4. *Т. В. Черниговская, В. П. Морозов.* Связь порогов слуха человека к амплитудно-модулированному звуку и амплитудно-модуляционных характеристик речи. Биофизика, 1974, *19*, 6, 1104–1106.
5. *Т. В. Черниговская, А. С. Розенблюм.* Влияние процесса научения на восприятие амплитудно-модулированных звуков. Физиология человека, 1976, *1*, 5, 825–829.

Институт эволюционной физиологии
и биохимии им. И. М. Сеченова
Академии наук СССР

Поступила
4 августа 1975 г.
После повторного исправления
6 июля 1976 г.

УДК 534–16

О ВОЛНАХ ЛЯВА НА ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА, ПОКРЫТОГО СЛОЕМ

Н. С. Шевяхов

Ляв показал [1], что на плоской границе твердого тела, покрытого слоем инородного материала, могут существовать сдвиговые поверхностные волны со смещениями частиц вдоль границы. В работе [2] указывалось, что такого же типа поверхностные волны должны существовать и на искривленных границах твердых тел, покрытых инородными пленками. До сих пор, однако, этот вопрос остается неизученным. Поэтому ниже предпринята попытка доказательства существования волн типа Лява на поверхности твердого цилиндра со слоем.

Пусть R_1, R_2 – радиус цилиндра и внешний радиус слоя, материалы которых имеют соответственно модули сдвига μ_1, μ_2 и плотности ρ_1, ρ_2. Допустим также, что ось цилиндра совпадает с осью z цилиндрической системы координат $(r,\ \theta,\ z)$ и что при распространении волн в направлении сдвига: $u_r=u_\theta=0$, $u_z=u_z(r,\ \theta)e^{-i\omega t}$, где t – время, ω – частота, r – расстояние от оси цилиндра. В этом случае из уравнений теории упругости [1] следует, что смещения $u_z^{(\nu)}$ в цилиндре $(r<R_1,\ \nu=1)$ и в слое $(R_1<r<R_2,\ \nu=2)$ удовлетворяют уравнениям Гельмгольца, и в соответствии с принципом погашаемости и требованием ограниченности имеют вид

$$
(1)\qquad \begin{aligned} u_z^{(1)} &= C_1 J_p(k_t^{(1)} r)e^{ip\theta}, \qquad r<R_1,\\ u_z^{(2)} &= [C_2 J_p(k_t^{(2)} r)+C_3 N_p(k_t^{(2)} r)]e^{ip\theta}, \qquad R_1<r<R_2, \end{aligned}
$$

где $k_t^{(\nu)}=(\rho_\nu\omega^2/\mu_\nu)^{1/2}$ – волновое число для сдвиговых волн, $J_p(k_t^{(\nu)}r)$ и $N_p(k_t^{(2)}r)$ – функция Бесселя и Неймана порядка p.

Решение (1) удовлетворяет также граничным условиям

$$
(2)\qquad \left\{ \begin{aligned} & u_z^{(1)} = u_z^{(2)}, \qquad \mu_1\frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial r}=\mu_2\frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial r}, \qquad \text{при} \quad r=R_1,\\ & \frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial r}=0, \qquad\qquad \text{при} \quad r=R_2 \end{aligned} \right.
$$

и изучается в интервале $-\infty<\theta<+\infty$. Поскольку при этом ось $r=0$ – линия ветвления бесконечного порядка, число p можно считать произвольной положительной величиной (см. [2]).

Подставим выражение (1) в формулу (2) и приравняем нулю определитель системы однородных алгебраических уравнений. В результате получим соотношение

$$
(3)\qquad a\frac{J_p'(\xi_1)}{J_p(\xi_1)}=\frac{J_p'(\xi_2)N_p'(\xi_2+\Delta\xi_2)-J_p'(\xi_2+\Delta\xi_2)N_p'(\xi_2)}{J_p(\xi_2)N_p'(\xi_2+\Delta\xi_2)-N_p(\xi_2)J_p'(\xi_2+\Delta\xi_2)},
$$

где $a=\mu_1 k_t^{(1)}/\mu_2 k_t^{(2)}$; $\xi_\nu=k_t^{(\nu)}R_1$; $\Delta\xi_2=hk_t^{(2)}$; $h=R_2-R_1$ – толщина слоя; $J_p'(x)=dJ_p(x)/dx$, $N_p'(x)=dN_p(x)/dx$ соответственно для $x=\xi_\nu$, $\xi_2+\Delta\xi_2$ при $\nu=1$, 2. Уравнение (3) выражает связь между p и величинами a, ξ_ν, $\Delta\xi_2$ и представляет собой дисперсионное уравнение для сдвиговых волн в цилиндре со слоем. Присутствие неэлементарных функций затрудняет аналитическое исследование этого уравнения Поэтому ограничимся анализом частного случая $\Delta\xi_2<1$ (слой малой толщины).

Разложим, основываясь на условии $\Delta\xi_2<1$, правую сторону уравнения (3) в ряд Тейлора по степеням $\Delta\xi_2$ и применим в последующих преобразованиях членов ряда формулу вронскиана для функций $J_p(\xi_2)$, $N_p(\xi_2)$, а также формулы Бассета [3]. Учитывая далее известное разложение $\mathrm{tg}\, x = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + \ldots$, уравнение (3) приведем к виду

$$(4) \qquad a\frac{J_p'(\xi_1)}{J_p(\xi_1)} = \left(1-\frac{p^2}{\xi_2^2}\right)^{1/2} \mathrm{tg}\,(\Delta\xi_2\sqrt{1-p^2/\xi_2^2}) + S_p(\Delta\xi_2,\xi_2).$$

Здесь $S_p(\Delta\xi_2,\xi_2) = (\Delta\xi_2/\xi_2)^2\left\{\xi_2 - \dfrac{p^2}{\xi_2}\left(1+\dfrac{2}{3}\Delta\xi_2\right) + O(\Delta\xi_2^2/\xi_2^2)\right\}$ – быстросходящийся ряд по степеням отношения $\Delta\xi_2/\xi_2 \ll 1$, характеризующий совместное влияние толщины слоя и его кривизны на дисперсионные свойства сдвиговых волн.

Допустим a priori, что для волн Лява, как и в случае плоской границы [1], справедливо условие $k_t^{(2)} > k > k_t^{(1)}$, т. е. $\xi_1<p<\xi_2$ ($k=p/R_1$ – волновое число волны Лява). При этом $J_p(\xi_1)$ изменяется монотонным образом, а $J_p'(\xi_1)/J_p(\xi_1)>0$ и из (4) следует, что решение существует, причем единственное, лишь если $\Delta\xi_2\neq 0$. Заметим также, используя асимптотическое представление:

$$J_p'(\xi_1)/J_p(\xi_1) \simeq \sqrt{\frac{p^2}{\xi_1^2} - 1 - \frac{1}{2\xi_1}}, \qquad p>\xi_1\gg 1 \quad \text{(см. [3])},$$

что при развертывании поверхности цилиндра в плоскость ($\xi_v\to\infty$, $\Delta\xi_2\to hk_t^{(2)}$, $p^2/\xi_2^2\to k^2/k_t^{(v)2}$) уравнение (4) переходит, как и следовало ожидать на основании сделанных предположений, в дисперсионное уравнение волны Лява на плоской границе [1]. Эти факты показывают, что при $\xi_1<p<\xi_2$ уравнение (4) описывает дисперсионную ветвь волны на поверхности цилиндра, аналогичной волне Лява.

Обратим внимание на условие

$$(5) \qquad \left.\frac{J_p'(\xi_1)}{J_p(\xi_1)}\right|_{\xi_1=p} < \frac{J_p'(\xi_1)}{J_p(\xi_1)},$$

справедливое для этой дисперсионной ветви. Учитывая, что $\xi_1 = \dfrac{\omega}{c_t^{(1)}}R_1$ ($c_t^{(v)}$ – скорость сдвиговой волны), а $\xi_1<p$, под величиной $p=\xi_1$ будем понимать величину $\xi_1^* = \dfrac{\omega^*}{c_t^{(1)}}R_1$, соответствующую предельно допустимому значению частоты $\omega=\omega^*$. При этом условие (5) можно трактовать как условие ограничения частотного диапазона для волн типа Лява снизу: $\omega>\omega^*$. Граничную частоту ω^* найдем из уравнения (4), заменив ω на ω^*, а p и ξ_1 на ξ_1^*. Для очень тонкого слоя ($\Delta\xi_2\ll 1$): $\mathrm{tg}\,(\Delta\xi_2\sqrt{1-p^2/\xi_2^2}) \simeq \Delta\xi_2\sqrt{1-\dfrac{p^2}{\xi_2^2}}$, а $S_p(\Delta\xi_2,\xi_2)\simeq 0$. Поэтому используя оценку $J_p'(\xi_1)/J_p(\xi_1)\big|_{\substack{p\to\xi_1^* \\ \xi_1\to\xi_1^*}} \infty\, \xi_1^{*-2}$ ($p>\xi_1\gg 1$), получим согласно формуле (4)

$$\omega^{*\,3/2} \infty \frac{c_t^{(1)}}{R_1}\left(\frac{\mu_1 c_t^{(2)}}{\mu_2 c_t^{(1)}}\right)^{1/2}\left(\frac{c_t^{(2)}}{R_2-R_1}\right)^{1/2}\left(1-\frac{c_t^{(2)2}}{c_t^{(1)2}}\right)^{1/2}.$$

Отсюда следует, что в случае $c_t^{(1)} \to c_t^{(2)}$ или в отсутствие слоя ($h\to 0$, $R_2\to R_1$) волны типа Лява на поверхности цилиндра не существуют ($\omega^*\to\infty$). Видно также, что эти волны могут существовать во всем диапазоне частот ($\omega^*\to 0$) лишь в случае плоской границы ($R_1\to\infty$).

Ограничение по частоте есть следствие зависимости проникающей способности волны типа Лява от толщины слоя. При $h\to 0$ волна проникает настолько глубоко, что на оси цилиндра $r=0$ возникает смещение $u_z^{(1)}\neq 0$. В результате волна типа Лява не успевает установиться и распадается по отдельным ветвям спектра нормальных сдвиговых волн в цилиндре. Заметим попутно, что аналогичное ограничение частотного диапазона отмечалось ранее в работе [4] для электрозвуковых поверхностных волн на поверхности пьезоэлектрического цилиндра.

Автор благодарит Л. М. Лямшева за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Ляв.* Математическая теория упругости. М.– Л., ОНТИ, 1935.
2. *И. А. Викторов.* Поверхностные волны на цилиндрических поверхностях кристаллов. Акуст. ж., 1974, *20*, 2, 199–206.
3. *Б. Г. Коренев.* Введение в теорию бесселевых функций. М., «Наука», 1971.
4. *Л. М. Лямшев, Н. С. Шевяхов.* Рассеяние плоской аксиально-сдвиговой волны круговым пьезополупроводниковым цилиндром. Акуст. ж., 1977, *23*, 1, 96—105.

Мордовский государственный университет
им. Н. П. Огарева

Поступила
30 марта 1976 г.