где ρ_1, E, ν – плотность, модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки, h – толщина оболочки, ρ – плотность окружающей среды, r_0 – расстояние от точки T до центра O оболочки, r – длина радиус-вектора, измеряемого от центра O, ϑ – полярное расстояние.

Рассмотрим случай, когда точка наблюдения находится в центре O_1 источника и последний находится далеко от оболочки по сравнению с размерами оболочки и источника. В этом случае можно принять

$$(10)\qquad r\sim l_0,\quad \vartheta\sim\sigma/l_0,\quad r_0\sim l_0-y\sigma\cos\gamma/l_0+\sigma^2/2l_0,$$

где l_0 – расстояние между центрами O_1 и O и y – расстояние от оси ξ источника направленного действия до центра O оболочки. Выбрав ради простоты функцию χ в виде $\chi(\sigma)=\sigma^2/2l_0$, получим для вычисления эхо-сигнала в центре O_1 источника формулу

$$(11)\qquad P_e=\int_{-\infty}^{\infty} f^F\left[G_0\Psi_0e^{i\omega\Phi_0}+\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}G_{sm}\Psi_se^{i\omega\Phi_{sm}}\right]e^{-i\omega\tau}\,d\omega,$$

$$\Phi_0=2(l_0-1),\qquad \Phi_{sm}=2l_0-2\sqrt{1-z_s{}^2}-z_s[2\arccos z_s+(2m+1)\pi],$$

$$\Psi_0=\int_0^1 J_0(\omega y\eta\delta)\,d\eta,\qquad \Psi_s=\int_0^1 J_0(\omega y\eta\delta)P_{\mu_s}[\cos(\eta\delta)]\,d\eta,\qquad \delta=r_1/l.$$

Здесь J_0 – цилиндрическая функция Бесселя нулевого порядка. Функции $\Psi_0(\omega, y)$, $\Psi_1(y, \omega)$ определяют законы изменения амплитуды отдельных эхо-импульсов. На фиг. 2 представлены функции $\Psi_0(y)$ (кривая *1*) и $\Psi_s(y)$, $s=1, 2$ (кривые *2, 3*) при $\omega=250$, $\delta=0{,}1$. Индекс $s=1$ соответствует здесь безмоментной моде и $s=2$ – изгибной моде. Параметры $\mu_1=87{,}17+0{,}012\ i$, $\mu_2=253{,}5+2{,}40\ i$ выбраны как полюсы преобразования Ватсона, соответствующие эхо-сигналу от медной оболочки толщиной $h/R=0{,}01$ в воде.

При значениях $y=\operatorname{Re} z_s$ зондирующий импульс (1) направлен так, что его максимальная амплитуда попадает на оболочку в критической точке, т. е. в точке, в которой возбуждаются периферические волны s-й моды. На фиг. 2 видно, что у кривых *2, 3* в этих точках действительно имеются максимумы, но они довольно слабые. Это связано с тем, что в сферической оболочке периферические волны возбуждаются не только в одной точке, а по всей критической окружности. Поскольку большие амплитуды зондирующего импульса падают только на небольшую часть из этой окружности, то в эхо-сигнале суммарный вклад от остальной части окружности, куда падают волны малой амплитуды, сравним с вкладом от той малой части окружности, куда падают волны большой амплитуды.

ЛИТЕРАТУРА

1. *У. К. Нигул, Я. А. Метсавээр, Н. Д. Векслер, М. Э. Кутсер.* Эхо-сигналы от упругих объектов, т. 2, Изд. Ин-та кибернетики АН ЭССР, Таллин, 1974.

Институт кибернетики
Академии наук ЭССР

Поступила 6 июня 1974 г.
После окончательной переработки
18 июня 1976 г.

УДК 534.138

СИЛЫ БЬЕРКНЕССА В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ И АКУСТИЧЕСКАЯ КОАГУЛЯЦИЯ АЭРОЗОЛЕЙ

М. А. Миронов

Известно [1], что при параллельной осцилляции двух сфер в идеальной несжимаемой среде между ними возникают лежащие в плоскости осцилляции силы взаимодействия:

$$(1)\qquad F_l=\frac{3}{2}\pi\rho\frac{R_1{}^3R_2{}^3}{l^4}u_1u_2\left(\frac{3}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{2}\right)\cos\alpha,$$

$$(2)\qquad F_\tau=\frac{3}{2}\pi\rho\frac{R_1{}^3R_2{}^3}{l^4}u_1u_2\sin 2\theta\cos\alpha,$$

где F_l и F_τ — проекции сил на линию центров шаров и на перпендикулярное направление; u_1, u_2 — амплитуды скоростей сфер относительно среды, α — сдвиг фазы осцилляций, l — расстояние между шарами, θ — угол между направлением осцилляций и линией центров, ρ — плотность среды.

При рассмотрении этих сил как возможной причины акустической коагуляции аэрозолей оказывается [2—4], что их величина для частиц с характерным размером аэрозолей 1μ и расстоянием 100—200μ слишком мала, чтобы объяснить коагуляцию. Учет вязкости приводит к столь существенному увеличению взаимодействия, что оно может считаться основным механизмом акустической коагуляции аэрозолей в реальных газах.

Предполагается, что расстояние между сферами много больше радиуса сфер и длины вязкой волны $2\pi\delta=2\pi\sqrt{2\nu/\omega}$, где ν — кинематическая вязкость, ω — частота осцилляций. Задача решается в два этапа: сначала находим силы по заданным скоростям движения сфер относительно среды, а затем определяем сами скорости колебаний сфер относительно среды по скорости колебаний среды. На расстояниях от каждой сферы, много больших δ, поле при осцилляции сферы потенциально, причем его можно получить из поля в невязкой среде, заменяя скорость сферы u на [5]

$$u_{\text{эфф}}=\left(1-\frac{3}{ikR}-\frac{3}{(kR)^2}\right)u, \tag{3}$$

где $k=\dfrac{1+i}{\delta}$.

При $\delta\gg R$ вязкость приводит к значительному увеличению скоростей вдали от сферы по сравнению со средой без вязкости. Для того чтобы найти силу взаимодействия между сферами, нужно в (1), (2) вместо $u_{1,2}$ подставить эффективные скорости, определяемые из (3).

Скорости колебаний сфер относительно среды u связаны со скоростью колебаний среды v формулой [5]

$$u=-\frac{v}{1+\frac{9}{4}\rho/\rho_0\delta/R\left(1+\frac{2}{9}R/\delta\right)-i\frac{9}{4}\rho/\rho_0(\delta/R)^2(1+R/\delta)}, \tag{4}$$

где ρ_0 — плотность вещества шара.

Эта формула получена в предположении (выполняющемся в интересующем нас случае), что плотность частиц аэрозоля много больше плотности среды. Из (4) следует, что на низких частотах происходит почти полное увлечение частиц, в то время как на высоких они практически не увлекаются.

Для частот, применяемых в практике акустической коагуляции, $\delta\gg R$. При этом условии (4) и (3) дают следующую связь $u_{\text{эфф}}$ с v:

$$u_{\text{эфф}}=\frac{3}{2}\frac{(\delta/R)^2}{1-i\frac{9}{4}\rho/\rho_0(\delta/R)^2}v. \tag{5}$$

При

$$R^2\ll\frac{9}{2}\rho/\rho_0\nu/\omega \quad u_{\text{эфф}}\simeq i\frac{2}{3}\rho_0/\rho v.$$

Для аэрозоля воды в воздухе $\dfrac{2}{3}\rho_0/\rho\simeq\dfrac{1}{2}10^3$, поэтому сила взаимодействия увеличивается, по сравнению с силой, вычисленной без учета вязкости, в $\left(\dfrac{2}{3}\rho_0/\rho\right)^2=\left(\dfrac{1}{2}\cdot10^3\right)^2=2{,}5\cdot10^5$ раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. *C. A. Bjerkness.* Hydrodynamische Fernkräfte. Leipzig, 1915.
2. *O. Brandt, H. Freund, E. Hiedenmann.* Zur. Theorie der akustischen Koagulation. Kolloid Z., 1936, 77, 1, 103—105. (Пер. Акустическая коагуляция аэрозолей. Сб. пер. статей. М., Госхимиздат, 1961).
3. *Е. П. Медников.* Акустическая коагуляция аэрозолей. М., Изд-во АН СССР, 1963.
4. *Н. А. Фукс.* Механика аэрозолей. М., Изд-во АН СССР, 1955.
5. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Механика сплошных сред. М., Гостехтеориздат, 1954.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
24 декабря 1975 г.