УДК 534.25-14

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГЛУБИНЫ ПОГРУЖЕНИЯ ПОДВОДНЫХ ОБЪЕКТОВ В УСЛОВИЯХ РЕФРАГИРУЮЩЕЙ СРЕДЫ

В. Л. Калинин

Можно показать, что существует принципиальная возможность уменьшения рефракционной ошибки при определении координат подводного объекта путем соответственной обработки показаний гидролокатора без использования подробной гидрофизической информации. Предположим, что выполнены условия применимости геометрической теории распространения звука [1] и поставленная задача решается при следующих ограничениях: 1) подводный объект сохраняет неизменную глубину погружения в процессе наблюдения за ним, 2) горизонтальный градиент скорости звука в районе наблюдения отсутствует, 3) функция вертикального градиента скорости звука не зависит от времени.

Пользуясь законом Снеллиуса, мы получаем в этих условиях выражение для длины $D(t_i)$ акустического луча, отразившегося от подводного объекта, глубина погружения которого равна H:

$$D(t_i)=\int_0^H \{1-[1+F(h)]^2 a_i^2\}^{-1/2}\,dh, \tag{1}$$

где $a_i=\cos\alpha_0(t_i)$, $\alpha_0(t_i)$ – угол выхода акустического луча из источника, отсчитываемый от горизонта в момент времени,

$$F(h)=\frac{1}{C_0}\int_0^h gc(h)\,dh,$$

$gc(h)$ – функция вертикального градиента скорости звука, C_0 – скорость звука на уровне источника.

Разложим подынтегральную функцию в формуле (1) в ряд Маклорена по степеням $F(h)$

$$\{1-[1+F(h)]^2 a_i^2\}^{-1/2}=\sum_{k=0}^{\infty} A_{\text{к}}(a_i)F^k, \tag{2}$$

где

$$A_{\text{к}}(a_i)=\frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial F^k}[1-(1+F)^2 a_i^2]^{-1/2}|_{F=0}.$$

Коэффициенты ряда (2) могут быть представлены в виде

$$A_{\text{к}}(a_i)=\sum_{m=m_0}^{\infty}\frac{2m-1!!}{2m!!}C_{2m}^k a_i^{2m},$$

где

$$m_0=E\left(\frac{k+1}{2}\right)=\frac{2k+1-(-1)^k}{4}.$$

В соответствии с этим для ряда (2) можно написать следующие выражения:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=m_0}^{\infty}\frac{2m-1!!}{2m!!}C_{2m}^k a_i^{2m}F^k=$$

$$=a_i^{2m_0}\sum_{k,m=0}^{\infty}\frac{2m_0+2m-1!!}{2m_0+2m!!}C_{2m_0+2m}^{\,k}a_i^{2m}F^k.$$

Учитывая то, что $\max 2m_0 = k+1$, $\min 2m_0 = k$ мажорирующим для ряда (2) будет двойной гипергеометрический ряд

$$(3)\qquad \sum_{k,m=0}^{\infty} C_{km} x^m y^k,$$

где

$$C_{km} = \frac{k+2m-1!!}{k+2m!!} C_{k+2m+1}^{k},$$
$$x = d_i^2, \quad y = a_i F.$$

Как известно [2], граница области сходимости двойного гипергеометрического ряда определяется кривой, параметрическое уравнение которой имеет вид

$$(4)\qquad r = |\Phi(\mu, \nu)|^{-1}, \quad s = |\psi(\mu, \nu)|^{-1}, \quad \mu, \nu > 0,$$

где

$$\Phi(\mu, \nu) = \lim_{t\to\infty} f(\mu t, \nu t), \qquad \psi(\mu, \nu) = \lim_{t\to\infty} g(\mu t, \nu t),$$

$$f(k, m) = \frac{C_{k,m+1}}{C_{km}} = \frac{(k+2m+1)(k+2m+3)}{(2m+2)(2m+3)},$$

$$g(k, m) = \frac{C_{k+1,m}}{C_{km}} = \frac{2m+1}{k+1}.$$

Из формулы (4) получается уравнение $r = (1+s)^{-2}$ кривой границы области сходимости мажорирующего ряда (3). Отсюда следует условие равномерной сходимости по h ряда (2):

$$(5)\qquad F(h) < \frac{1-a}{a^2}.$$

Таким образом, в пределах выполнимости условия (5) от ряда (2) можно перейти к следующему интегростепенному ряду, который также сходится:

$$(6)\qquad D(t_i) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{\text{к}}(a_i) T_{\text{к}}.$$

Здесь

$$T_{\text{к}} = \int_0^H F^k(h)\, dh.$$

Заменим ряд в правой части (6) частичной суммой, содержащей n членов. После того как произведено n измерений дальности $D(t_i)$ мы получим систему уравнений, линейных относительно $T_{\text{к}}$:

$$(7)\qquad \sum_{k=0}^{n-1} A_{\text{к}}(a_i) T_{\text{к}} = D(t_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Достаточным условием отличия от нуля определителя $\Delta[A_{\text{к}}(a_i)]$ системы (7) является [3]

$$a_i \neq a_j \text{ при } i \neq j \ (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Очевидно, что глубина погружения определится как $H = T_0$. Для получения оценки числа измерений дальности n рассмотрим систему (8), отличающуюся от (7) наличием остаточных членов рядов $R_{n-1,i}$ в правых частях

$$(8)\qquad D(t_i) = \sum_{k=0}^{n-1} A_{\text{к}}(a_i) T_{\text{к}} + R_{n-1,i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Обозначим через δ разность между T_0, получаемым при решении (7), и T_0', получаемым при решении (8), т. е. $\delta = T_0 - T_0'$. Тогда для δ можно указать оценку сверху [4]:

$$(9)\qquad |\delta| < \rho \left(\sum_{i=1}^{n} |\Delta_{i1}[A_к(a_i)]| \right) \Big/ |\Delta[A_к(a_i)]|,$$

где $\Delta_{i1}[A_к(a_i)]$ – алгебраические дополнения элементов определителя системы (7), $\rho = \max |R_{n-1,\, i}|$.

Используя представление остаточного члена ряда (2) в форме Лагранжа, можно получить следующую оценку для $|R_{n-1,\, i}|$:

$$(10)\qquad |R_{n-1,i}| < \frac{2m_0-1!!}{2m_0!!} \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \right)^n \frac{\gamma^{2m_0} e^{5/4n}}{(1-\gamma^2)^{n+1}} H_{\max},$$

где

$$\varepsilon = \max|F(h)|, \qquad m_0 = E\left(\frac{n+1}{2} \right) = \frac{2n+1-(-1)^n}{4}, \qquad \gamma_i = (1+\varepsilon) a_i,$$

$H_{\max}$ – максимальная глубина района, в котором производятся измерения.

Задаваясь значениями $H_{\max}$ и ε с помощью формул (9) и (10), можно оценивать ошибку δ, соответствующую значениям a_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, и тем самым выбирать число измерений n, обеспечивающее необходимую точность.

Горизонтальное расстояние $L(t_i)$ до объекта

$$(11)\qquad L(t_i) = \int_0^H a_i(1+F)[1-(1+F)^2 a_i^2]^{-1/2}\, dh.$$

Аналогично предыдущему разложим подынтегральную функцию формулы (11) в ряд Маклорена и перейдем почленным интегрированием к частичной сумме, приближенно выражающей собой функцию $L(t_i)$:

$$(12)\qquad L(t_i) = \sum_{k=0}^{n-1} B_к(a_i) T_к,$$

где

$$B_к(a_i) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial F^k} \left[\frac{(1+F) a_i}{\sqrt{1+(1+F)^2 a_i^2}} \right] \Bigg|_{F=0}.$$

Рассмотрим следующий пример определения глубины погружения по трем измерениям. Пусть градиент скорости звука изменяется по закону

$$\frac{dC}{dh} = \begin{cases} -9 \cdot 10^{-2}\ м/сек \cdot м, & 0 \leqslant h \leqslant 600\ м, \\ 1{,}572 \cdot 10^{-2}\ м/сек \cdot м, & 600\ м \leqslant h \leqslant 3000\ м, \end{cases}$$

и подводный объект находится на глубине $H=2000$ *м*.

Данные трех последовательных измерений $D(t_1)=7{,}34$ *км*; $D(t_2)=5{,}93$ *км*, $D(t_3)=5{,}00$ *км*, $\alpha_0(t_1)=10°$, $\alpha_0(t_2)=15°$, $\alpha_0(t_3)=20°$. Соответственная система линейных уравнений будет

$$5{,}759T_0+185{,}23T_1+9029T_2=7{,}34,$$
$$3{,}864T_0+53{,}81T_1+1151T_2=5{,}93,$$
$$2{,}924T_0+22{,}07T_1+261T_2=5{,}00.$$

Решение этой системы дает $T_0=1{,}974$ *км*, $T_1=-3{,}92 \cdot 10^{-2}$, $T_2=0{,}36 \cdot 10^{-3}$. Ошибка определения глубины составляет $\sim 1{,}3\%$. Если пользоваться формулой $H=D \sin \alpha_0(t)$, то минимальная ошибка для данной серии измерений составляет 14,5%.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. М. Бреховских.* Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957.
2. *Г. Бейтмен, А. Эрдейи.* Высшие трансцендентные функции, ч. 1 (пер. с англ. под ред. Г. Я. Пироговой). Изд. 2. М., «Наука», 1973.
3. *Г. Полиа, Г. Сеге.* Задачи и теоремы из анализа, ч. II (пер. с нем. под ред. А. З. Рывкина, Б. Г. Сосина). Изд. 2, М., Гостехтеориздат, 1956.
4. *И. С. Березин, Н. П. Жидков.* Методы вычислений, т. 2. М., Физматгиз, 1960.

Мурманское высшее инженерное морское училище

Поступила
21 мая 1974 г.
После исправления
2 февраля 1976 г.