - 1 \right)^2 + \delta^2 \right]} \right\}^{1/2}.$$

Уравнение (8) связывает радиус пузырька со временем в общем виде. Интеграл, входящий в уравнение (8), зависит от радиуса  $R$  через резонансную частоту  $f_r$ .

В качестве примера использования уравнения (8) определим рост радиуса пузырька во времени, когда функция  $S(f)$  задана в следующем виде: в диапазоне частот от 0 до  $f_x$   $S(f) = S_0 f^2 / f_x^3$ , от  $f_x$  до  $\infty$   $S(f) = S_0 f_x / f^2$ , где  $S_0$  — некоторая величина, имеющая размерность квадрата давления,  $f_x$  — некоторая граничная частота. Такой вид функции  $S(f)$  в первом приближении соответствует кавитационным источникам шума [5].

Интеграл, входящий в уравнение (8), после преобразований примет вид

$$(9) \quad I = \frac{S_0 I_1}{f_x^3} + \frac{S_0 f_x I_2}{f_r^4},$$

где

$$I_1 = \frac{1}{4(1+\delta^2)} \ln[\bar{f}_x^4 (1+\delta^2) - 2\bar{f}_x^2 + 1] + \frac{1}{2\delta(1+\delta^2)} \left[ \operatorname{arctg} \frac{(1+\delta^2)\bar{f}_x^2 - 1}{\delta} + \operatorname{arctg} \frac{1}{\delta} \right];$$

$$I_2 = \frac{1}{4} \ln \{ [\bar{f}_x^4 (1+\delta^2) - 2\bar{f}_x^2 + 1] (1+\delta^2) \bar{f}_x^{-4} \} + \frac{1}{2\delta} \left[ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{(1+\delta^2)\bar{f}_x^2 - 1}{\delta} \right]; \quad \bar{f}_x = \frac{f_x}{f_r}.$$

Из-за сложного вида интеграла уравнение (8) не может быть решено в квадратурах. Ограничиваясь рассмотрением мелких пузырьков, положим, что  $f_r \gg f_x$ . Тогда с точностью до малых высших порядков получим

$$(10) \quad I = \frac{S_0 f_x}{f_r^4} \left( \pi/2\delta + \ln \frac{R_x}{R} \right),$$

где  $R_x$  — резонансное значение радиуса для частоты  $f_x$ . Подставляя выражение (10) в формулу (8) и интегрируя с учетом выражения (2), получим

$$(11) \quad \frac{R-R_0}{(\pi/2\delta + \ln R_x/R)^{1/2}} = \frac{(C_0-C_s)(DS_0f_x)^{1/2}}{6\gamma\rho_r P} (t-t_0),$$

где  $R_0$  — радиус пузырька в момент времени  $t_0$ . Из-за высокой добротности пузырьков ( $\delta \approx 10^{-1}$ ) функцию  $\left(\frac{\pi}{2\delta} + \ln \frac{R_x}{R}\right)^{1/2}$  можно рассматривать как изменяющуюся

весьма медленно во времени, поэтому при интегрировании в формуле (8) она была вынесена из-под знака интеграла.

Для сравнения рассмотрим другой предельный случай, когда  $f_r \ll f_x$ . Тогда приближенное выражение для интеграла  $I$  примет вид

$$(12) \quad I = S_0(\pi/2\delta + \ln R/R_x)/f_x^3.$$

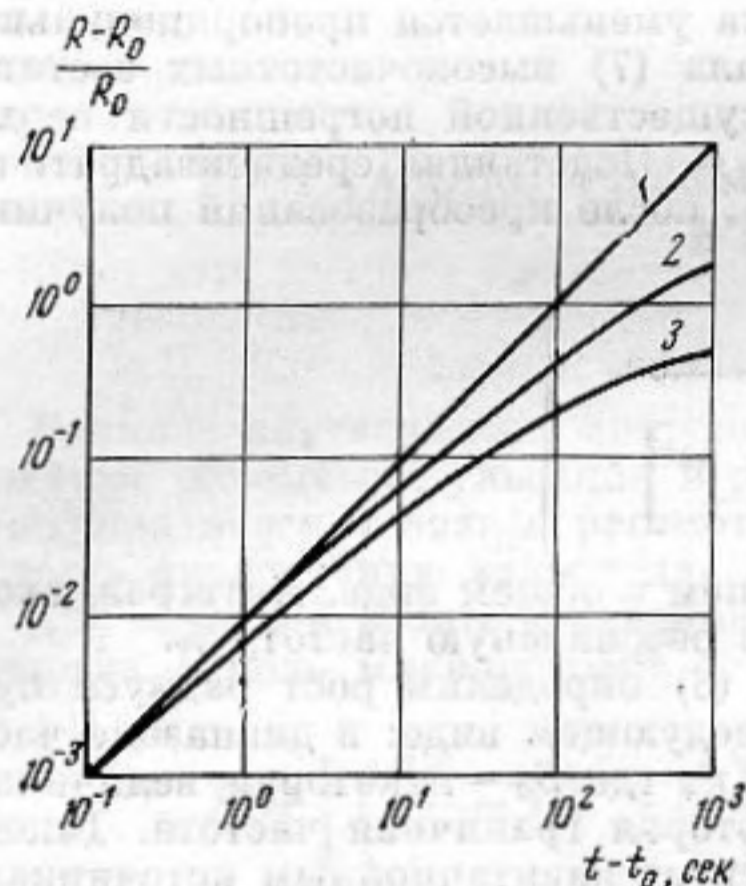
Подставляя это выражение в формулу (8) и интегрируя, получим

$$(13) \quad \frac{R^3-R_0^3}{(\pi/2\delta + \ln R/R_x)^{1/2}} = \frac{3(C_0-C_s)(DS_0)^{1/2}}{8\pi^2\rho_{ж}\rho_r f_x^{3/2}} (t-t_0).$$

По аналогии с предыдущим, при интегрировании функция  $(\pi/2\delta + \ln R/R_x)^{1/2}$  была вынесена из-под знака интеграла.

Из формул (11) и (13) видно, что скорость роста пузырька во времени в первом из рассмотренных случаев больше, чем во втором. Физически это объясняется тем,

что при принятой зависимости спектра шума от частоты основную роль в росте пузырька играют составляющие шума вблизи его резонанса. Из-за уменьшения резонансной частоты растущего пузырька уровни шума, соответствующие его резонансу, возрастают в первом случае и снижаются во втором.



Зависимость радиуса пузырька от времени

На фигуре представлены рассчитанные по выражениям (11) и (13) зависимости относительного приращения радиуса  $(R-R_0)/R_0$  пузырька от времени при следующих условиях:  $P = 10^5$  н/м<sup>2</sup>,  $\rho_{ж} = 10^3$  нсек<sup>2</sup>/м<sup>4</sup>,  $\rho_r = 1,3$  нсек<sup>2</sup>/м<sup>4</sup>,  $\gamma = 1,4$ ,  $D = 2 \cdot 10^{-9}$  м<sup>2</sup>/сек,  $C_s/\rho_r = 2 \cdot 10^{-2}$ ,  $C_0/\rho_r = 3 \cdot 10^{-2}$  (свежезалитая водопроводная вода),  $\delta = 10^{-1}$ ,  $R_0 = 3,3 \cdot 10^{-5}$  м. Кривые 1 и 2 построены соответственно для двух пар значений  $f_x$  и  $S_0$ :  $f_x = 10^3$  гц,  $S_0 = 1,8 \cdot 10^9$  н<sup>2</sup>/м<sup>4</sup> и  $f_x = 10^5$  гц,  $S_0 = 1,8 \cdot 10^{11}$  н<sup>2</sup>/м<sup>4</sup>, выбранных так, что спектральные уровни шума на резонансной частоте пузырька, соответствующей моменту времени  $t_0$  (10 кгц), в обоих случаях были одинаковы. При этом амплитуды колебаний радиуса пузырька в нулевой момент времени также практически одинаковы и равны  $3,3 \cdot 10^{-5}$  м. Как и следовало

ожидать, рост пузырька происходит быстрее, когда его резонансная частота соответствует понижающемуся с частотой участку спектра шума. На этой же фигуре кривой 3 представлена рассчитанная по выражению (1) зависимость радиуса пузырька от времени для случая монохроматической волны с частотой 10 кгц. Амплитуда волны  $P_0$  равна величине  $[S(f_r)\delta f_r]^{1/2}$  для момента времени  $t_0$ , что соответствует радиальной амплитуде в момент времени  $t_0$   $3,3 \cdot 10^{-5}$  м. Как видно, в последнем случае рост пузырька происходит медленнее, что объясняется быстрым спадом амплитуды колебаний радиуса по мере его роста.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Г. Статников. Микротоки у газового пузырька в жидкости. Акуст. ж., 1967, 13, 3, 464-466.
2. О. А. Капустина, Ю. Г. Статников. О влиянии микротоков на массопередачу в системе газовый пузырек — жидкость. Акуст. ж., 1967 13, 3, 383-386.
3. О. А. Капустина. Дегазация жидкостей. В кн. «Физические основы ультразвуковой технологии». М., «Наука», 1970, 255-336.
4. В. Л. Лебедев. Случайные процессы в электрических и механических системах. М., Физматгиз, 1958, 50-66.
5. И. Я. Миниович, А. Д. Перник, В. С. Петровский. Гидродинамические источники звука. Л., «Судостроение», 1972, 444-456.

Поступила  
12 мая 1974 г.