ведены результаты такого расчета для стальных цилиндров.

Ω	0,25	0,50	0,75	1,00	1,50	1,80	2,33	2,44	2,67
φ, *рад*	0,000	0,006	0,005	—0,004	—0,020	—0,018	0,020	0,030	0,200

Из вышеприведенного видно, что на низких частотах фазовые сдвиги близки к нулю, а на более высоких они достигают значительной величины. Эти данные соответствуют в целом результатам, полученным в работе [1] для полубесконечных цилиндров. При расчете фазовых сдвигов здесь использовалась дисперсионная кривая, взятая из работы [4].

В литературе (см., например, работу [3]) есть указания на наличие мультиплетов при резонансных колебаниях упругих цилиндров на частотах, близких к частоте «концевого резонанса» $\Omega_p=3$, на которой фазовый сдвиг равен $\pm\pi$. Учет фазовых сдвигов дает возможность объяснить существование этих мультиплетов. Преобразуем для этого формулу (1) к виду

$$\frac{c_p(\Omega)\,[\,(2k-1)\pi+\varphi(\Omega)\,]}{\Omega c_s}=\frac{L}{a}. \tag{2}$$

Это выражение позволяет определить зависимость резонансных частот Ω_k от параметра L/a, если известны частотные зависимости $c_p(\Omega)$ и $\varphi(\Omega)$. Дисперсионная кривая $c_p(\Omega)$ рассчитывалась численно из уравнения Похгаммера – Кри, а зависимость $\varphi(\Omega)$ была взята из работы [1]. Подставляя полученные таким образом значения $c_p(\Omega)$ и $\varphi(\Omega)$ в уравнение (2) и решая его численно при фиксированных значениях параметров L/a и k, получим зависимость $\Omega_k=\Omega_k(L/a)$ $(k=1, 2, \ldots)$. Из приведенного на фиг. 2 графика видно, что для некоторых значений параметра L/a действительно существуют две резонансные частоты, соответствующие одному и тому же порядку резонанса и близкие к $\Omega=3$.

Предположим, что при введении малого поглощения поведение кривой фазового сдвига $\varphi(\Omega)$ отличается от зависимости, представленной в работе [1]: с приближением Ω из области низких частот к $\Omega_p=3$ фазовый сдвиг не достигает значения $+\pi$, а, пройдя некоторый максимум, убывает затем до нуля. При дальнейшем увеличении частоты кривая $\varphi(\Omega)$ достигает минимума, не равного, однако, $-\pi$, и снова возрастает. В этом случае вместо разрывной кривой $\Omega(L/a)$ (фиг. 2) мы получим непрерывную кривую, причем вместо дублетов образуются триплеты (в более узкой области значений L/a).

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. Zemanek.* An experimental and theoretical investigation of elastic wave propo gation in a cylinder. J. Acoust. Soc. America, 1972, *51*, 1, 265–283.
2. *Л. К. Зарембо, В. Б. Пиотух, С. С. Секоян.* Экспериментальное исследование структуры собственных продольных колебаний стержней и акустического резонансного детектирования. Акуст. ж., 1973, *19*, 5, 778–781.
3. *R. E. Booker, F. H. Sagar.* Velocity dispersion of the lowest-order longitudinal mode in finite rods of circular cross section. J. Acoust. Soc. America, 1971, *49*, 5, 1491–1498.
4. *D. Bancroft.* The velocity of longitudinal waves in cylindrical bars. Phys. Rev., 1941, *59*, 7, 588–593.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
Физический факультет

Поступила
25 февраля 1975 г.
После окончательного исправления
26 апреля 1976 г.

УДК 534.29+539.67

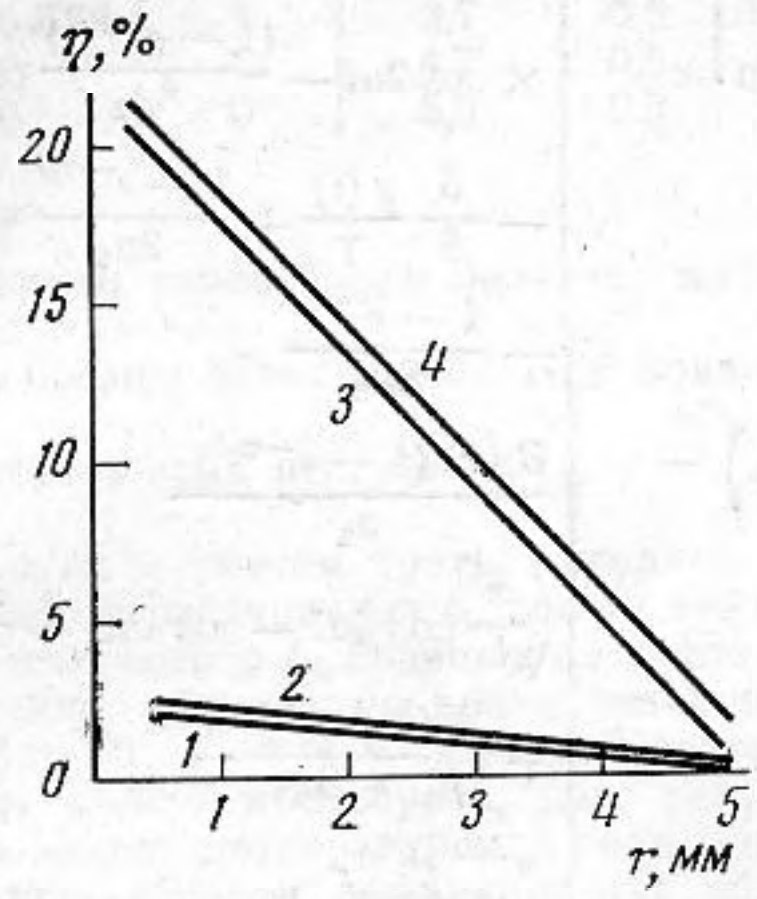
ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ В МЕТАЛЛИЧЕСКОМ СТЕРЖНЕ

В. П. Рязанский

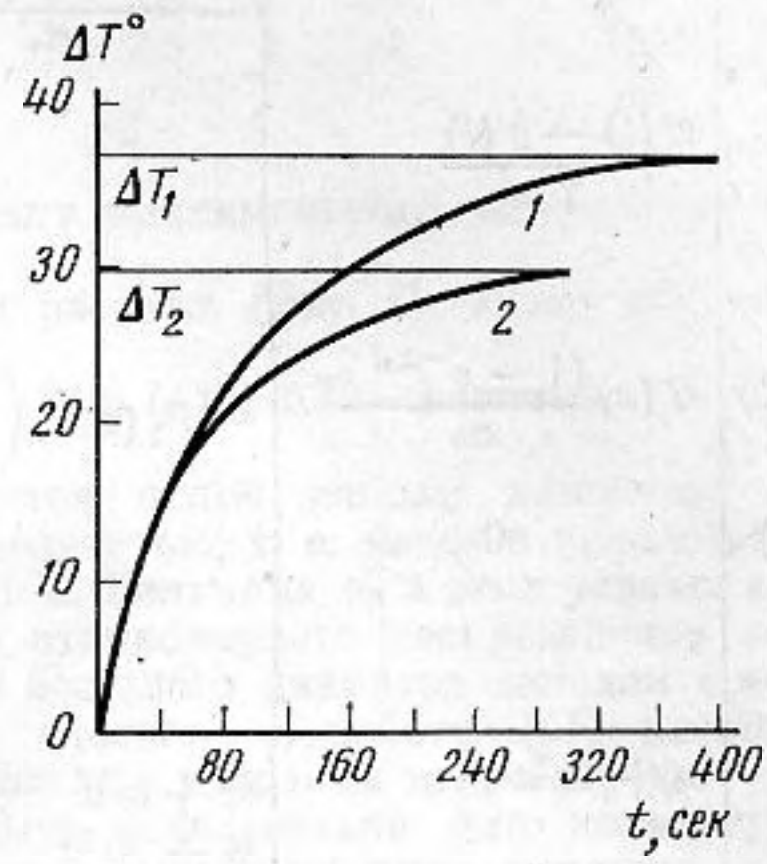
Температурное поле, возникающие при возбуждении ультразвуковых колебаний в металлах в твердой фазе играет существенную роль в процессе усталостного разрушения металлов в килогерцевом диапазоне частот [1] и при ультразвуковой обработке [2]. Закономерности и механизм ультразвукового нагрева металлов изучены пока недостаточно. Исследования по этому вопросу [3–5] относятся в основном к области больших амплитуд циклических напряжений $\sigma_0\sim(1-2)\cdot10^8$ *н/м*^{2} и высоких температур нагрева. Однако в некоторых процессах, как, например, при ультразву-

ковой обработке металлов в присутствии поверхностно-активных веществ [6], следует учитывать влияние локального повышения температуры $\leqslant 100°$ С при небольших амплитудах ультразвука.

Нами проведен количественный анализ характеристик температурного поля при небольших амплитудах ультразвуковых колебаний, соответствующих начальным стадиям пластической деформации в области амплитудно-зависимого внутреннего трения. Объектом рассмотрения являлась колебательная система, представляющая собой тонкий стержень резонансной длины, один конец которого ($x=0$) присоединен



Фиг. 1. Зависимость относительного изменения нагрева образца от его радиуса: *1* – медь ($p=2$), *2* – медь ($p=1$), *3* – никель ($p=1$), *4* – никель ($p=2$)



Фиг. 2. Зависимость величины нагрева образца из никеля от времени ($p=2$): *1* – без учета параметра b_0, *2* – с учетом параметра b_0

через волновод к магнитострикционному преобразователю, а другой – ($x=l$) закреплен в массивном зажиме испытательной машины. Температура концов стержня поддерживается постоянной [1].

Теплоотдача происходит путем теплопроводности и теплового излучения в среду с боковой поверхности стержня. Уравнение теплопроводности для рассматриваемых условий теплообмена имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - b_0(T-T_0) + \frac{W(x)}{c\rho}, \tag{1}$$

при начальном условии

$$T(x, 0) = T_0 \quad (0 \leqslant x \leqslant l), \tag{2}$$

и граничных условиях

$$T(0, t) = T(l, t) = T_0 \quad (t > 0). \tag{3}$$

В уравнениях (1)–(3) T_0 – температура окружающей среды, $a = \frac{K}{c\rho}$ (K – коэффициент теплопроводности, c – удельная теплоемкость, ρ – плотность материала), $b_0 = \frac{C}{r}$ $\left(C = \frac{8D\beta T_0^3}{c\rho}\right.$, D – интегральная степень черноты образца, r – радиус образца, $\left.\beta = 5{,}67\cdot 10^{-8}\frac{вт}{м^2\,град^4}\right)$, l – длина стержня, t – время. Амплитуда циклических напряжений σ_m, вызванных ультразвуковой волной, зависит от координаты x ($\sigma_m = \sigma_0 \sin ux$, $\omega = 2\pi f$, f – частота, $f = 2{,}16\cdot 10^4$ $сек^{-1}$, $u = \frac{\omega}{v}$, v – скорость ультразвука в материале образца), следовательно, удельная мощность источника тепла также является функцией координаты $W(x)$. Для определения $W(x)$ используем степенную зависимость логарифмического декремента Δ от амплитуды напряжения σ_m:

Таблица 1

	$p=0$	$p=1$	$p=2$
$F_p(x,t)$	$\frac{\varphi(t)\cos 2ul - g(t)}{\gamma}$	$\frac{(1-e^{-\varkappa_1 t})}{\varkappa_1}\sin 3ux - \frac{3(1-e^{-\alpha_1 t})}{\alpha_1}\sin ux$	$-\frac{3g(t)}{8\gamma} + \frac{(1-e^{-\alpha_2 t})}{2\alpha_2}\times \cos 2ul - \frac{(1-e^{-\varkappa_2 t})}{8\varkappa_2}\cos 4ul$
$\Phi_p(x,t)$	$\frac{\varphi(t)-g(t)}{\gamma}$	0	$-\frac{3}{8}\frac{g(t)}{\gamma} + \frac{1-e^{-\alpha_2 t}}{2\alpha_2} - \frac{1-e^{-\varkappa_2 t}}{8\varkappa_2}$
$M_p(x,t)$	$B(x)\frac{(1-e^{-\alpha_0 t})}{\alpha_0}$	$-F_1(x,t)\left(1-\frac{x}{l}\right)$	$\frac{B(x)(1-e^{-\alpha_2 t})}{\alpha_2}$
$N_p(x,t)$	0	0	$\left(\frac{x}{l}\cos 4ul - \cos 4ux - \frac{x}{l} + 1\right)\frac{(1-e^{-\varkappa_2 t})}{8\varkappa_2}$
α_p	$b_0 + 4u^2a$	$b_0 + u^2a$	$b_0 + 4u^2a$
$\varkappa_p$		$b_0 + 9u^2a$	$b_0 + 16u^2a$

Примечание: $\gamma = b_0 + \frac{\pi^2 n^2 a}{l^2}$, $\varphi(t) = \frac{b_0}{\alpha_0} + \frac{(\gamma - b_0)(e^{-\gamma t} - e^{-\alpha_0 t})}{\alpha_0 - \gamma}$,

$g(t) = 1 - e^{-\gamma t}$, $B(x) = \frac{x}{l}\cos 2ul - \cos 2ux - \frac{x}{l} + 1$.

$\Delta = k_p \cdot \sigma_m{}^p$ ($p=0, 1, 2$), к которой приводят эксперименты [5, 7–9] и расчеты, основанные на современных теориях амплитудно-зависимого внутреннего трения [10–12]. Величина показателя степени p и коэффициента k_p определяется параметрами реальной структуры металлов и амплитудой деформации [10, 12].

Воспользовавшись методом расчета $W(x)$, развитым в работах [13, 14] и зависимостью $\Delta = k_p \sigma_m{}^p$, можно установить вид функции источника тепла при различных p:

(4) $$W(x) = d_p Q_p(x),$$

где при $p=0$ $d_0 = Hk_0$, $Q_0(x) = 1 - \cos 2ux$,

при $p=1$ $d_1 = \frac{Hk_1\sigma_0}{2}$, $Q_1(x) = 3\sin ux - \sin 3ux$,

при $p=2$ $d_2 = 2Hk_2\sigma_0{}^2$, $Q_2(x) = \frac{3}{8} - \frac{\cos 2ux}{2} + \frac{\cos 4ux}{8}$, $H = \frac{f\sigma_0{}^2}{2E\rho c}$.

Решение уравнения (1) с учетом (4), полученное с помощью преобразования Лапласа – Карсона, имеет вид формулы

(5) $$T(x,t) = d_p\left\{\frac{2}{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}F_p(x,t)\sin\frac{\pi n x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\Phi_p(x,t)\sin\frac{\pi n(l-x)}{l}\right] + M_p(x,t) + N_p(x,t)\right\} + T_0.$$

Аналитические зависимости $T(x, t)$ от физико-механических характеристик металлов и конкретных условий испытания (амплитуда, частота колебаний, размеры образца) могут быть получены при различных p путем подстановки в уравнение (5) соотношений табл. 1.

В уравнении (5) при достаточно большом времени t, прошедшем после начала испытания ($t \to \infty$), исчезают члены, содержащие t,– вдоль образца устанавливается стационарное распределение температур. В табл. 2 сопоставлены результаты расчетов стационарного температурного пика по уравнению (5), выполненных с помощью ЭВМ, с имеющимися экспериментальными данными.

Уравнение (5) позволяет провести количественную оценку влияния коэффициен-

Таблица 2

Материал	p	$v \cdot 10^{-3}$, м/сек	$r \cdot 10^{3}$, м	$a \cdot 10^{4}$, м²/сек	$\sigma_0 \cdot 10^{-7}$, н/м²	$E \cdot 10^{-11}$, н/м²	$T^{\bullet}_{max}$ K, расчет	T°_{max} K, экспер.
Медь	0	3,7	3,5	1,1	1,0	1,2	308	313 [15]
Латунь Л62	1	3,7	0,5	0,34	3,0	1,0	360	370
Никель	2	4,7	0,5	0,14	2,0	2,0	323	325 [13]
Железо	0	5,0	0,5	0,15	2,5	2,0	367	355 [16]

та бокового теплообмена $b_0 = \frac{C}{r}$ на величину максимального ультразвукового нагрева образца $\Delta T = T_{max} - T_0$. Как показывают расчеты (фиг. 1), вклад параметра b_0, характеризуемый отношением $\eta = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\Delta T_1} \cdot 100\%$ (ΔT_1, ΔT_2 – величины нагрева без учета b_0 и с учетом соответственно), является существенным лишь для тонких стержней из материалов с низкой теплопроводностью, т. е. когда в выражениях для γ, α и $\varkappa$ параметр b_0 сравним по величине с $u^2 a$. Величина b_0 в этих условиях оказывает также влияние на время установления стационарного распределения температур (фиг. 2). В случае стержней достаточно большого диаметра вкладом коэффициента b_0 можно пренебречь, как, например, сделано в работе [5], посвященной исследованию температурного поля при граничных условиях второго рода.

Таким образом, уравнение (5) может быть использовано для количественного рассмотрения ультразвукового нагрева металлов при невысоких амплитудах циклических напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *V. A. Kuz'menko.* Fatigue Strenth of structural materials at sonic and ultrasonic loading frequencies. Ultrasonices. January, 1975, p. 21–30.
2. *А. И. Марков.* Ультразвуковое резание труднообрабатываемых материалов. М., «Машиностроение», 1968.
3. *Ю. Ф. Балалаев, В. С. Постников.* Об ультразвуковом нагреве металлов. Изв. АН СССР, Металлы, 1966, № 2, 58–60.
4. *Ю. Ф. Балалаев.* К изучению ультразвукового нагрева стержней. Теплофизика высоких температур, 1970, *8*, 4, 859–862.
5. *А. В. Кулемин.* Исследование тепловых процессов в ультразвуковых волноводах, работающих при больших интенсивностях ультразвука. Сб. Новые разработки в ультразвуковой технике. ЛДНТП, 1972, 3–12.
6. *В. П. Северденко, Л. М. Гурский, С. П. Петренко.* О влиянии поверхностноактивных смазок на разрушения алюминия под действием ультразвука. Физико-химическая механика материалов, 1972, 1, 7–10.
7. *А. В. Кулемин, В. П. Манаенков.* Поглощение звука большой интенсивности в поликристаллических металлах. Акуст. ж., 1974, *20*, 4, 635–637.
8. *W. P. Mason.* Internal friction and fatigue in metals at large strain amlitudes. J. Acoust. Soc. America, 1956, *28*, 6, 1207–1218.
9. *А. В. Харитонов.* О зависимости внутреннего трения в металлах амплитуды колебаний. Акуст. ж., 1963, *9*, 1, 80–87.
10. *Дж. Шварц, Дж. Виртман.* Видоизменение дислокационной теории поглощения Келлера – Гранато – Люкке. Сб.: Ультразвуковые методы исследования дислокаций. М., Изд-во иностр. лит., 1963, 58–74.
11. *А. В. Харитонов.* Новая теория амплитуднозависимого внутреннего трения металлов. Акуст. ж., 1965, *11*, 2, 226–232.
12. *В. С. Постников.* Внутреннее трение в металлах. М., «Металлургия», 1974.
13. *Д. Ф. Лазуткин, В. П. Рязанский.* К вопросу о температурном поле металлического стержня, облучаемого ультразвуком. Сб. Ультразвук и физико-химические свойства вещества. Курск. гос. пед. ин-т, 1970, *71*, 77–82.
14. *В. П. Рязанский.* Исследование температурного поля металлов при облучении ультразвуком. Акуст. ж., 1975, *21*, 1, 128–130.
15. *А. В. Кулемин, В. В. Чернов.* Исследование процесса ползучести поликристаллической меди под действием ультразвука. Акуст. ж., 1974, *20*, 4, 575–581.
16. *H. Kuzmany, B. Weiß.* Einfluß einer Ultraschallbehandlung auf die mechanischen Eigenschaften von Kohlenstoffarmen unlegiertem Stahl. Archiv für das Eisenhüttenwesen, Heft 11, Nov. 1968.

Всесоюзный научно-исследовательский институт оргтехники, Курский филиал

Поступила 31 марта 1975 г.
После повторного исправления 12 мая 1976 г.