АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXII 1976 Вып. 4 АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Июль

Август

Основан в 1955 г.

MOCKBA

Выходит 6 раз в год

УДК 534.26

ОБ АКУСТИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ СФЕРОИДАЛЬНЫХ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ И РАССЕИВАТЕЛЕЙ

В. А. Андебура

Получены выражения для акустических характеристик осциллирующих сфероидов произвольной конфигурации в длинноволновом приближении. Приведена асимптотика радиальных сфероидальных функций при малых значениях волнового параметра. Найдена сила, воздействующая на жесткий сфероид в звуковом поле, и дано выражение для нее в предельном случае низких частот. Теоретические результаты иллюстрированы расчетами.

Исследование свойств сфероидальных излучателей и рассеивателей важно для ряда практических приложений. Ниже на основе результатов работ [1, 2] приводятся выражения для акустических характеристик осциллирующих сфероидальных излучателей и сфероидальных рассеивателей малых волновых размеров, т. е. в длинноволновом приближении. Напомним, что волновой размер сфероида определяется величиной $h=ka/2=\pi D/\lambda$, где k— волновое число, a— фокусное расстояние сфероида, D— наибольший диаметр сплюснутого сфероида (или наибольшая высота вытянутого сфероида).

Акустические характеристики осциллирующих сфероидов определены соотношениями (5-15), приведенными в работе [1], с учетом подстановки $L_{0n}=2d_1^{0n}(h|-ih)/3N_{0n}(h|-ih)$. Рассмотрим эти характеристики при $h\ll 1$. Здесь нужно различать два случая: случай низких частот, когда частота $\omega\to 0$ при конечном эксцентриситете сфероида, и случай $a\to 0$ при конечных ω и ξ_0 (ξ_0 — параметр, определяющий отношение длин осей сфероида); если при $a\to 0$ одновременно $\xi_0\to\infty$ так, что $\xi_0 a=$ const, то сфероид вырождается в сферу. В обоих случаях справедливы следующие выражения, вытекающие из свойств сфероидальных волновых функций при $h\to 0: d_r^{0n}\to \delta_{n,1}; d_r^{01}\to \delta_{r,1}$ (δ — символ Кронекера), т. е. в волновых рядах остается только член n=1; при этом $N_{01}\to 2/3$, и, следовательно, $L_{01}\to 1$.

Из соотношений работы [1] далее следует, что характеристика направленности осциллирующего сфероидального излучателя, независимо от его конфигурации, при h→0 описывается полиномом Лежандра первого порядка

 $D(\theta) = P_i(\cos \theta) = \cos \theta,$

а коэффициент концентрации равен трем. Импеданц излучения при $h \ll 1$

(1)
$$Z=R-iX=\frac{\pi\rho ca^{2}}{3[R_{01}^{(2)'}(\xi_{0}|i\xi_{0})]^{2}}+ik\rho c\frac{\pi a^{3}}{6}(\xi_{0}^{2}\mp1)\frac{R_{01}^{(2)'}(\xi_{0}|i\xi_{0})}{R_{01}^{(2)'}(\xi_{0}|i\xi_{0})}.$$

[©] Издательство «Наука», «Акустический журнал», 1976 г.

Здесь и далее знак минус в величине $(\xi_0^2 \mp 1)$ и аргумент радиальных функций ξ_0 относятся к вытянутому сфероиду, знак плюс и аргумент $i\xi_0$ — к сплюснутому. Мы следуем здесь системе обозначений Фламмера [3].

Выясним асимптотическое поведение радиальных сфероидальных функций при $h \to 0$. Можно показать, что для радиальных функций первого рода, независимо от величины ξ , справедливо представление $R_{01}^{(1)}(\xi|i\xi) \to h/3$. В частности, при $\xi=0$ функция сплюснутого сфероида $R_{01}^{(1)}(i0) \equiv 0$ независимо от величины h. Поведение функций второго рода при $h \to 0$ зависит от величины ξ . Так, при $\xi \gg 1$ и $a \to 0$ (сфероиды малого эксцентриситета) радиальные функции второго рода выражаются как $R_{01}^{(2)}(\xi|i\xi) \to -1/(h\xi)^2$, $R_{01}^{(2)'}(\xi|i\xi) \to 2/h^2\xi^3$. В соответствии с этим для импеданца излучения осциллирующего сфероида малого эксцентриситета при $h \ll 1$ из формулы (1) мы получим выражение

(2)
$$Z(\xi_0|i\xi_0) = \frac{\pi \rho \omega^4 a^6 \xi_0^6}{192c^3} - i \frac{\pi \rho \omega a^3 \xi_0(\xi_0^2 \mp 1)}{12}$$

Здесь учтено, что $h=ka/2=\omega a/2c$. Выделив в выражении для реактивной части импеданца X величину $\frac{\pi a^3}{6}\,\xi_{\scriptscriptstyle 0}\,(\xi_{\scriptscriptstyle 0}{}^2\mp 1)=V_{\scriptscriptstyle 0}-$ объем жидкости, вытес-

няемой сфероидом (эта формула справедлива для сфероидов произвольной конфигурации), можно представить X в виде $X=\omega M_{\rm пp}=\omega M_{\rm 0}/2$, где $M_{\rm пp}=\rho\frac{V_{\rm 0}}{2}-$ присоединенная (соколеблющаяся) масса излучателя, а

 $M_0 = \rho V_0$ — масса жидкости в объеме сфероида. Аналогичным образом активную часть импеданца R можно связать с площадью поверхности сфероида, можно показать, что последняя определяется выражением $S_0 = \frac{\pi a^2}{2} \left[(\xi_0^2 \mp 1) + \xi_0^2 \sqrt{\xi_0^2 \mp 1} \cdot f(\xi_0) \right]$, где $f(\xi_0)$ равно $\arcsin \frac{1}{\xi_0}$ для вытя-

нутого сфероида и $\ln |(1+\sqrt{\xi_0^2+1})/\xi_0|$ — для сплюснутого. Для сфероидов малого эксцентриситета $S_0 \approx \pi a^2 \xi_0^2$, при этом активная часть импеданца получается из равенства (2) как $R = \rho \omega^4 S_0^3/192\pi^2 c^3$. Полученные выражения для активной составляющей импеданца и присоединенной массы совпадают с соответственными выражениями для осциллирующей сферы на низких частотах (см. работу [4], стр. 72).

Импеданц излучения осциллирующих сфероидов общего вида, не вырождающихся в сферу, определяется выражением (1). Представив в нем реактивную часть \hat{X} в виде $\omega M_{\pi p} = \omega \rho V_{\pi p}$, где $V_{\pi p}$ — объем присоединенной массы среды, получим

(3)
$$M_{\pi p} = \rho V_{\pi p} = -\frac{\rho \pi a^3}{6} (\xi_0^2 \mp 1) \frac{R_{01}^{(2)}(\xi_0 | i \xi_0)}{R_{01}^{(2)'}(\xi_0 | i \xi_0)}.$$

Выражения для радиальных функций второго рода при $h\to 0$ и конечном ξ можно найти из соотношений работы [3]. Можно показать, что $R_{01}^{(2)}(\xi|i\xi)\to -\frac{3}{h^2}Q_1(\xi|i\xi),\ R_{01}^{(2)'}(\xi|i\xi)\to -\frac{3}{h^2}Q_1'(\xi|i\xi),\ _{\rm где}\ Q-$ функция

Лежандра второго рода. Для вытянутых сфероидов это дает выражения

$$(4) \atop R_{01}^{(2)}(\xi) \to \frac{3}{h^2} \left(1 - \frac{\xi}{2} \ln \frac{\xi + 1}{\xi - 1} \right), \quad R_{01}^{(2)'}(\xi) \to \frac{3}{h^2} \left(\frac{\xi}{\xi^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln \frac{\xi + 1}{\xi - 1} \right)$$

для сплюснутых

$$R_{01}^{(2)}(i\xi) \rightarrow -\frac{3}{h^2} \left[1 - \xi \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \xi \right) \right], \quad R_{01}^{(2)'}(i\xi) \rightarrow \frac{3}{h^2} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \xi - \frac{\xi}{\xi^2 + 1} \right).$$

Если конфигурация сплюснутого сфероида такова, что отношение длин его осей b<0,2 (при этом $\xi_0=b\sqrt{1-b^2}<0,2$), то с ошибкой менее 5%

(5)
$$R_{01}^{(2)}(i\xi) \approx -\frac{3}{h^2} \left(1 - \xi \frac{\pi}{2}\right), \quad R_{01}^{(2)'}(i\xi) \approx \frac{3}{h^2} \left(\frac{\pi}{2} - 2\xi\right).$$

В этом случае приближенно

$$Z \approx \frac{\rho \omega^4 a^6}{27\pi^2 c^3} \left(\frac{\pi}{4} + 2\xi_0\right) - i\omega \rho \frac{a^3}{3} (1-0.3\xi_0).$$

При вырождении сплюснутого сфероида в диск (ξ₀→0) получим

(6)
$$Z = \frac{\rho \omega^4 a^6}{108\pi c^3} - i\omega \rho \frac{a^3}{3},$$

здесь *а* — диаметр диска *. Отсюда следует, что присоединенная масса осциллирующего диска на низких частотах равна трети массы среды в объеме куба с ребром, равным диаметру диска.

Представляет интерес сопоставить величины R и $M_{\rm пр}$ осциллирующего

диска и сферы равных диаметров. В работе [4] показано, что

$$\frac{R_{\text{сф}}}{R_{\text{диска}}} = \left(\frac{3}{4}\pi\right)^2 \approx 5,56, \quad \frac{M_{\text{пр сф}}}{M_{\text{пр диска}}} = \frac{\pi}{4} \approx 0,786.$$

Это непосредственно следует также из формул (6) и (2) с учетом того, что при вырождении сфероида в сферу $\xi_0 a/2 \rightarrow r_0$, где r_0 — радиус сферы. Таким образом, на низких частотах осциллирующая сфера является значительно более эффективным излучателем, чем диск.

С увеличением ξ₀, т. е. увеличением «толщины» осциллирующего сплюснутого сфероида, величина R быстро возрастает, как следует из формулы (5), уже при ξ₀=0,2 эта величина возрастает наполовину, при этом

присоединенная масса уменьшается приблизительно на 7%.

Выше сфероид рассматривался как источник звукового поля. Предположим теперь, что сфероид находится в поле плоской звуковой волны и определим на основе известного решения задачи о рассеянии звука жесткими сфероидами [2] интегральные характеристики взаимодействия сфероида с падающей звуковой волной — давление звуковой волны на сфероид и силу, воздействующую на него со стороны звукового поля, а также зависимость этих величин от ориентации сфероида относительно направления распространения падающей волны.

Результирующее давление в звуковом поле, обусловленное рассеянием

плоской волны жестким сфероидом, может быть представлено в виде

(7)
$$p(\xi, \eta, \varphi) = 2p_0 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} (-i)^n \frac{\varepsilon_m}{N_{mn}} S_{mn}(\eta') \times \left[R_{mn}^{(1)}(\xi | i\xi) - \frac{R_{mn}^{(1)'}(\xi_0 | i\xi_0)}{R_{mn}^{(3)'}(\xi_0 | i\xi_0)} R_{mn}^{(3)}(\xi | i\xi) \right] S_{mn}(\eta) \cos m(\varphi - \varphi'),$$

^{*} Аналогичное соотношение приведено в работе [5], стр. 476. В знаменателе последнего слагаемого (вещественная часть импеданца) должно быть 27 πc^3 .

где p_0 — амплитуда давления в падающей волне, ϵ_0 =1, ϵ_m =2, $m\neq 0$, коорди-

наты η', ф' определяют направление падающей волны.

Интегрируя выражение (7) по поверхности рассеивателя и учитывая, что $dS = \left(\frac{a^2}{4}\right) \left[(\xi_0^2 \mp 1) (\xi_0^2 \mp \eta^2) \right]^{\eta_0} d\phi \, d\eta$, получим для результирующей

силы давления выражение

(8)
$$F = p_{0}\pi a^{2} (\xi_{0}^{2} \mp 1)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{S_{0n}(\eta')}{N_{0n}} \left\{ R_{0n}^{(1)} - \frac{R_{0n}^{(1)'} \left[(R_{0n}^{(1)} R_{0n}^{(1)'} + R_{0n}^{(2)} R_{0n}^{(2)'}) - \frac{i}{h(\xi_{0}^{2} \mp 1)} \right]}{|R_{0n}^{(3)'}|^{2}} \right\}_{io} \times \int_{-1}^{\infty} (\xi_{0}^{2} \mp \eta^{2})^{\frac{1}{2}} S_{0n}(\eta) d\eta.$$

При интегрировании по φ в выражении (8) исчезает сумма по m, так как интеграл по φ отличен от нуля при m=0; интеграл по φ отличен от нуля при условии, что n четно, что отмечено штрихом у знака суммы. Из полученного выражения следует, что амплитуда силы есть функция переменной φ соз φ , где φ угол прихода плоской волны относительно оси вращения сфероида. Зависимость φ является характеристикой направ-

ленности сфероида по результирующей силе.

Представляет интерес определить составляющую силы F в направлении оси вращения сфероида. Выделим на поверхности сфероида в окрестности точки с координатами η , φ элемент поверхности dS. На этот элемент со стороны звукового поля действует сила dF = pdS, направленная по нормали к поверхности сфероида в рассматриваемой точке. Очевидно, что составляющая силы dF в направлении оси z dF_z равна dF соз $\beta = p$ соз βdS , где β — угол между упомянутой нормалью и осью z; этот угол есть функция текущих координат η , ξ_0 . Можно показать, что в сфероидальных координатах соз $\beta = \eta \left[\xi_0^2 \mp 1\right]/(\xi_0^2 \mp \eta^2)\right]^{\gamma_z}$. Заметим, что этим же выражением описывается распределение колебательной скорости по поверхности осциллирующего сфероидального излучателя. Проинтегрировав dF_z по поверхности сфероида и выполнив преобразования, подобные проведенным выше, получим

(9)
$$F_{z}=ip_{0}\pi a^{2}\left(\xi_{0}^{2}\mp1\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{(n+1)/2}\frac{S_{0n}\left(\eta'\right)}{N_{0n}}\left\{R_{0n}^{(1)}-\frac{R_{0n}^{(1)'}\left[\left(R_{0n}^{(1)'}R_{0n}^{(1)'}+R_{0n}^{(2)}R_{0n}^{(2)'}\right)\right]-\frac{i}{h\left(\xi_{0}^{2}\mp1\right)}\right\}}{-\frac{|R_{0n}^{(1)'}\left[\left(R_{0n}^{(1)'}R_{0n}^{(1)'}+R_{0n}^{(2)}R_{0n}^{(2)'}\right)\right]-\frac{i}{h\left(\xi_{0}^{2}\mp1\right)}}{|R_{0n}^{(3)'}|^{2}}\right\}_{\xi_{0}}\int_{-1}^{1}\eta S_{0n}\left(\eta\right)d\eta;$$

штрих у знака суммы здесь означает суммирование по нечетным значениям n. Как видно из формулы (9), характеристика направленности по силе F_z выражается комбинацией угловых функций $S_{0n}(\cos \theta')$ нечетного индекса n, следовательно, диаграмма направленности $F_z(\theta')$ в плоскости изменения θ' имеет вид восьмерки.

Определим силу F_z при $h\ll 1$ *. При этом $S_{0n}(\eta)\to P_n(\eta)$, где P_n — полиномы Лежандра; $N_{0n}\to 2/(2n+1)$; радиальные функции $R_{0n}^{(1)}$, $R_{0n}^{(1)}$ стано-

^{*} Длинноволновые аппроксимации решений задач рассеяния звука акустически мягкими и жесткими сфероидами в виде разложений по степеням частоты приведены в работах [6-7].

вятся пренебрежимо малыми по сравнению с $R_{\mathfrak{gn}}^{(2)}$, $R_{\mathfrak{gn}}^{(2)}$; интеграл по \mathfrak{gn} принимает вид

$$\int_{0}^{1}\eta P_{n}(\eta)d\eta.$$

В силу известного соотношения [8]

$$\int_{-1}^{1} x^m P_n(x) dx = 0 \quad \text{при} \quad m < n,$$

ряд по n обрывается после n=1; при n=1 интеграл по η равен 2/3. С учетом сказанного из выражения (9) по-

 $F_{z}=-ip_{0}\pi a^{2}(\xi_{0}^{2}\mp 1)\times$ $\times \left[R_{01}^{(1)}-\frac{R_{01}^{(1)'}R_{01}^{(2)}}{R_{01}^{(2)'}}\right]_{\xi_{0}}\cos\theta'.$

Подставив сюда приведенные выше значения радиальных функций первого рода при $h \ll 1$, получим

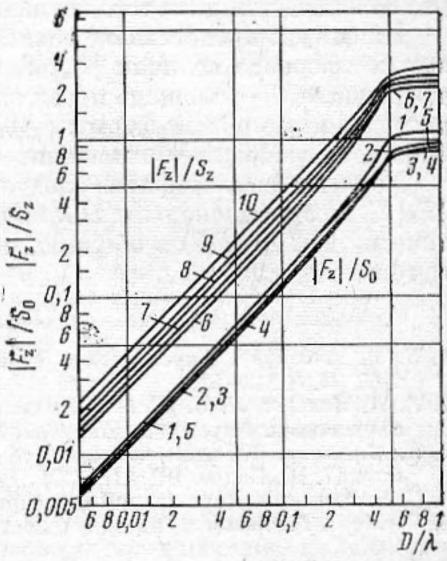
$$F_z = -ip_0 k \frac{\pi a^3}{6} (\xi_0^2 \mp 1) \times$$

$$\times \left[\xi_0 - \frac{R_{01}^{(2)}}{R_{01}^{(2)'}}\right] \cos \theta'.$$

 F_z можно условно разделить на две составляющие. Первая составляющая

$$F_{z_1} = -ip_0 k \frac{\pi a^3}{6} (\xi_0^2 \mp 1) \xi_0 \cos \theta' =$$

 $=-ip_0k\cdot V_0\cos\theta'$ обусловлена действием падающей волны. Вторая состав-



Зависимость величин $|F_z|/S_0$, $|F_z|/S_z$ от волнового диаметра D/λ сплюснутого сфероида. Кривые I, δ соответствуют b=0 (диск), 2, 7-b=0,1; 3, 8-b=0,2; 4, 9-b=0,33; 5, 10-b=0,5

ляющая
$$F_{z2} = ip_0 k \frac{\pi a^3}{6} (\xi_0^2 \mp 1) \frac{R_{01}^{(2)}}{R_{01}^{(2)'}} \cos \theta'$$
, обусловленная рассеянной волной,

с учетом формулы (3) может быть представлена в виде F_{zz} =− $ip_0kV_{πp}$ соѕ θ′. Таким образом, осевая сила при дифракции звука на жестком сфероиде при малых волновых размерах последнего пропорциональна волновому числу и сумме объемов собственно сфероида и присоединенной массы для осциллирующих колебаний:

(10)
$$F_z = -ip_0 k(V_0 + V_{np}) \cos \theta',$$

а угловая зависимость этой силы описывается множителем $\cos \theta'$.

Величина $V_{\pi p}$ для осциллирующего сфероида в зависимости от его конфигурации определяется соотношениями (3—5). Например, для сплюснутых сфероидов, не вырождающихся в сферу,

$$V_{\pi p} = \frac{\pi a^3}{6} (\xi_0^2 + 1) \frac{1 - \xi_0 \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \xi_0\right)}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \xi_0 - \frac{\xi_0}{\xi_0^2 + 1}}.$$

В частности, при отношении длин осей сплюснутого сфероида $b \leq 0.2$ приближенно $V_{\rm пр} \approx (D^3/3) (1-0.3b)$, где D — наибольший диаметр сфероида. Собственный объем при этом равен $V_0 \sim 0.52 D^3 b$. Для диска ($\xi_0 = 0$) получим $V_{\pi p} = D^3/3$, при этом собственный объем исчезает. При вырождении сфероида в сферу $(\xi_0\gg 1)\approx V_{\rm пр}=V_0/2$.

Сопоставим полученные величины F_z диска и сферы равных диаметров. Нетрудно видеть, что отношение максимальных амплитуд силы F_z для

сферы и для диска составляет

$$\frac{F_{z \text{ c}\Phi}}{F_{z \text{ диска}}} = \frac{3}{4} \pi \approx 2,36.$$

Таким образом, при одинаковой амплитуде давления в падающей волне на низких частотах жесткая сфера испытывает действие осевой силы в $3\pi/4$

раз большей, чем диск того же диаметра.

На фигуре представлена зависимость от волнового диаметра D/λ сплюснутого сфероида величин $|F_z|/S_0$ и $|F_z|/S_z$, где S_0 — площадь поверхности сфероида, а S_z — площадь проекции сфероида в направлении оси z. Сила F_z рассчитана по общей формуле (9), причем численно принято $p_0=1$, $\lambda=1$. Параметр графиков — отношение длин осей b.

Из расчетов и графиков следует, что сила F_z , а также величины $|F_z|/S_0$, $|F_z|/S_z$ пропорциональны D/λ вплоть до значений $D/\lambda = 0.1$ и более (практически до D/λ=0,5) в широких пределах изменения конфигурации сплюс-

нутого сфероида.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Андебура. Акустические свойства сфероидальных излучателей. Акуст. ж., 1969, *15*, 4, 513-522.

2. А. А. Клещев, Л. С. Шейба. Рассеяние звуковой волны идеальными вытянутыми

сфероидами. Акуст. ж., 1970, 16, 2, 264-268.

3. К. Фламмер. Таблицы волновых сфероидальных функций. Библ. матем. таблиц. вып. 17. М., Изд-во ВЦ АН СССР, 1962.

4. С. Н. Ржевкин. Курс лекций по теории звука, МГУ, 1960.

5. Ф. Морс, Г. Фешбах. Методы теоретической физики, т. 2. М., Изд-во иностр. лит.,

6. J. E. Burke. Low-frequency scattering by soft spheroids. J. Acoust. Soc. Amer., 1966, 39, p. I, 5, 826-831.

7. J. E. Burke. Long-wavelength scattering by hard spheroids. J. Acoust. Soc. Amer., 1966, 40, 2, 325-330.

8. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.

> Поступила 21 апреля 1975 г.

the second of th