АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXII 1976 Вып. 1

УДК 534.222.2

ПРИМЕНЕНИЕ СИММЕТРИЙ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЗАБОЛОТСКОЙ – ХОХЛОВА

А. М. Виноградов, Е. М. Воробьев

Предлагается метод решения уравнения нелинейной акустики ограниченных пучков, основанный на использовании симметрий уравнения. Найден общий вид симметрий. Построены решения, выражаемые явными аналитическими формулами.

Процесс распространения двумерных квазиплоских звуковых пучков с учетом нелинейных гидродинамических свойств среды описывается уравнением [1]

$$\frac{\partial^2}{\partial q_1^2}\left(\frac{u^2}{2}\right)-\frac{\partial^2 u}{\partial q_1\,\partial q_2}+\frac{\partial^2 u}{\partial q_3^2}=0, \tag{1}$$

$$q_1>0,\quad q_2>0,\quad -\infty<q_3<+\infty.$$

Физический смысл входящих в уравнение величин следующий. Обозначим через $\rho(t, x, y)$ плотность среды. Тогда $\rho=\rho_0+\mu u(q_1, q_2, q_3)+O(\mu^2)$, где ρ_0 – постоянная равновесная плотность, μ – малый параметр. Координаты q_1, q_2, q_3 связаны с временной t и пространственными координатами x, y соотношениями

$$q_1=\frac{t-x/c_0}{\sqrt{\gamma+1}}\sqrt{2\rho_0 c_0},\qquad q_2=\mu x,\qquad q_3=\mu^{1/2}\sqrt{\frac{2}{c_0}}\,y. \tag{2}$$

Здесь c_0 – скорость звука в среде, γ – показатель адиабаты, x – координата в направлении распространения пучка, y – поперечная координата.

Уравнение (1) обладает одним замечательным свойством, а именно: у него имеется бесконечномерный запас симметрий (см. ниже). Это обстоятельство можно использовать для построения решений уравнения (1), ввиду того что всякое преобразование симметрии некоторого уравнения переводит решения этого уравнения снова в решения. В частности, даже исходя из нулевого решения уравнения (1), можно получить нетривиальные решения. Симметрии уравнения можно использовать также для построения специальных, в том числе автомодельных, решений уравнения (1), зависящих от инвариантных комбинаций переменных. При этом число независимых переменных в уравнении (1) уменьшается на одну, а в некоторых случаях удается свести уравнение (1) к уравнению первого порядка.

Опишем вкратце суть теории симметрий [2], основанную на результатах работы [3], в применении к уравнению (1). Для этого удобно ввести пространство J^2 с координатами (q, u, p, p_σ), где $q=(q_1, q_2, q_3)$, $p=(p_1, p_2, p_3)$, $p_\sigma=(p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{22}, p_{23}, p_{33})$. Символы p и p_σ отвечают частным производным первого и второго порядка. Пространство J^2 является обобщением фазового пространства классической механики, где оно связано с уравнением Гамильтона — Якоби. Уравнение (1) можно понимать как поверхность Γ в J^2, задаваемую равенством

$$H(q, u, p, p_\sigma) \equiv up_{11} + p_1^2 - p_{12} + p_{33} = 0. \tag{3}$$

Всякой функции $\varphi(q)$ сопоставим в J^2 трехмерную поверхность Π_φ — «график» $\varphi(q)$, определяемую по формулам

$$u(q) = \varphi(q), \quad p_j(q) = \frac{\partial\varphi(q)}{\partial q_j}, \quad p_{\alpha\beta}(q) = \frac{\partial^2\varphi(q)}{\partial q_\alpha\, \partial q_\beta}. \tag{4}$$

Функция $\varphi(q)$ — решение уравнения (1), если ее график Π_φ лежит на поверхности Γ.

Рассмотрим преобразование G пространства J^2, которое каждой точке (q, u, p, p_σ) пространства J^2 сопоставляет новую точку (q', u', p', p_σ') в соответствии с равенствами

$$q_k(q, u, p, p_\sigma, q', u', p', p_\sigma') = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, 13). \tag{5}$$

Преобразование G называется классифицирующим, если оно график Π_φ любой функции φ переводит снова в график $\Pi_{\varphi'}$ некоторой функции φ'. Подробнее, если подставить в (5) u, p, p_σ, удовлетворяющие (4), и разрешить (5) относительно $u'(q')$, $p'(q')$, $p_0'(q')$, то последние будут удовлетворять (4), где вместо φ будет стоять, быть может, другая функция $\varphi'(q')$. Классифицирующее преобразование G есть симметрия уравнения (1), если оно точки (q, u, p, p_σ) поверхности (3) снова переводит в точки, лежащие на поверхности (3). Отсюда следует, что преобразование симметрии переводит решения уравнения (1) снова в решения этого уравнения.

Классифицирующие преобразования G_τ: $(q^{(0)}, u^{(0)}, p^{(0)}, p_\sigma^{(0)}) \to (q^{(\tau)}, u^{(\tau)}, p^{(\tau)}, p_\sigma^{(\tau)})$, непрерывно зависящие от параметра τ, порождаются функциями $f(q, u, p)$. А именно, чтобы найти G_τ, достаточно проинтегрировать следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dq_j}{d\tau} = f_{p_j}(q, u, p), \qquad \frac{dp_j}{d\tau} = f_{q_j}(q, u, p), \tag{6}$$

$$\frac{du}{d\tau} = f(q, u, p) - \sum_{k=1} p_k f_{p_k}(q, u, p),$$

$$q|_{\tau=0} = q^{(0)}, \quad u|_{\tau=0} = u^{(0)}, \quad p|_{\tau=0} = p^{(0)}.$$

Тогда $q^{(\tau)} = q(\tau, q^{(0)}, u^{(0)}, p^{(0)})$ и т. д. Пусть начальные данные для системы (6) имеют вид (4) (без последнего соотношения). Обозначим через

$$q = \varkappa(q^{(0)}, \tau), \quad u = \psi(q^{(0)}, \tau), \quad p = \chi(q^{(0)}, \tau) \tag{7}$$

решение задачи (4), (6). Тогда при условии, что уравнения $q = \varkappa(q^{(0)}, \tau)$ однозначно разрешаются относительно $q^{(0)}$ $(q^{(0)} = \varkappa^{-1}(q, \tau))$, соотношения (7) при фиксированном τ определяют поверхность $\Pi_{u^{(\tau)}}$, где

$$u^{(\tau)}(q) = \psi(\varkappa^{-1}(q, \tau), \tau), \quad p^\tau(q) = \chi(\varkappa^{-1}(q, \tau), \tau), \tag{8}$$

$$p_{\alpha\beta}(q) = \frac{\partial^2 u^{(\tau)}(q)}{\partial q_\alpha\, \partial q_\beta}.$$

Подберем функцию $f(q, u, p)$ в (6) так, чтобы классифицирующее преобразование G_τ было симметрией уравнения (1). Для этого предположим, что $\varphi(q)$ в (4) есть решение уравнения (1), подставим выражение (8) в формулу (3) и потребуем, чтобы уравнение (3) удовлетворялось, т. е. $H(q^{(\tau)}, u^{(\tau)}, p^{(\tau)}, p_\sigma^{(\tau)}) = 0$ тождественно по τ. Дифференцируя последнее равенство по τ, получаем уравнение для функции $f(q, u, p)$. Авторы и В. В. Лычагин нашли, что функция f имеет вид

$$(9)\qquad \begin{aligned} f(q, u, p) = {} & [2(A'(q_2)+\beta)q_1+A''(q_2)q_3^2+B'(q_2)q_3+ \\ & +\gamma(q_2)]p_1+6A(q_2)p_2+[(4A'(q_2)+\beta)q_3+2B(q_2)]p_3+ \\ & +[4A'(q_2)-2\beta]u+2A''(q_2)q_1+A'''(q_2)q_3^2+B''(q_2)q_3+\gamma'(q_2). \end{aligned}$$

Здесь $A(q_2)$, $B(q_2)$, $\gamma(q_2)$ — произвольные функции, β — произвольная постоянная. Приведем в качестве примеров две симметрии уравнения (1).

1. *Масштабная симметрия.* При $A(q_2)=B(q_2)=\gamma(q_2)=0$, $\beta=-{}^1/_2$ имеем $f=-q_1p_1-{}^1/_2q_3p_3+u$. Для нахождения симметрии G_τ достаточно проинтегрировать часть уравнений системы (6);

$$\frac{dq_1}{d\tau}=q_1, \qquad \frac{dq_2}{d\tau}=0, \qquad \frac{dq_3}{d\tau}=\frac{1}{2}q_3, \qquad \frac{du}{d\tau}=u,$$

откуда $q_1=q_1^{(0)}e^\tau$, $q_2=q_2^{(0)}$, $q_3=q_3^{(0)}e^{\tau/2}$, $u=u^{(0)}e^\tau$. Следовательно, функция $u^{(\tau)}(q_1, q_2, q_3)=e^\tau u^{(0)}(q_1e^{-\tau}, q_2, q_3e^{-\tau/2})$ — решение (1), если $u^{(0)}(q_1, q_2, q_3)$ — решение.

2. *Галилеева симметрия.* Пусть $f=q_2p_1+1$ ($\gamma(q_2)=q_2$, остальные функции равны нулю). В этом случае интегрирование системы (6) приводит к новому решению

$$(10)\qquad u^{(\tau)}(q_1, q_2, q_3)=u^{(0)}(q_1+q_2\cdot\tau, q_2, q_3)+\tau.$$

Формула (10) может рассматриваться как переход в «движущуюся» со скоростью τ вдоль оси q_1 систему координат, причем функция u интерпретируется как скорость движения среды (в первом приближении по μ скорость и плотность пропорциональны), а q_2 играет роль времени.

Обратимся к построению симметричных решений уравнения (1). Решение $u^{(0)}(q)$ назовем f-симметричным, если новое решение $u^{(\tau)}(q)$, построенное по $u^{(0)}(q)$ с помощью системы (6), совпадает с $u^{(0)}(q)$, т. е.

$$u^{(\tau)}(q)=\psi(\varkappa^{-1}(q, \tau), \tau)=u^{(0)}(q).$$

Дифференцируя эту формулу по τ, после несложных преобразований получаем соотношение

$$(11)\qquad f\left(q, u^{(\tau)}(q), \frac{\partial u^{(\tau)}(q)}{\partial q}\right)=0$$

как необходимое условие симметричности решения. Симметрии $f(q, u, p)$, как это следует из (9), линейны по p, поэтому для решения уравнения (11) достаточна следующая характеристическая система уравнений:

$$(12)\qquad \frac{dq_1}{f_{p_1}}=\frac{dq_2}{f_{p_2}}=\frac{dq_3}{f_{p_3}}=\frac{du}{\sum\limits_{j=1}^{3} p_jf_{p_j}},$$

так как входящие в (12) функции зависят только от q, u. Линейные по p симметрии явно или неявно давно используются в работах по дифференциальным уравнениям. Подробнее их исследование и применение в задачах гидродинамики приведено, например, в [4]. Пусть $\eta_j(q)=C_j=\mathrm{const}$ — два первых независимых интеграла системы (12), а третий интеграл имеет вид $u=F(q)+G(q)C_3$, $C_3=\mathrm{const}$. Тогда всякая f-симметричная функция представима в виде

$$(13)\qquad u(q)=F(q)+G(q)v(\eta_1, \eta_2),$$

где $v(\eta_1, \eta_2)$ — произвольная функция. Подставляя выражение (13) в уравнение (1), получаем уравнение для $v(\eta_1, \eta_2)$.

Рассмотрим, например, симметрию, отвечающую функции $f=$ $=q_3p_1+2q_2p_3$. Система (12) имеет в этом случае интегралы

$$\eta_1(q)=q_2=C_1, \quad \eta_2(q)=2q_1q_2-q_3^2/2=C_2, \quad u=C_3.$$

В силу формулы (13) будем искать решение уравнения (1) в виде

$$u(q)=v(\eta_1, \eta_2). \tag{14}$$

После подстановки выражения (14) в уравнение (1), последнее можно привести к уравнению первого порядка

$$4\eta_1^2\frac{\partial}{\partial\eta_2}\left(\frac{v^2}{2}\right)-2\eta_2\frac{\partial v}{\partial\eta_2}-2\eta_1\frac{\partial v}{\partial\eta_1}-v=g(\eta_1), \tag{15}$$

где $g(\eta_1)$ — произвольная функция. Воспользуемся уравнением (15) для нахождения решений уравнения (1), задаваемых явными аналитическими формулами. Физический интерес представляет постановка следующих дополнительных условий для уравнения (1):

$$u|_{q_1=0}=0, \quad u|_{q_2=0}=u_0(q_1, q_3). \tag{16}$$

Решение задачи (1), (16) соответствует волне, возбуждаемой заданным граничным режимом $u_0(q_1, q_3)$ и распространяющейся в первоначально покоящейся среде. В соответствии с этим для уравнения (13) поставим дополнительное условие

$$v|_{\eta_1=0}=v_0(\eta_2). \tag{17}$$

Решение задачи (15), (17) при $g(\eta_1)=0$ имеет вид

$$v(\eta_1, \eta_2)=\frac{1}{\sqrt{\eta_1}}v_0(\eta_{02}), \tag{18}$$

где η_{02} — корень алгебраического уравнения

$$\eta_{02}+4v_0(\eta_{02})(1-\sqrt{\eta_1})=\eta_2/\eta_1. \tag{19}$$

Выражение (18) имеет смысл только в том случае, когда уравнение (19) имеет единственный корень. Пусть, например,

$$v_0(\eta_2)=-\theta(\eta_2)=\begin{cases}-1 & \text{при} \quad \eta_2>0\\ 0 & \text{при} \quad \eta_2<0.\end{cases}$$

Разрешая уравнение (19) относительно η_{02}, получаем решение в явном виде

$$u(q)=-\frac{1}{\sqrt{q_2}}\theta(2q_1q_2-q_3^2/2+4q_2(1-\sqrt{q_2})). \tag{20}$$

В плоскости $q_2=1$ решение (20) соответствует области разрежения постоянной амплитуды -1 с границами, движущимися со временем q_1 по закону $q_3=\pm2\sqrt{q_1}$ (фиг. 1). Вдоль пучка амплитуда разрежения уменьшается как $q_2^{-1/2}$, а граница пучка описывается уравнением

$$2q_1q_2-q_3^2/2+4q_2(1-\sqrt{q_2})=0.$$

Анализ этого уравнения показывает, что скорость рассматриваемой двумерной волны разрежения меньше скорости звука (фиг. 1), так как q_2 ограничено при $q_1=\text{const}$ $(t-x/c_0)=0$.

В общем случае, если положить $v_0(\eta_2)=0$ при $\eta_2<0$, то для $\eta_2<0$ всегда имеется отрицательный корень $\eta_{02}=\eta_2/\eta_1$ уравнения (19). В случае единственности этого корня решение (18) удовлетворяет нулевому начальному условию. При заданной $v_0(\eta_2)$ решение $u(q)$ в плоскости $q_2=1$ выражается формулой $u(q_1, 1, q_3)=v_0(2q_1-q_3^2/2)$ и, следовательно, возмущение среды сосредоточено по оси q_3 в области с движущимися по закону $q_3 = \pm 2\sqrt{q_1}$ границами (фиг. 2).

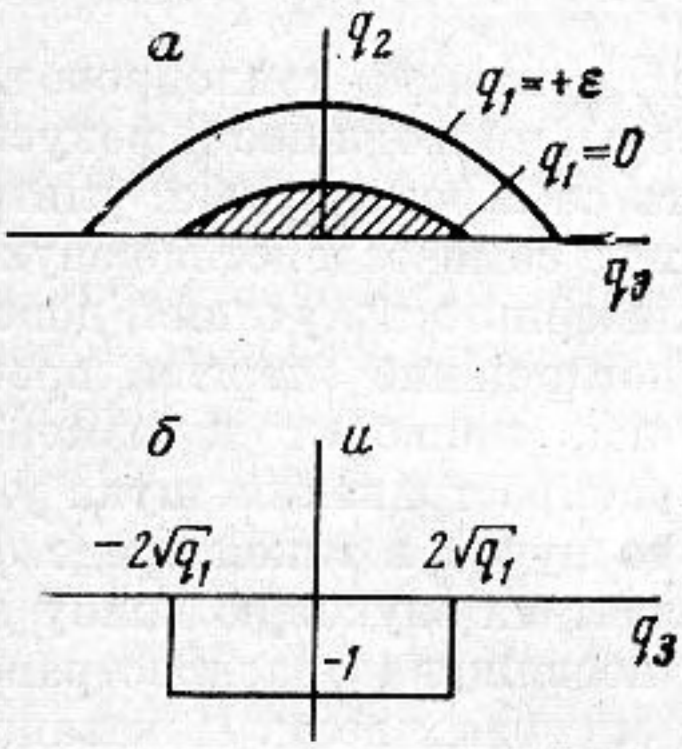
Приведем еще одно решение уравнения (1), задаваемое в явном виде и полученное с помощью (15),

$$
(21) \qquad u(q) = \begin{cases} {}^1/_2\sqrt{2q_1/q_2 - q_3^2/2q_2^2} & \text{при} \quad S(q) \geqslant 0 \\ 0 & \text{при} \quad S(q) \leqslant 0, \end{cases}
$$

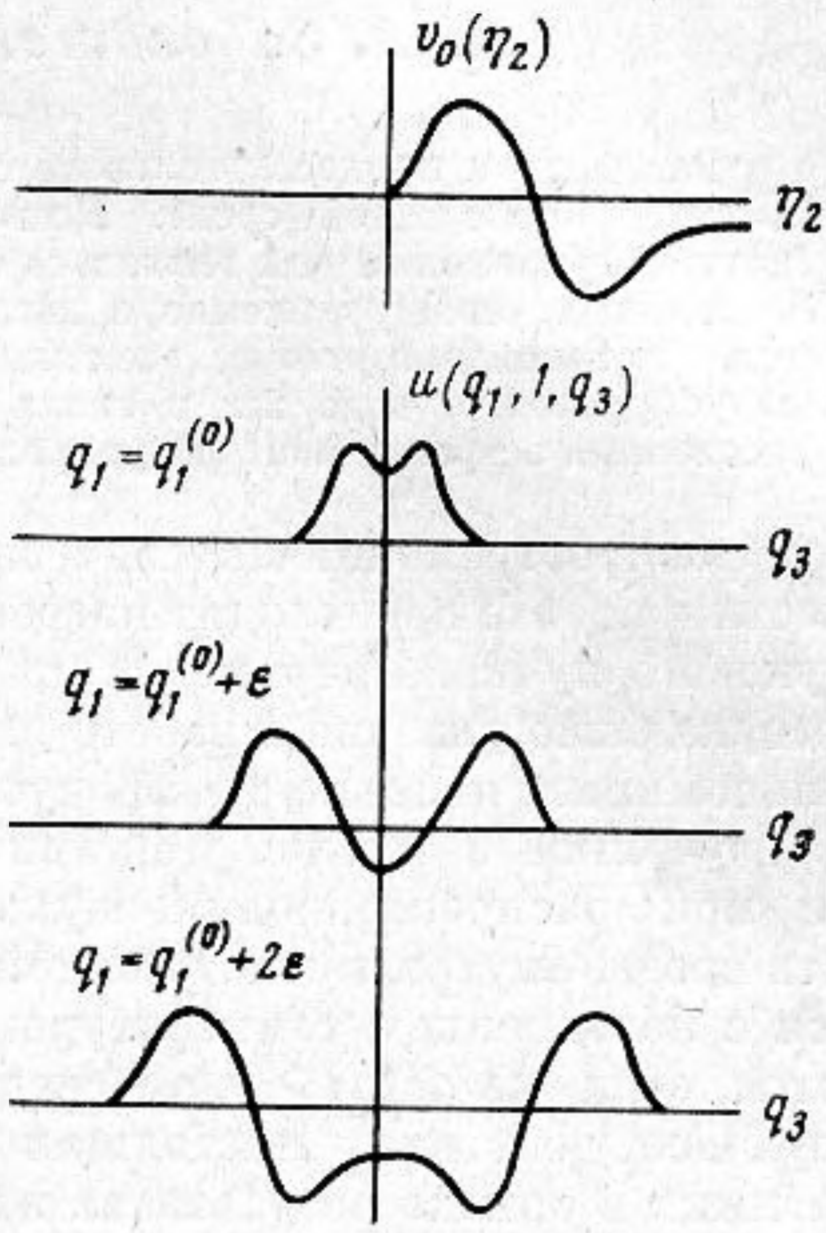
где $S(q) = 2q_1q_2 - q_3^2/2$. Решение (21) определено при $q_2 \geqslant \varepsilon > 0$ и удовлетворяет нулевому начальному условию. Отметим, что это решение, квадрат

Фиг. 1. Корни уравнения при различных q_1 (*а*), профиль волны разрежения в плоскости $q_2=0$ (*б*)

Фиг. 2. Построение профиля граничной волны по заданной $v_0(\eta_2)$



Фиг. 1



Фиг. 2

которого линеен по q_1, удовлетворяет уравнению (1) и без нелинейного члена, т. е. данное волновое движение не искажается нелинейностью. Будучи сосредоточено по оси q_3 в области $q_3^2 \leqslant 4q_1q_2$, конечной при конечных q_2, это решение может использоваться как тестовое решение для отладки программ численного решения задачи распространения ограниченных пучков на ЭВМ.

Отметим, что уравнение (1) можно свести к уравнению первого порядка и в случае других симметрий, например, выбирая $B(q_2)$ в формуле (9) произвольно и полагая $A(q_2) = \gamma(q_2) = \beta = 0$.

Авторы признательны Е. А. Заболотской и Р. В. Хохлову за внимание к работе и обсуждение результатов. Большой вклад в развитие техники работы с симметриями в J^2 внесли И. Красильщик, Б. Купершмидт, В. Лычагин.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Е. А. Заболотская, Р. В. Хохлов.* Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков. Акуст. ж., 1969, *15*, 1, 40—46.
2. *А. М. Виноградов.* Теория симметрий нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными Деп., № 2855-74, М., ВИНИТИ.
3. *А. М. Виноградов.* Многозначные решения и принцип классификации нелинейных дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР, 1973, *210*, 1, 15—19.
4. *Л. В. Овсянников.* Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, Изд-во АН СССР, 1962.

Московский институт электронного машиностроения

Поступила 8 октября 1974 г.