УДК 534.231.1–16

АКУСТИЧЕСКИЕ КРОМОЧНЫЕ ВОЛНЫ В ИЗОТРОПНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

В. С. Бондаренко, В. Ф. Дубовицкий

Рассмотрим возможность существования в изотропных твердых телах акустической волны, распространяющейся по кромке, образуемой пересечением двух ортогональных граней твердого тела и локализуемой в непосредственной близости от этой кромки.

Для решения этой задачи ограничимся рассмотрением упругого изотропного твердого тела, ограниченного плоскостями $x=|0$, $y=|0$. Ось z совместим с кромкой, образованной пересечением этих плоскостей, а направление осей x и y выберем таким образом, чтобы для твердого тела выполнялись соотношения: $x<|0$ и $y<|0$. В предположении отсутствия объемных сил уравнения движения твердой среды можно написать в виде [1]:

(1) $$\ddot{u}_\alpha - c_\alpha^2 \Delta u_\alpha = 0.$$

Здесь u_α означает какую-либо из компонент u_x, u_y или u_z, векторов смещения $\mathbf{u}_l$ или $\mathbf{u}_t$, а c_α – соответствующие вектору смещения скорости продольной c_l или поперечной c_t волн.

Для монохроматической волны, распространяющейся по оси z и затухающей с глубиной на обеих гранях, образующих кромку, решение будем искать в виде:

(2) $$u = \text{const} \exp\{i(kz - \omega t)\} f(x, y)$$

Подставляя это решение в уравнение (1), получим дифференциальное уравнение

(3) $$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_\alpha^2} \right) f(x, y).$$

Примем частное решение уравнения (3) в виде:

$$f(x, y) = X(x) Y(y).$$

Подстановка этого выражения в уравнение (3) даст два однородных уравнения

(4а) $$X''(x) - \lambda_\alpha^2 X(x) = 0$$ (4б) $$Y''(y) - \mu_\alpha^2 Y(y) = 0.$$

Здесь λ_α и μ_α – постоянные, связанные соотношением

(5) $$\lambda_\alpha^2 + \mu_\alpha^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_\alpha^2}.$$

Из дифференциальных уравнений (4) нетрудно получить выражения для $X(x)$ и $Y(y)$, удовлетворяющие условию необходимости ограничения полей (или стремления их к нулю) [2], когда $x \to \infty$, $y \to \infty$. Эти выражения имеют вид

(6) $$X(x) = \text{const} \exp(\lambda_\alpha x), \quad Y(y) = \text{const}(\mu_\alpha y).$$

Для того, чтобы волны с амплитудами, описываемыми равенствами (6), затухали соответственно по осям x и y, необходимо выполнение неравенств $\lambda_\alpha>|0$, $\mu_\alpha>|0$.

Следует отметить, что каждое из полученных выражений (6) имеет вид решения, описывающего поверхностную волну на соответственной грани. Так как полное решение уравнения (1) определяется произведением частных решений (6), имеем

(7) $$u_\alpha = \text{const} \exp\{i(kz - \omega t) + \lambda_\alpha x + \mu_\alpha y\},$$

где λ_α и μ_α — скорости ослабления, определяющие зону эффективного распространения акустических кромочных волн. Экспоненциальный характер затухания волн вдоль каждой из граней, образующих кромку, обеспечивает локализацию энергии кромочных волн в непосредственной близости от кромки.

Истинный вектор смещения должен быть определенной комбинацией векторов $\mathbf{u}_l$ и $\mathbf{u}_t$. Для нахождения этой комбинации ограничимся рассмотрением случая отсутствия механических напряжений на кромке [3], положив

(8) $$T_{1i} = T_{2j} = 0 \text{ при } x = 0,\ y = 0.$$
$$i, j = 1, 2, 3$$

Независимое выполнение этого требования, а также использование известных соотношений $\operatorname{rot} \mathbf{u}_l = |0$, $\operatorname{div} \mathbf{u}_t = |0$ после несложных алгебраических операций приводят к следующей зависимости между скоростями затухания компонент векторов смещения $\mathbf{u}_l$ и $\mathbf{u}_t$:

$$\lambda_\alpha=\mu_\alpha=2^{-1/2}(k^2-\omega^2/c_\alpha^2)$$

и к дисперсионному уравнению вида

$$k^2\lambda_t=\lambda_l(0{,}5k^2+\lambda_t^2).$$

Тривиальное решение последнего уравнения приводит к фазовой скорости акустической кромочной волны, определяемой равенством

$$c_k=c_t\left\{\frac{c_l^2}{2c_t^2}+2\left[\left(\frac{c_l^2}{2c_t^2}+2\right)^2-4\right]^{1/2}\right\}^{1/2}. \tag{9}$$

Как видно из (9) акустические кромочные волны являются бездисперсионными.

Компоненты смещения кромочных волн, распространяющихся по ортогональным граням, определяются следующими соотношениями

$$u_x=u_y=u_{lx}+u_{tx}=-ia\frac{\omega}{\sqrt{2}\,c_k}\left[\left(1-\frac{c_k^2}{c_l^2}\right)\times\right. \tag{10}$$

$$\times\exp\left\{\frac{\omega}{\sqrt{2}\,c_k}\left(1-\frac{c_k^2}{c_l^2}\right)^{1/2}(x+y)\right\}-\left(1-\frac{c_k^2}{c_t^2}\right)^{-1/2}\times$$

$$\left.\times\left(1-\frac{c_k^2}{c_t^2}\right)\exp\left\{\frac{\omega}{\sqrt{2}\,c_k}\left(1-\frac{c_k^2}{c_t^2}\right)^{1/2}(x+y)\right\}\right]\exp\left\{i\omega\left(\frac{z}{c_k}-t\right)\right\},$$

$$u_z=u_{lz}+u_{tz}=\frac{a\omega}{c_k}\left[\exp\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}\,c_k}\left(1-\frac{c_k^2}{c_l^2}\right)^{1/2}(x+y)\right\}-\right. \tag{11}$$

$$\left.-\left(1-\frac{c_k^2}{c_t^2}\right)\exp\left\{\frac{\omega}{\sqrt{2}\,c_k}\left(1-\frac{c_k^2}{c_t^2}\right)(x+y)\right\}\exp\left\{i\omega\left(\frac{z}{c_k}-t\right)\right\}\right.,$$

где a — произвольная постоянная.

Таким образом, акустические кромочные волны, распространяющиеся по кромке, образованной пересечением ортогональных граней изотропного твердого тела, со скоростью, определяемой выражением (9) и скоростями затухания на гранях

$$\lambda_l=\frac{\omega}{\sqrt{2}\,c_k}\left(1-\frac{c_k^2}{c_l^2}\right)^{1/2};\qquad \lambda_t=\frac{\omega}{\sqrt{2}\,c_k}\left(1-\frac{c_k^2}{c_t^2}\right)^{1/2},$$

полностью определяются выражениями (10) и (11) с точностью до постоянного множителя.

Заметим, что каждое из уравнений (4), рассматриваемое для соответственного полупространства, дает решение в виде чистой релеевской волны. Поэтому можно ожидать получения акустических кромочных волн как результата комбинации двух поверхностных волн, распространяющихся по ортогональным плоскостям в непосредственной близости от линии пересечения этих плоскостей. Вполне естественно ожидать существование кромочных волн в пьезоэлектрических кристаллах с определенной ориентацией пересекающихся граней. Следовательно, имеется реальная возможность возбуждения и приема таких волн преобразователями со встречно-штыревой структурой электродов, нанесенными на пьезоэлектрические материалы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Теория упругости, М., «Наука», 1965, 139.
2. *J. J. Campbell, W. R. Jones.* A method for Estimating Optimal Crystals Cuts and Propagation Direction for Excitation of Piezoelectric Surface Waves. IEEE Trans., SU-15, 1968, 4, 209–217.
3. *С. П. Тимошенко.* Курс теории упругости, Киев, «Наукова думка», 1972, 24.

Поступила
6 марта 1975 г.