АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXII 1976 Вып. 3

УДК 534.26

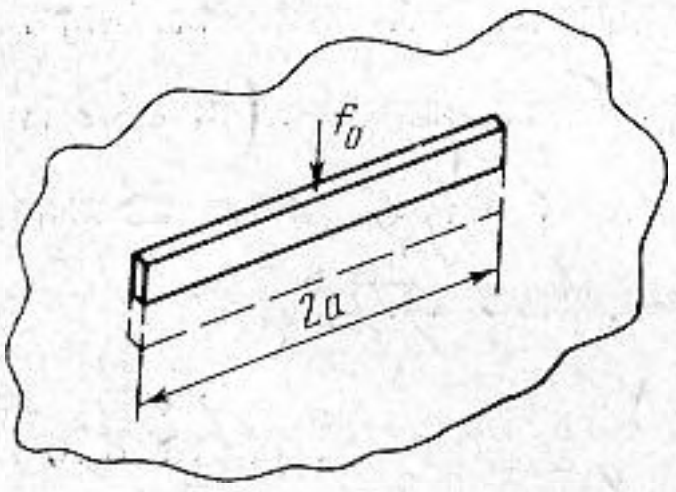
ПОДАТЛИВОСТЬ КОНЕЧНОГО РЕБРА, СОЕДИНЕННОГО С БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНОЙ

С. И. Ковинская, А. С. Никифоров

В функциях Матье решена задача о механической податливости одномерного ребра жесткости конечной длины, жестко и симметрично соединенного с бесконечной пластиной, по отношению к точечной силе, действующей в середине ребра. Показано, в частности, что податливость этой структуры при определенных соотношениях волновых размеров может превышать податливость пластины.

Исследуется податливость Y ребра конечной длины, симметрично и жестко соединенного с бесконечной пластиной. В средней точке ребра действует сосредоточенная поперечная сила, гармонически зависящая от времени и вызывающая изгибные колебания исследуемой конструкции (фиг. 1).

Считая ширину ребра много меньшей длины изгибных волн в пластине, можно исследуемую систему рассматривать как предельный случай эллиптической пластины, жестко соединенной с бесконечной пластиной меньшей толщины. Естественной системой координат в этом случае является эллиптическая, связанная с декартовой следующим образом: $x=a\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\eta$; $y=a\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\eta$, где $2a$ — длина ребра. Ниже дается постановка задачи и построение решения в общем случае невырожденного эллипса произвольного размера и эксцентриситета. Предельный случай вырожденного эллипса (одномерного стержня длины $2a$) можно получить при граничных условиях, рассматриваемых на $\xi=0$.



Фиг. 1. Соединение конечного ребра с бесконечной пластиной

Система уравнений, описывающая колебания внутренней (эллиптической) пластины и бесконечной внешней пластины, имеет вид

$$(1)\qquad (\nabla^4_{\xi,\eta}-k_в^4)\,w_1(\xi,\eta)=\frac{f_0}{D_в}F(\xi,\eta),$$

$$(\nabla^4_{\xi,\eta}-k_р^4)\,w_2(\xi,\eta)=0,$$

где $w_1(\xi,\eta)$ — смещение внутренней пластины, $w_2(\xi,\eta)$ — смещение внешней пластины, $k_в$, $k_р$, $D_в$, $D_р$ — волновые числа и изгибные жесткости внутренней и внешней пластин соответственно, $F(\xi,\eta)$ — распределение действующей силы.

В выбранной системе координат оператор Лапласа имеет вид [1]

$$\nabla^2_{\xi,\eta}=\frac{1}{a^2(\mathrm{ch}^2\xi-\cos^2\eta)}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right),$$

а рассматриваемое распределение

$$F(\xi,\eta)=\frac{1}{a^2(\mathrm{ch}^2\xi-\cos^2\eta)}\,\delta(\xi-\xi_0)\,\delta(\eta-\eta_0),$$

где ($\xi_0=0$, $\eta_0=\pi/2$) — точка приложения силы. На границе выполняется условие неразрывности смещений, углов поворота нормали, сил и моментов:

$$(2)\qquad w_1|_{\xi=\xi_0}=w_2|_{\xi=\xi_0},\quad \left.\frac{\partial w_1}{\partial\xi}\right|_{\xi=\xi_0}=\left.\frac{\partial w_2}{\partial\xi}\right|_{\xi=\xi_0},$$

$$D_{\text{в}}L_{1,2}(w_1)\,|_{\xi=\xi_0}=D_{\text{р}}L_{1,2}(w_2)\,|_{\xi=\xi_0},$$

где операторы L_1 и L_2 имеют вид

$$L_1=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\sigma\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}-\frac{\operatorname{sh}\xi\operatorname{ch}\xi}{\operatorname{sh}^2\xi+\sin^2\eta}(1-\sigma)\frac{\partial}{\partial\xi}+$$

$$+\frac{\sin\eta\cos\eta}{\operatorname{sh}^2\xi+\sin^2\eta}(1-\sigma)\frac{\partial}{\partial\eta},$$

$$L_2=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{a^2(\operatorname{sh}^2\xi+\sin^2\eta)}\nabla^2_{\xi,\eta}\right)+(1-\sigma)\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{1}{a\sqrt{\operatorname{sh}^2\xi+\sin^2\eta}}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{a\sqrt{\operatorname{sh}^2\xi+\sin^2\eta}}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\right].$$

Здесь σ — коэффициент Пуассона. Решение первого уравнения системы (1) является суммой общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного: $w_1=w_1'+w_1''$. Общее решение однородного уравнения в силу симметрии смещения относительно обеих осей граничного эллипса можно представить в виде суммы произведений функции Матье ce_{2m} и модифицированных функций Матье Ce_{2m} [2]:

$$(3)\qquad w_1'(\xi,\eta)=\sum_m\left[a_{2m}\mathrm{Ce}_{2m}(\xi,q_{\text{в}})\,\mathrm{ce}_{2m}(\eta,q_{\text{в}})+\right.$$

$$\left.+\bar a_{2m}\mathrm{Ce}_{2m}(\xi,-q_{\text{в}})\,\mathrm{ce}_{2m}(\eta,-q_{\text{в}})\right],\qquad q_{\text{в}}=\left(\frac{ak_{\text{в}}}{2}\right)^2.$$

Следует заметить, что конструкция решения $w_1(\xi,\eta)$ аналогична решению для колебания рассмотренной в работе [3] круглой пластины, соединенной с бесконечной пластиной при действии в центре внутренней пластины сосредоточенной поперечной силы; более того, граничные условия (2) рассматриваемой системы переходят в граничные условия в работе [3] при превращении эллипса в круг ($q_{\text{в}}\to0$, $q_{\text{р}}\to0$). Здесь $q_{\text{р}}=(ak_{\text{р}}/2)^2$.

Первая часть бесконечной суммы (3) соответствует стоячим волнам внутреннего эллипса, вторая часть — неоднородным волнам. Вид частного решения w_1'' неоднородного уравнения, появляющегося вследствие действия сосредоточенной силы, известен для цилиндрической системы координат [4]: $w_1''(k_{\text{в}}r)=-\dfrac{f_0}{8D_{\text{в}}k_{\text{в}}^2}\left[Y_0(k_{\text{в}}r)+\dfrac{2}{\pi}K_0(k_{\text{в}}r)\right]$. Используя разложение цилиндрических функций Y_0 и K_0 по функциям Матье [1], решение $w_1\cdot(\xi,\eta)$, таким образом, можно представить в виде

$$(4)\qquad w_1(\xi,\eta)=\sum_m\left\{\mathrm{ce}_{2m}(\eta,q_{\text{в}})\left[a_{2m}\mathrm{Ce}_{2m}(\xi,q_{\text{в}})-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2(A_0^{2m})^2\mathrm{Fey}_{2m}(\xi,q_{\text{в}})}{\mathrm{ce}_{2m}(\eta,q_{\text{в}})8D_{\text{в}}k_{\text{в}}^2\mathrm{ce}_{2m}\left(\frac{\pi}{2},q_{\text{в}}\right)}\right]+\right.$$

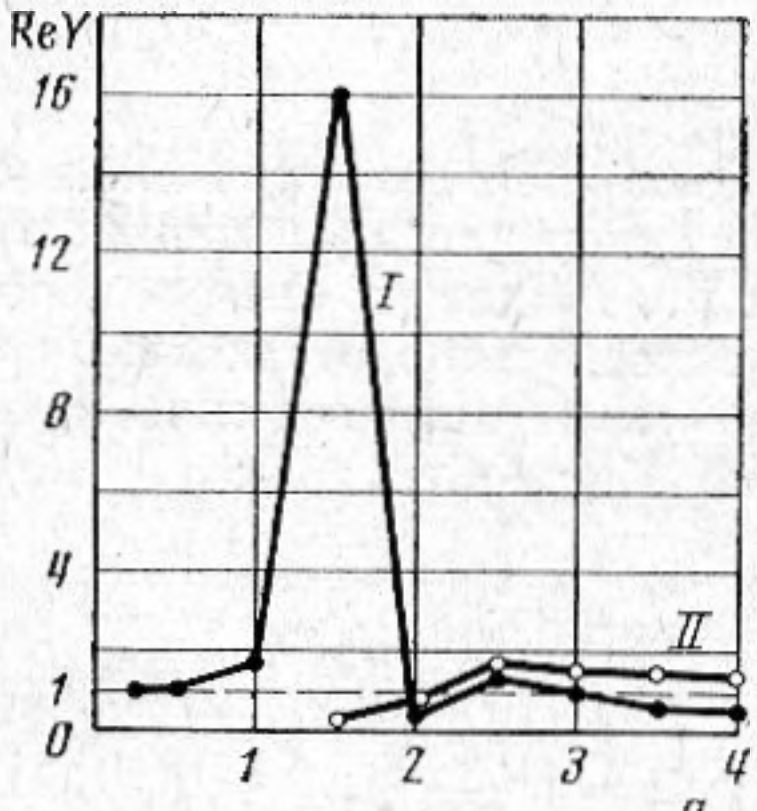
$$+\mathrm{ce}_{2m}(\eta, -q_в)\left[\bar{a}_{2m}\mathrm{Ce}_{2m}(\xi, -q_в) - \frac{4(A_0^{2m})^2\mathrm{Fek}_{2m}(\xi, -q_в)}{\mathrm{ce}_{2m}(0, q_в)\,\mathrm{ce}_{2m}\left(\frac{\pi}{2}, q_в\right)}\right]\Bigg\}.$$

Решение второго уравнения системы (1) является суммой [2]

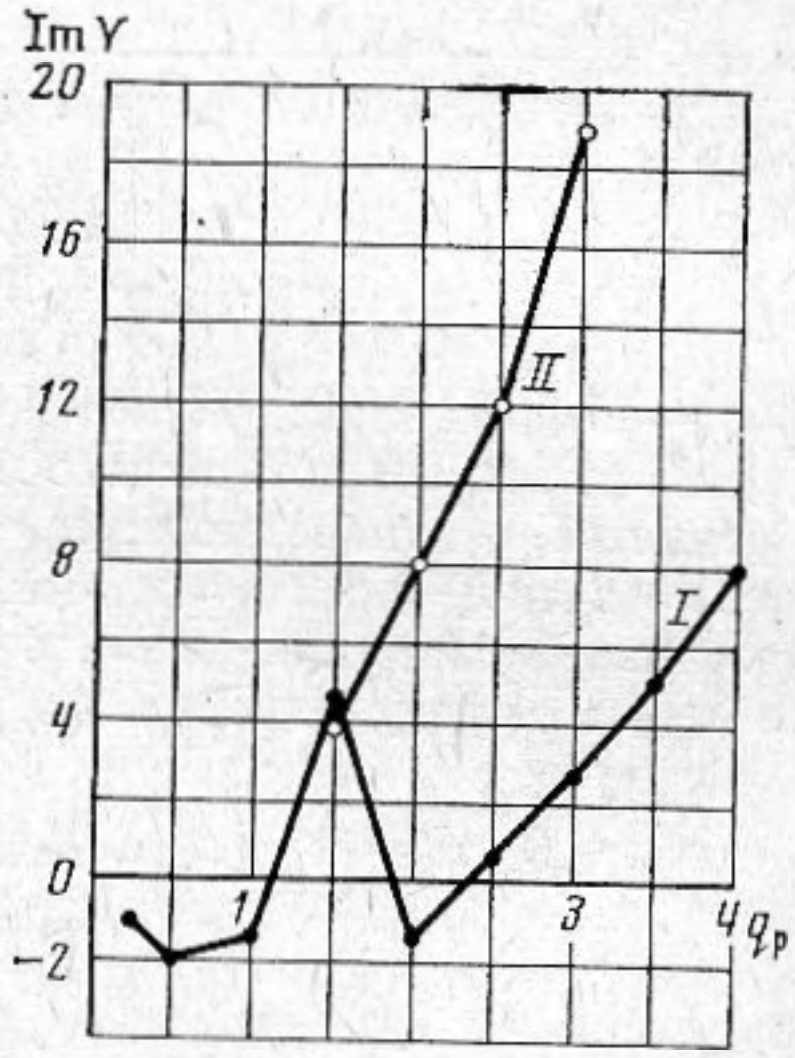
$$(5)\qquad w_2(\xi, \eta) = \sum_m [b_{2m}\mathrm{Me}_{2m}(\xi, q_р)\,\mathrm{ce}_{2m}(\eta, q_р) +$$

$$+\bar{b}_{2m}\mathrm{Me}_{2m}(\xi, -q_р)\,\mathrm{ce}_{2m}(\eta, -q_р)], \qquad q_р = \left(\frac{ak_р}{2}\right)^2.$$

В формулах (4) и (5) произведения функций $\mathrm{Me}(\xi, q)\,\mathrm{ce}(\eta, q)$ и $\mathrm{Ce}(\xi, q)\,\mathrm{ce}(\eta, q)$ по координате ξ представляют соответственно бегущую и



Фиг. 2. Реальная часть податливости ребра



Фиг. 3. Мнимая часть податливости ребра

стоячую волны; угловые функции выбраны с учетом периодичности по η.

Произведения $\mathrm{Ce}(\xi, -q)\,\mathrm{ce}(\xi, -q)$ и $\mathrm{Me}(\xi, -q)\,\mathrm{ce}(\xi, -q)$ от отрицательных параметров описывают неоднородные волны внутри и вне эллипса. Постоянные A_0^{2m} появляются в результате разложения цилиндрических функций по функциям Матье и известны из таблиц. Функции $\mathrm{Fey}(\xi, q)$ и $\mathrm{Fek}(\xi, -q)$ — линейно-независимые вторые решения модифицированного уравнения Матье.

Таким образом, задача свелась к определению из граничных условий (2) систем коэффициентов a_{2m}, $\bar{a}_{2m}$, b_{2m}, $\bar{b}_{2m}$. Однако система функций Матье не является фундаментальной для поставленной задачи (контурные операторы не дают возможности использовать свойство ортогональности функций Матье). Поэтому следует использовать разложение угловых функций Матье в ряды по тригонометрическим функциям [2], сохраняющим ортогональность после подстановки в граничные условия (2):

$$(6)\qquad \mathrm{ce}_{2m}(\eta, q) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2m)} \cos 2r\eta;$$

$$\mathrm{ce}_{2m}(\eta, -q) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (-1)^m A_{2r}^{(2m)} \cos 2r\eta.$$

Входящие сюда коэффициенты $A_{2r}^{(2m)}$ протабулированы. После подстановки типа (6) в граничные условия для определения искомых коэффициентов, необходимо найти решение четырех бесконечных систем алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_{2m}, $\bar{a}_{2m}$, b_{2m}, $\bar{b}_{2m}$, что возможно сделать, используя приближенный метод редукции. Решение усеченной системы было проведено на ЭВМ М-220 для малых значений параметров $q_в$ и $q_р$, т. е. для длин волн больших, чем размеры ребра. При этом точность решения тем выше, чем больше порядок усечения и чем меньше величины $q_в$ и $q_р$. Из формы решений (4) и (5) видно, что величину смещения определяют два параметра $q_в$ и $q_р$; напомним, что $q=(ak/2)^2$. Представляется естественным рассмотреть поведение податливости в зависимости от $q_р$ при фиксированном $q_в$ за счет изменения частоты, что дает частотную характеристику податливости для ребра при увеличении высоты и постоянной толщине пластины, так как из условия единства частоты колебания отдельных элементов (пластины и ребра) следует

$h_в = \frac{q_р}{q_в}$ const, где const зависит от свойств материала и толщины пластины.

С помощью полученных результатов может быть вычислена входная проводимость исследуемой системы $Y=w_1(0, \pi/2)/f_0$. Семейство кривых на фиг. 2 представляет зависимости реальной части податливости Re Y для различных значений $q_в$ (кривая I — $q_в=0{,}45$; кривая II — $q_в=2$). Реактивная часть Im Y для тех же значений $q_в$ представлена на фиг. 3. Значения Re Y и Im Y пронормированы относительно податливости бесконечной пластины для точечной силы $Y_0=8^{-1}(m_р D_р)^{-0{,}5}$. Величина Y_0 выбрана равной 10^{-7} *см*^{4}/*дин·сек*^{2} и показана на фиг. 2 штрихпунктирной прямой (величины Re Y и Im Y, рассчитанные для дискретных значений $q_р$, указаны на фиг. 2 и 3 соответствующими точками).

Видно, что при малых $q_в$ проводимость Y стремится к значению Y_0 (Im $Y \to 0$, Re $Y \to Y_0$). Обращает внимание существенное превышение податливости исследуемой структуры Y по сравнению с податливостью Y_0, когда размер ребра $2a$ значительно меньше длины изгибной волны в нем $\lambda_в$ (кривая I). В этом случае ребро ведет себя подобно массе на упругом основании в районе резонанса. При размере ребра $2a$, сравнимом с $\lambda_в$ (кривая II), указанные резонансные явления не проявляются, так как импеданц ребра приобретает упругостный характер. С ростом $q_р$ значения Re Y убывают тем сильнее, чем тяжелее ребро.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Е. А. Иванов.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск, «Наука и техника», 1968.
2. *Н. В. Мак-Лахлан.* Теория и приложения функций Матье. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
3. *В. Ю. Кирпичников, В. Т. Ляпунов.* О вынужденных осесимметричных колебаниях пластины с упругим диском. Доклад на семинаре «Борьба с шумом и вибрацией». Волгоград, 1972. Тезисы докладов семинара, ч. II, Волгоград, Нижне-Волжский ЦНТИ, 1972, 17–20.
4. *Б. Г. Коренев.* Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. М., Физматгиз, 1960.

Поступила
10 января 1975 г.