АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXIII 1977 Вып. 5

УДК 534.26:532.526.4

ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ В СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ И ЗАДАЧА ВОЗБУЖДЕНИЯ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

В. И. Клячкин

В связи с задачей возбуждения упругой оболочки турбулизованным пограничным слоем локально изэнтропического потока установлены уравнения распространения потенциальной и вихревой компонент тензора напряжений вязкой сжимаемой жидкости при малых числах Маха. Построены интегральные формы решений для компонент тензора напряжений; указана их связь с результатами, основанными на теории Лайтхилла. Выяснена роль вихревой компоненты в задаче возбуждения упругой оболочки.

При решении задачи о гидродинамическом возбуждении упругих оболочек важно выяснить вопрос о природе возмущающих оболочку случайных сил и их связи с гидродинамическими параметрами потока. В теории, основанной на использовании метода Лайтхилла (см. [1—5]), в качестве возмущающих усилий обычно рассматривались напряжения, вызываемые пульсационной частью давления в потоке, механизм распространения которых в пространстве вне оболочки являлся чисто акустическим.

Использованные в [3] уточненные представления о взаимодействии потока и оболочки привели к появлению в результатах дополнительных вкладов, гидродинамических по своей природе; механизм же распространения возмущающих оболочку усилий по-прежнему предполагался акустическим и описывался уравнениями Лайтхилла.

Целесообразно подвергнуть анализу указанные подходы к решению задачи для более детального изучения взаимодействия гидродинамической среды и упругой оболочки.

Приведем основные соотношения задачи возбуждения упругих оболочек внешними нагрузками.

Как известно, в общей моментной теории (см., например, [6]) уравнения движения тонких оболочек имеют вид

$$\left(R_{ij}-m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)W_j(\mathbf{x}_s,t)=F_i(\mathbf{x}_s,t),\quad i,j=1,2,3. \tag{1}$$

Здесь R_{ij} — некоторый линейный оператор, m — масса единицы поверхности, W_j — составляющая вектора смещений, F_i — компонента внешней нагрузки.

В терминах тензора Грина V_{ij} оператора $R_{ij}-m\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ решение (1) имеет вид

$$W_i(\mathbf{x}_s,t)=\int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{S}V_{ij}(\mathbf{x}_s,t/\mathbf{y}_s;\tau)F_j(\mathbf{y}_s,\tau)\,d\mathbf{y}_s d\tau. \tag{2}$$

Нормальная компонента смещения $W_n(\mathbf{x}_s, t)=n_i W_i(\mathbf{x}_s, t)$ задается соотношением

$$(2a)\qquad W_n(\mathbf{x}_s, t)=\int_{-\infty}^{t}\int_{S} \mathscr{E}_j(\mathbf{x}_s t/\mathbf{y}_s \tau) F_j(\mathbf{y}_s, \tau)\, d\mathbf{y}_s\, d\tau,$$

где $\mathscr{E}_j=n_i V_{ij}$. Здесь n_i — составляющие вектора нормали к оболочке.

Поля акустического изучения $p(\mathbf{x}, t)$ во внешней (V_b) и внутренней (V_a) области оболочки S определяются при этом обычными решениями волнового уравнения

$$(3)\qquad p(\mathbf{x}, t)=-\rho_0 \int_{-\infty}^{t}\int_{S} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} W_n(\mathbf{x}_s, \tau)\, G(\mathbf{x}, t/\mathbf{x}_s, \tau)\, d\mathbf{x}_s\, d\tau,$$

где G — функция Грина оператора $\nabla^2-c^{-2}\partial^2/\partial t^2$, удовлетворяющая на S граничным условиям задачи Неймана на $\frac{\partial}{\partial n} G|_{\mathbf{x}\in S}=0$; ρ_0 — плотность сплошной среды внутри ($\rho_0{}^a$) или вне ($\rho_0{}^b$) оболочки.

В связи с (2а) и (3) видим, что поле p зависит от всех составляющих вектора сил $\mathbf{F}(\mathbf{x}_s, t)$.

Поскольку оболочка S находится в сплошной среде, возмущающее усилие F_i определится как

$$(4)\qquad F_i(\mathbf{x}_s, t)=f_i(\mathbf{x}_s, t)+[\sigma_{ij}{}^a(\mathbf{x}_s, t)-\sigma_{ij}{}^b(\mathbf{x}_s, t)]n_j.$$

Здесь f_i — сторонняя сила; $\sigma_{ij}^{a,b}$ — тензор упругих напряжений сплошной среды во внутренней и внешней (V_a и V_b) области.

При возмущении упругой оболочки турбулизованным пограничным слоем поле в области V_a является чисто акустическим; соответственно

$$(4a)\qquad \sigma_{ij}{}^a(\mathbf{x}_s, t)=-p^a(\mathbf{x}_s, t)\,\delta_{ij},$$

где p^a — акустическое давление.

Поле напряжений $\sigma_{ij}{}^b(\mathbf{x}_s, t)$ на внешней границе оболочки создается турбулизованным пограничным слоем и в общем случае определяется не только пульсационной компонентой $p^b(\mathbf{x}_s, t)$ гидродинамического давления. Тензор $\sigma_{ij}{}^b$ в этом случае зависит от всего механизма передачи импульса в пограничном слое. В работах [1—5] при решении полагалось

$$(5)\qquad \sigma_{ij}{}^b(\mathbf{x}_s, t)=-p^b(\mathbf{x}_s, t)\,\delta_{ij},$$

причем пульсационная часть давления p^b в пограничном слое считалась удовлетворяющей уравнению Лайтхилла [7, 8]

$$(5a)\qquad \left(\nabla^2-c^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) p^b(\mathbf{x}, t)=-\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j} v_i(\mathbf{x}, t)\, v_j(\mathbf{x}, t)$$

(ради простоты мы в правой части опустили эффекты вязкости).

Цель работы — изучение правомерности использования представлений (5), (5а) применительно к задаче возбуждения упругой оболочки турбулентным пограничным слоем. Тем самым в связи с (1)—(3) будет установлена применимость представлений Лайтхилла в задачах об излучении упругих оболочек.

Очевидно, исходным пунктом такого анализа должно служить изучение связи поля тензора σ_{ij} с гидродинамическими характеристиками пограничного слоя.

Исследуем выражение для объемной силы $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$, входящей в уравнения вязкой жидкости (см., например, [9])

$$(6)\qquad \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)=-\nabla p(\mathbf{x}, t)+\eta\Delta \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)+(\zeta+{}^1/_3\eta)\nabla \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t).$$

Векторное поле $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ может быть представлено в форме

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)=\nabla\Phi(\mathbf{x}, t)+\operatorname{rot}B(\mathbf{x}, t)=\mathbf{F}_p(\mathbf{x}, t)+\mathbf{F}_s(\mathbf{x}, t);$$
$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0, \tag{7}$$

где Φ и $\mathbf{B}$ — скалярный и векторный потенциалы; $\mathbf{F}_p$ и $\mathbf{F}_s$ — потенциальная и соленоидальная (вихревая) компоненты $\mathbf{F}$. Для каждой составляющей $F_i(\mathbf{x}, t)$, $i=1, 2, 3$ силы $\mathbf{F}$ допустимо также представление в терминах полного тензора напряжений σ_{ij}^b (индекс «b» в дальнейшем опущен), входящего в формулу (4)

$$F_i(\mathbf{x},t)=\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}(\mathbf{x},t)=\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}^p(\mathbf{x},t)+\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}^s(\mathbf{x},t). \tag{8}$$

Здесь σ_{ij}^p, σ_{ij}^s — потенциальная и вихревая части полного напряжения $\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^p+\sigma_{ij}^s$. Сопоставляя выражения (7) и (8), мы устанавливаем связь

$$\sigma_{ij}^p(\mathbf{x}, t)=\Phi(\mathbf{x}, t)\delta_{ij},\ \sigma_{ij}^s(\mathbf{x}, t)=\varepsilon_{ijk}B_k(\mathbf{x}, t). \tag{9}$$

Здесь δ_{ij} — элементы единичного тензора $\hat{\zeta}$; ε_{ijk} — тензор Леви — Чивита.

Из (6)—(8) получаем

$$\mathbf{F}_p(\mathbf{x},t)=\nabla\Phi(\mathbf{x},t)=-\nabla\left[p(\mathbf{x},t)-\left(\zeta+\frac{4}{3}\eta\right)\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\right],$$
$$\mathbf{F}_s(\mathbf{x}, t)=\operatorname{rot}\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)=-\eta\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \tag{10}$$

Если использовать для связи между давлением p и скоростью v в пограничном слое уравнение неразрывности вида

$$\operatorname{div}\mathbf{v}+\rho_0^{-1}c^{-2}\frac{\partial}{\partial t}p=0, \tag{11}$$

что справедливо при малых числах Маха для потоков с постоянной энтропией, то первое из соотношений (10) принимает вид

$$F_p(\mathbf{x},t)=\nabla\Phi(\mathbf{x},t)=-\left[1+\rho_0^{-1}c^{-2}\left(\zeta+\frac{4}{3}\eta\right)\frac{\partial}{\partial t}\right]\nabla p(\mathbf{x},t). \tag{12}$$

(Из (9), (10) следует связь

$$\sigma_{ij}^p(\mathbf{x},t)=-\delta_{ij}\left[1+\frac{1}{\rho_0c^2}\left(\zeta+\frac{4}{3}\eta\right)\frac{\partial}{\partial t}\right]p(\mathbf{x},t),$$
$$\sigma_{ij}^s(\mathbf{x},t)=\eta\left[\frac{\partial}{\partial x_j}v_i(\mathbf{x},t)-\frac{\partial}{\partial x_i}v_j(\mathbf{x},t)\right]. \tag{13}$$

Соотношения (10) (13) позволяют построить поля напряжений $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$ по известным полям $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ и $p(\mathbf{x}, t)$. Из (13) следует, что в случае идеальной жидкости ($\eta=\zeta=0$) тензор напряжений имеет вид

$$\sigma_{ij}^p(\mathbf{x}, t)=-\delta_{ij}p(\mathbf{x}, t);\ \sigma_{ij}^s(\mathbf{x}, t)=0. \tag{13a}$$

Сопоставляя (5), (5а) и (13а), видим, что результаты работ [1—5], основанные на уравнениях Лайтхилла, оказываются справедливыми в рамках пренебрежения эффектами вязкости в пограничном слое. Но такое пренебрежение незаконно даже при больших числах Рейнольдса, поскольку наличие выраженных градиентов скорости в пограничном слое (ламинарном или турбулентном) приводит к значительным вкладам эффектов вязкости в структуру течения и соответственно в поле напряжений σ_{ij} (см., например, [9]). В силу этих соображений мы будем далее рассматривать возбуждение упругих оболочек полем напряжений σ_{ij}, определяемым с учетом эффектов вязкости в пограничном слое.

Построим теперь дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют непосредственно силы $\mathbf{F}_s$ и $\mathbf{F}_p$, либо их адекватные характеристики $\mathbf{B}$, Φ или σ_{ij}^s, σ_{ij}^p. При этом одновременно устанавливается явная структура оператора, описывающего процесс распространения; тем самым нахождение поля напряжений сводится к некоторой краевой задаче.

При построении указанной группы уравнений мы ограничимся малыми числами Маха, когда для уравнения неразрывности можно использовать форму (11).

Дифференциальное уравнение для потенциальной компоненты $\mathbf{F}_p(\mathbf{x}, t)$ получается из (12) путем применения к обеим частям равенства оператора

$$L_p = \left[1 + \frac{1}{\rho_0 c^2}\left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right)\frac{\partial}{\partial t}\right]\Delta_{\mathbf{x}} - c^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}. \tag{14}$$

Учитывая форму уравнения для давления

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2\left\{1 + \frac{1}{\rho_0 c^2}\left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right)\frac{\partial}{\partial t}\right\}p - c^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}p = -\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}\rho v_i v_j, \tag{15}$$

вытекающего в связи с (11) из основного уравнения теории Лайтхилла, мы приходим к интересующему нас соотношению

$$L_p\mathbf{F}_p = \left[1 + \frac{1}{\rho_0 c^2}\left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right)\frac{\partial}{\partial t}\right]\nabla_{\mathbf{x}}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}\rho v_i v_j. \tag{16}$$

Используя (10) и (12), получаем аналогичные уравнения

$$\begin{aligned} L_p\Phi &= \left[1 + \frac{1}{\rho_0 c^2}\left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right)\frac{\partial}{\partial t}\right]\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}\rho v_i v_j, \\ L_p\sigma_{ij}^p &= \delta_{ij}\left[1 + \frac{1}{\rho_0 c^2}\left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right)\frac{\partial}{\partial t}\right]\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}\rho v_i v_j. \end{aligned} \tag{17}$$

Для получения уравнений, описывающих распространение вихревой компоненты поля напряжений, вводим оператор

$$L_s = \Delta - \frac{\rho_0}{\eta}\frac{\partial}{\partial t}. \tag{18}$$

Действуя затем этим оператором на обе части второго из уравнений (10) и учитывая известное уравнение для rot $\mathbf{v}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \frac{\eta}{\rho_0}\nabla_{\mathbf{x}}\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{rot}[\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)], \tag{19}$$

мы приходим к уравнению для $\mathbf{F}_s(\mathbf{x}, t)$

$$L_s\mathbf{F}_s(\mathbf{x}, t) = \rho_0\operatorname{rot}\operatorname{rot}[\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)]. \tag{20}$$

Уравнение (20), строго говоря, справедливо только для несжимаемой жидкости, поскольку оно основано на (19). Однако в условиях применимости соотношений (11) (малые числа Маха, локальная изэнтропия) анализ точных уравнений показывает, что вкладами, вносимыми сжимаемостью в это уравнение, можно пренебречь.

Аналогичным образом в связи с (10) и (13) получаем уравнения для $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ и $\sigma_{ij}^s(\mathbf{x}, t)$

$$\begin{aligned} L_s\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \rho_0\operatorname{rot}[\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)], \\ L_s\sigma_{ij}^s(\mathbf{x}, t) &= -\rho_0\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}_j - \frac{\partial}{\partial x_j}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}_i\right\} \end{aligned} \tag{21}$$

Уравнения (16), (17), определяющие потенциальную часть поля $\mathbf{F}_p$ (Φ, σ_{ij}^p), описывают распространение акустических волн в вязкой жидкости. Правая часть этих уравнений содержит гидродинамические нелинейные члены и играет роль объемного источника. Соответственно закон пространственно-временной эволюции вихревой части силы F_s (или тензора σ_{ij}^s) описывается уравнениями (20), (21), имеющими вид уравнений теплопроводности; гидродинамическая нелинейность входит также в правую часть этих уравнений, создавая некоторый объемный источник.

Мы теперь должны исследовать решение уравнений (16), (17) и (20), (21) при некоторых граничных условиях на поверхности упругой оболочки.

Будем решать уравнения (17) в спектральной форме

$$(\Delta_{\mathbf{x}}+k_p^2)\,\Phi(\mathbf{x},\nu)=\left\{\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}\rho v_i v_j\right\}_F=q_p(\mathbf{x},\nu), \tag{22}$$

где волновое число k_p^2 определено соотношением

$$k_p^2=k^2\left[1-j\nu\rho_0^{-1}c^{-2}\left(\xi+\frac{4}{3}\eta\right)\right]^{-1} \tag{22a}$$

и символом $\{\ \}_F$ обозначена трансформанта Фурье.

Решение уравнения (22) может быть записано, как известно, в виде интеграла Кирхгофа. Если теперь — в связи со структурой источников q_p в (22) — преобразовать объемный интеграл полученного решения по теореме Гаусса, объединив затем поверхностные интегралы, то выражение для потенциальной части тензора напряжений σ_{ij}^p приобретает следующую форму:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^p(\mathbf{x},\nu)=&-\delta_{ij}\rho_0\int\limits_{V_b} v_\rho(\mathbf{y},\nu)*v_q(\mathbf{y},\nu)\frac{\partial^2}{\partial y_\rho\,\partial y_q}G^p(\mathbf{x},\mathbf{y},\nu)\,d\mathbf{y}+\\&+\delta_{ij}\rho_0\int\limits_S[-j\nu v_n(\mathbf{y}_s,\nu)+\eta(\mathbf{n}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}(y_s,\nu))]G^p(\mathbf{x},\mathbf{y}_s,\nu)\,d\mathbf{y}_s+\\&+\delta_{ij}\rho_0\int\limits_S v_n(\mathbf{y}_s,\nu)*v_q(\mathbf{y}_s,\nu)\frac{\partial}{\partial y_{sq}}G^p(\mathbf{x},\mathbf{y}_s,\nu)\,d\mathbf{y}_s+\\&+\delta_{ij}\int\left[p(\mathbf{y}_s,\nu)-\left(\zeta+\frac{4}{3}\eta\right)\mathrm{div}\,\mathbf{v}(\mathbf{y}_s,\nu)\right]\frac{\partial}{\partial n}G^p(\mathbf{x},\mathbf{y}_s,\nu)\,d\mathbf{y}_s.\end{aligned} \tag{23}$$

Здесь осуществлен переход к спектральным компонентам ($*$ — символ свертки в частотной области), использовано уравнение для потока импульса в сжимаемой вязкой жидкости и учтены соотношения (9)—(13).

Функция G^p есть решение уравнения Гельмгольца для бесконечной области $G^p=|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-1}\exp ik_p|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$, $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали.

Если теперь принять во внимание, что на границе должно выполняться условие непрерывности скоростей, т. е.

$$\mathbf{v}(\mathbf{y}_s,\nu)=\mathbf{v}_w(y_s,\nu), \tag{24}$$

где $\mathbf{v}_w(\mathbf{y}_s,\nu)=-j\nu\mathbf{W}(\mathbf{y}_s,\nu)$ — скорость упругой границы, движущейся согласно уравнениям (1), то отсюда следует, что

$$\left.\begin{aligned}&(\mathbf{n},\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}(\mathbf{y}_s,\nu)=(\mathbf{n},[\mathbf{n}[\mathbf{n},\mathbf{v}(\mathbf{y}_s,\nu)-\mathbf{v}_w(\mathbf{y}_s,\nu)]])=0,\\&\mathrm{div}\,\mathbf{v}(\mathbf{y}_s,\nu)=(\mathbf{n},\mathbf{v}(\mathbf{y}_s,\nu)-\mathbf{v}_w(\mathbf{y}_s,\nu))=0.\end{aligned}\right\} \tag{24a}$$

Заметим, что первое из соотношений (24а) эквивалентно в связи со второй из формул (10) требованию

$$(\mathbf{n},\mathbf{F}_s(\mathbf{y}_s,t))=F_{sn}(\mathbf{y}_s,t)=0, \tag{24б}$$

т. е. равенства нулю на S нормальной составляющей вихревой компоненты силы F_s; ниже, при анализе решения уравнения (20), этот результат будет получен непосредственно.

В связи с (24) выражение (23) для σ_i^p примет следующий вид:

$$\sigma_{ij}^p(\mathbf{x},\nu)=\delta_{ij}\Phi(\mathbf{x},\nu)=-\delta_{ij}\rho_0\int\limits_{V_b} v_p(\mathbf{y},\nu)*v_q(\mathbf{y},\nu)\frac{\partial^2}{\partial y_p\,\partial y_q}\cdot$$

$$\cdot G^p(\mathbf{x},\mathbf{y},\nu)\,d\mathbf{y}-j\nu\delta_{ij}\rho_0\int\limits_S v_n(\mathbf{y}_s,\nu)\,G^p(\mathbf{x},\mathbf{y}_s,\nu)\,d\mathbf{y}_s+$$

(25)

$$+\delta_{ij}\int\limits_S p(\mathbf{y}_s,\nu)\frac{\partial}{\partial n}G^p(\mathbf{x},\mathbf{y}_s,\nu)\,d\mathbf{y}_s+\delta_{ij}\rho_0\int\limits_S v_n(\mathbf{y}_s,\nu)*$$

$$*v_q(\mathbf{y}_s,\nu)\frac{\partial}{\partial y_{sq}}G^p(x,\mathbf{y}_s,\nu)\,d\mathbf{y}_s.$$

Для потенциальной части поверхностной силы, действующей на оболочку S по нормали, получим

$$F_{\text{p}}\quad(\mathbf{x}_s,\nu)=-n_in_j\sigma_{ij}^p(\mathbf{x}_s,\nu)=\rho_0\int\limits_{V_b} v_p(\mathbf{y},\nu)*$$

(26) $$*v_q(\mathbf{y},\nu)\frac{\partial^2}{\partial y_p\,\partial y_q}G^p(\mathbf{x}_s,\mathbf{y},\nu)\,d\mathbf{y}+j\nu\rho_0\int\limits_S v_n(\mathbf{y}_s\nu)\,G^p(\mathbf{x}_s\mathbf{y}_s,\nu)\,d\mathbf{y}_s-$$

$$-\int\limits_S p(\mathbf{y}_s,\nu)\frac{\partial}{\partial n}G^p(\mathbf{x}_s,\mathbf{y}_s)\,d\mathbf{y}_s-\rho_0\int\limits_S v_n(\mathbf{y}_s,\nu)*v_q(\mathbf{y}_s,\nu)\frac{\partial}{\partial y_q}G^p(\mathbf{x}_s,\mathbf{y}_s,\nu)\,d\mathbf{y}_s.$$

Если ограничиться малыми числами Маха, то, используя вытекающее из (11) соотношение

(26a) $$p(\mathbf{y}_s,\nu)=-j\frac{\rho_0c^2}{\nu}\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{y}_s,\nu),$$

в связи с (24a) приходим к выводу о том, что в (25) и (26) вклад члена, содержащего давление p на поверхности S, равен нулю.

Выражение (26) совпадает с известным результатом Лямшева [1, 2]; это совпадение имеет прозрачный физический смысл: первое из соотношений (13) в связи с формулами (22) и (22a) указывает, что эффекты вязкости (ζ, η) в пограничном слое при определении потенциальной части σ_{ij}^p; тензора напряжений влияют на окончательный результат только через волновое число k_p; структура же возмущающих источников гидродинамического типа, т. е. член $q_p=-\dfrac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}\rho v_iv_j$, в правой части (15)–(17) определяющий поверхностные и объемные вклады в выражениях (25), (26), остается тем же самым, что и при использовании метода Лайтхилла для описания пограничного слоя (т. е. представлений об идеальной жидкости). Влияние эффекта вязкости в (25), (26) — в связи с определением (23a) — проявится только через функцию Грина G^p.

Нетрудно видеть, что из (25), (26) немедленно следуют известные результаты [10–12], также основанные на использовании метода Лайтхилла в задачах о дифракции на жестком или податливом теле звука, порождаемого турбулентностью.

Перейдем теперь к построению решений для вихревой части внутренних напряжений в вязкой жидкости, т. е. к определению тензорного поля $\sigma_{ij}^s(\mathbf{x},t)$ в связи с уравнениями (20), (21).

Для вычисления вихревой части тензора напряжений $\sigma_{ij}^s(\mathbf{x}, t)$ воспользуемся спектральной формой первого из уравнений (21), а именно

$$(27)\qquad (\Delta+k_s^2)\mathbf{B}(\mathbf{x}, \nu)=\rho_0\{\mathrm{rot}[\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)]\}_F=\mathbf{q}_s(\mathbf{x}, \nu),$$

где $k_s^2=j\nu\rho_0/\eta$.

Для решения векторного уравнения (27) введем тензор Грина

$$(28)\qquad \hat{G}^s(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \nu)=\|G_{ij}^s(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \nu)\|=\|\delta_{ij}\|\frac{\exp ik_s|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}=\|\delta_{ij}\|G^s(\mathbf{x}, \mathbf{x}'\ \nu),$$

удовлетворяющий уравнению

$$(28а)\qquad (\Delta+k_s^2)\hat{G}^s(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \nu)=-\hat{\zeta}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}');\ \hat{\zeta}=\|\delta_{ij}\|.$$

Волновое число k_s при этом является комплексным

$$(28б)\qquad k_s=\sqrt{\nu\frac{\rho_0}{\eta}}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)$$

(при таком выборе аргумента k_s функция G^s обладает нужными свойствами убывания на бесконечности).

Используя теперь векторную теорему Грина (см. [13]), приходим к выражению для поля $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \nu)$

$$(29)\qquad \mathbf{B}(\mathbf{x}, \nu)=-\int \hat{G}^s(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \nu)\mathbf{q}_s(\mathbf{y}, \nu)\,d\mathbf{y}+\int\limits_S \hat{G}^s(\mathbf{x}, \mathbf{y}_s, \nu)\mathbf{n}\,\mathrm{div}\,\mathbf{B}(\mathbf{v}_s, \nu)\,d\mathbf{y}_s-$$

$$-\int\limits_S\left(\nabla_{ys}\int\limits_{V_b}\hat{G}^s(\mathbf{x}, \mathbf{y}_s, \nu)\,(\mathbf{n}\mathbf{B}(\mathbf{y}_s, \nu))\right)\,d\mathbf{y}_s-$$

$$-\int\limits_S \hat{G}^s(\mathbf{x}, \mathbf{y}_s, \nu)\,[\mathbf{n}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{B}(\mathbf{y}_s, \nu)]\,d\mathbf{y}_s-$$

$$-\int\limits_S [\nabla_{ys}\times\hat{G}^s(\mathbf{x}, \mathbf{y}_s, \nu)]\,[\mathbf{n}\times\mathbf{B}(\mathbf{y}_s, \nu)]\,d\mathbf{y}_s.$$

Учитывая теперь определение вектора $\mathbf{B}$ (см. (7)—(10)) и принимая во внимание непрерывность скоростей $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_w$ на границе раздела S (см. (24)), замечаем, что вклады поверхностных интегралов в (29) равны нулю. Соответственно для σ_{ij} из (29), в связи с (9), (27), (28) получаем

$$(30)\qquad \sigma_{ij}^s(\mathbf{x}, \nu)=-\int\limits_{V_b} G^s(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \nu)\,q_{ij}^s(\mathbf{y}, \nu)\,d\mathbf{y},$$

где

$$(31)\qquad q_{ij}^s(\mathbf{y}, \nu)=\varepsilon_{ijk}q_k^s(\mathbf{y}, \nu)=\rho_0\varepsilon_{ijk}\,\mathrm{rot}_k[\mathbf{v}(\mathbf{y}, \nu)\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}(\mathbf{y}, \nu)].$$

С учетом свойств тензора ε_{ijk} из (30) и (31) следует, что

$$(32)\qquad \sigma_{ii}^s(\mathbf{x}, \nu)=0$$

Преобразуем теперь объемный интеграл в (30) по теореме Гаусса; используя свойства тензора ε_{ijk} (см. например, [14]), получаем

$$(33)\qquad \sigma_{ij}^s(\mathbf{x}, \nu)=\rho_0\int\limits_{V_b}\left\{\frac{\partial}{\partial y_j}G^s(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \nu)\,[\mathbf{v}(\mathbf{y}, \nu)*\mathrm{rot}\,\mathbf{v}(\mathbf{y}, \nu)]_i-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial y_i}G^s(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \nu)\,[\mathbf{v}(\mathbf{y}, \nu)*\mathrm{rot}\,\mathbf{v}(\mathbf{y}, \nu)]_j\right\}d\mathbf{y}.$$

С учетом условий непрерывности вектора скорости на упругой границе S соответствующий поверхностный интеграл снова обращается в нуль. Объемный интеграл (33) можно еще раз преобразовать по теореме Гаусса; в результате приходим к следующему окончательному выражению для вихревой компоненты $\sigma_{ij}^s(\mathbf{x}, \nu)$:

$$
\begin{aligned}
(34)\qquad \sigma_{ij}^s(\mathbf{x},\nu) = & \int\limits_S \Big[\frac{\rho_0}{2} \mathbf{v}(\mathbf{y}_s,\nu) * \mathbf{v}(\mathbf{y}_s,\nu) n_i - \\
& - \rho_0 v_n(\mathbf{y}_s,\nu) * v_i(\mathbf{y}_s,\nu) \Big] G_j^s(\mathbf{x},\mathbf{y}_s,\nu)\, d\mathbf{y}_s - \\
& - \int\limits_S \Big[\frac{\rho}{2\rho_0} \mathbf{v}[\mathbf{y}_s,\nu] * \mathbf{v}(\mathbf{y}_s,\nu) n_j - \rho_0 v_n(\mathbf{y}_s,\nu) * v_j(\mathbf{y}_s,\nu) \Big] G_i^s(\mathbf{x},\mathbf{y}_s,\nu)\, d\mathbf{y}_s + \\
& + \rho_0 \int\limits_{V_b} [v_i(\mathbf{y},\nu) * v_k(\mathbf{y},\nu) G_{jk}^s(\mathbf{x},\mathbf{y},\nu) - v_j(\mathbf{y},\nu) * v_k(\mathbf{y},\nu) G_{ik}^s(\mathbf{x},\mathbf{y},\nu)]\, d\mathbf{y} + \\
& + \rho_0 \int\limits_{V_b} [v_i(\mathbf{y},\nu) * \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{y},\nu) G_j^s(\mathbf{x},\mathbf{y},\nu) - \\
& - v_j(\mathbf{y},\nu) * \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{y},\nu) G_i^s(\mathbf{x},\mathbf{y},\nu)]\, d\mathbf{y},
\end{aligned}
$$

где

$$
(34a)\qquad
\begin{aligned}
G_i^s(\mathbf{x},\mathbf{y}_s,\nu) &= \frac{\partial}{\partial y_{is}} G(\mathbf{x},\mathbf{y}_s,\nu); \\
G_{ij}^s(\mathbf{x},\mathbf{y},\nu) &= \frac{\partial^2}{\partial y_i\, \partial y_j} G^s(\mathbf{x},\mathbf{y},\nu).
\end{aligned}
$$

Учитывая свойства однородности функций Грина G_p и G_s (см. (23а) и (28)), мы можем придать формулам (25) и (34) следующий вид:

$$
(35)\qquad \sigma_{ij}^p(\mathbf{x},\nu) = -\delta_{ij} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_r\, \partial x_q} V_{rq}^p(\mathbf{x},\nu) + n_r \frac{\partial}{\partial x_q} S_{rq}^p(\mathbf{x},\nu) + n_r Q_r(\mathbf{x},\nu) \right\}.
$$

$$
\begin{aligned}
(36)\qquad \sigma_{ij}^s(\mathbf{x},\nu) = & \frac{\partial^2}{\partial x_j\, \partial x_k} V_{ik}^s(\mathbf{x},\nu) - \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_k} V_{jk}^s(\mathbf{x},\nu) + \\
& + \mu_{irq} \frac{\partial}{\partial x_j} S_{rq}^s(\mathbf{x},\nu) - \mu_{jrq} \frac{\partial}{\partial x_i} S_{rq}^s(\mathbf{x},\nu) + \\
& + \frac{\partial}{\partial x_i} P_j(\mathbf{x},\nu) - \frac{\partial}{\partial x_j} P_i(\mathbf{x},\nu).
\end{aligned}
$$

В этих выражениях

$$
(36a)\qquad
\begin{aligned}
V_{rq}^{p,s}(\mathbf{x},\nu) &= \rho_0 \int\limits_{V_b} v_r(\mathbf{y},\nu) * v_q(\mathbf{y},\nu) G^{-p,s}(\mathbf{x},\mathbf{y},\nu)\, d\mathbf{y}; \\
S_{rq}^{p,s}(\mathbf{x},\nu) &= \rho_0 \int\limits_S v_r(\mathbf{y}_s,\nu) * v_q(\mathbf{y}_s,\nu) G^{p,s}(\mathbf{x},\mathbf{y}_s,\nu)\, d\mathbf{y}_s; \\
Q_r(\mathbf{x},\nu) &= j\nu\rho_0 \int\limits_S v_r(\mathbf{y}_s,\nu) G^p(\mathbf{x},\mathbf{y}_s,\nu)\, d\mathbf{y}_s; \\
P_r(\mathbf{x},\nu) &= -j\nu c^{-2} \int\limits_{V_b} v_r(\mathbf{y},\nu) * p(\mathbf{y},\nu) G^s(\mathbf{x},\mathbf{y},\nu)\, d\mathbf{y}
\end{aligned}
$$

и тензор μ_{irq} определен формулой

$$\mu_{irq}=n_r\delta_{iq}-\frac{1}{2}n_i\delta_{rq}. \tag{36б}$$

Анализируя (35) и (36), видим, что если точка наблюдения x находится в дальнем поле относительно области V, занимаемой турбулентностью, то напряжения σ_{ij}^{ps} могут рассматриваться как результат действия мультипольных источников различного порядка. Именно члены вида $\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_k}V_{ik}^{p,s}$ описывают квадрупольные источники, занимающие область V, члены $\frac{\partial}{\partial x_i}S_{rq}^{p,s}$ описывают дипольные источники, заполняющие поверхность; вклады $\frac{\partial}{\partial x_i}P_j$ связаны с объемными диполями и, наконец, слагаемые, содержащие Q_r, есть результат действия источников монопольного типа, непрерывно заполняющих поверхность S. При этом механизм распространения потенциальной σ_{ij}^p и вихревой σ_{ij}^s частей поля σ_{ij} различен — поле σ_{ij}^p является чисто акустическим, механизм же передачи σ_{ij}^p в соответствии с параболической структурой оператора L_s (см. (18)) является диффузионным.

Различие механизмов распространения определяет и различие физической природы соответствующих мультиполей — если в (35) элементарным источником является точечный излучатель звука, то в (36) аналогичную роль играет элементарный вихрь, свойства которого определяются правой частью уравнений (21).

Заметим, что все слагаемые в (35) и (36), кроме члена Q_rn_r, являются квадратичными функциями от характеристик $\mathbf{v}$ и p турбулентного потока.

В связи с граничным условием (24) выражение для Q_r в (36а) может быть переписано в форме

$$Q_r(\mathbf{x},\nu)=-\rho_0\nu^2\int\limits_S W_r(\mathbf{y}_s,\nu)\,G^p(\mathbf{x},\mathbf{y}_s,\nu)\,d\mathbf{y}_s. \tag{36в}$$

Вклад Q_r в (35), очевидно, представляет собой обычную реакцию излучения упругой поверхности S. В связи со структурой уравнений (1), (2) этот член может быть включен в линейный оператор уравнений движения оболочки; все остальные слагаемые в (35), (36) определяют собой возмущающую оболочку силу (см. формулу (4)). Нормальная компонента $F_n(\mathbf{x}_s,\nu)$ дается выражением

$$F_n(\mathbf{x}_s,\nu)=f_n(\mathbf{x}_s,\nu)-[\tilde{\sigma}_{ij}^p(\mathbf{x}_s,\nu)\,n_in_j+\sigma_{ij}^s(\mathbf{x}_s,\nu)\,n_in_j+p^a(\mathbf{x}_s,\nu)],\ldots \tag{37}$$

где в $\tilde{\sigma}_{ij}^p$ входят только первые два слагаемых формулы (35).

Нетрудно видеть, что вклад вихревых напряжений σ_{ij}^s в величину F_n в связи со структурой формулы (36) оказывается равным нулю: нормальная сила определяется только потенциальной частью σ_{ij}^p поля напряжений и определяется поэтому только акустическим механизмом распространения. Касательная же компонента силы F, очевидно, зависит от σ_{ij}^p и σ_{ij}^s, что явствует из анализа выражений (4) и (35), (36).

Известно, что касательные составляющие поверхностной силы не входят явным образом в уравнения движения однородных плоских пластин и тонких пологих оболочек (панелей), если последние описываются уравнениями технической теории В. З. Власова [6]. Поэтому весь процесс излучения поля и формирования его статистических моментов при возбуждении этих конструкций пограничным слоем определяется только потенциальной частью поля напряжений в жидкости. Тем самым очерчивается область применения результатов работ [1—5, 10—12], основанных на ис-

пользовании метода Лайтхилла. Однако в рамках применимости общей моментной теории, т. е. уравнений (1) для замкнутых оболочек или панелей относительно большой кривизны, а также для неоднородных (в частности, оребренных) упругих конструкций — вне зависимости от их кривизны — учет касательных компонент возмущающих усилий и соответственно вихревых напряжений σ_{ij}^s становится необходимым.

Заметим, впрочем, что даже в рамках технической теории оболочек тангенциальные усилия могут привести к дополнительным вкладам в поле излучения посредством промежуточного механизма, трансформирующего продольные колебания оболочки в колебания изгибного типа. Такого рода трансформацию могут, как известно (см. [15]), осуществлять ребра жесткости подкрепляющего набора; тем самым для оребренных тонких оболочек — даже описываемых уравнениями технической теории — вклад вихревых компонент тензора напряжений может оказаться значительным. Это утверждение может быть мотивировано качественным анализом соотношений (36а), из которых видно, что относительная величина вихревых и потенциальных вкладов управляется структурой функции Грина G^p и G^s.

Спектр пространственных масштабов (фурье-компонент) этих функций зависит от волновых чисел k_p и k_s, при этом (см. (22а) и (28б)) выполняется неравенство

$$|k_s| = \sqrt{\frac{\nu\rho_0}{\eta}} \gg |k_p| = k\left\{1+\left[\frac{\nu^2}{\rho_0 c^2}\left(\zeta+\frac{4}{3}\eta\right)\right]^2\right\}^{1/4}, \tag{38}$$

справедливое в широком диапазоне низких звуковых частот. Соотношение (38) позволяет сделать вывод о том, что энергия вихревой части поля напряжений охватывает значительно более широкую область пространственных масштабов, нежели энергия потенциальной части и поэтому ее вклад в возмущающие усилия может быть достаточно велик. При этом, разумеется, возмущения вихревого происхождения будут носить существенно локальный характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. М. Лямшев.* К расчету акустического излучения турбулентного аэродинамического потока. Акуст. ж., 1960, *6*, 4, 472–477.
2. *Л. М. Лямшев.* Излучение звука упругими оболочками, возбуждаемыми турбулентным аэродинамическим потоком. Акуст. ж., 1961, *7*, 1, 59–66.
3. *В. И. Клячкин.* О гидродинамическом возбуждении упругих оболочек. Тр. I Всес. школы-семинара по статистической гидроакустике. Новосибирск, «Наука», 1970, 74–97.
4. *В. С. Петровский.* Гидроакустические проблемы турбулентного шума. Л., «Судостроение», 1966.
5. *R. H. Kraichnan.* Pressure fluctuations in turbulent flow over a flat plate. J. Acoust. Soc. America, 1956, *28*, 3, 378–390.
6. *В. З. Власов.* Избранные труды. М., Изд-во АН СССР, 1962.
7. *M. J. Lighthill.* On sound generated aerodynamically. I. General theory. Proc. Roy. Soc., 1952, *A211*, 1107, 564–587.
8. *M. J. Lighthill.* Sound generated aerodynamically. Proc. Roy. Soc., 1962, *A267*, 1329, 147–182.
9. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Механика сплошных сред. М., Гостехтеориздат, 1953.
10. *N. R. Curle.* The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound. Proc. Roy. Soc., 1955, *A231*, 1187, 505–514.
11. *P. E. Doak.* Acoustical radiation of turbulent fluid containing foreing bodies. Proc. Roy. Soc., 1960, *A254*, 1276, 129–145.
12. *A. Powell.* Aerodynamic noise and the plane boundary. J. Acoust. Soc. America, 1960, *32*, 8, 982.
13. *Ф. М. Морс, Г. Фешбах.* Методы теоретической физики, т. II, М., Изд-во иностр. лит., 1958.
14. *Г. Джеффрис, Б. Свирс.* Методы математической физики, в. 1, М., «Мир», 1969.
15. *А. С. Никифоров, С. В. Будрин.* Распространение и поглощение звуковой вибрации на судах. Л., «Судостроение», 1968.

Поступила
3 февраля 1976 г.