УДК 772.99:534

О ПРИМЕНЕНИИ ШИРОКОПОЛОСНЫХ СИГНАЛОВ В АКУСТИЧЕСКОЙ ГОЛОГРАФИИ

В. Д. Свет

На примере задачи разрешения двух точечных источников показано, что, используя широкополосное излучение, можно улучшить угловое разрешение акустической голограммы, однако при этом интенсивность восстановленных изображений уменьшается.

Для получения акустических голограмм широко применяются гармонические сигналы, непрерывные или ограниченные по длительности. Их применение стало настолько традиционным, что иногда создает у некоторых авторов мнение о невозможности использования в акустической голографии широкополосных сигналов [1]. Вместе с тем в «неоптической» голографии довольно часто используют частотно-модулированные и амплитудно-модулированные сигналы [2], применение которых дает возможность увеличить разрешение по глубине и повысить помехоустойчивость к аддитивному шуму [3]. Другим интересным аспектом применения широкополосного излучения является возможность улучшения углового разрешения, на что впервые было указано в работе [4].

Ниже мы рассмотрим некоторые особенности акустических голограмм и восстановленных изображений, полученных с помощью широкополосных сигналов. В частности, при этом оказывается возможным улучшить характеристики пространственного разрешения по угловым координатам, правда, ценой снижения интенсивности восстановленного изображения. Для упрощения выкладок мы будем анализировать голограммы Фурье.

Пусть в некоторой плоскости располагаются источник опорного сигнала $E_0(x) = A_0 \delta(x) s(t)$ и два «предметных» источника $E_1(x) = A_1 \delta(x - x_1) s(t)$ и $E_2(x) = A_2 \delta(x - x_2) s(t)$, причем

(1)
$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp(-j\omega t) d\omega.$$

Поле в плоскости регистрации, расположенной на расстоянии R от плоскости источников, будет

(2)
$$U(\xi) = \frac{1}{\lambda R} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{2} E_i(x) \exp(-j\xi x) dx,$$

и с учетом выражения (1)

(3)
$$U(\xi) = \frac{1}{Rc} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \sum_{i=0}^{2} E_{i}(x) S(\omega) \exp(-j\omega t - j\xi x) dx d\omega,$$

где c — скорость звука. Выберем $S(\omega)$ в виде гауссовой функции

(4)
$$S(\omega) = \frac{1}{\Lambda \omega \sqrt{2\pi}} \exp \left[\frac{\pi^2}{\Lambda \omega^2} (\omega - \omega_0)^2 \right],$$

где $\Delta \omega = 2\pi \Delta f$ — ширина полосы. С учетом фильтрового свойства δ -функции после интегрирования поле $U(\xi)$ можно представить в виде

(5)
$$U(\xi) = 2\sqrt{\pi}A_0\Delta f \exp(-j\omega_0 t - t^2\Delta f^2) + 2\sqrt{\pi}A_1\Delta f \exp(-j\omega_0 q_1 - q_1^2\Delta f^2) + 2\sqrt{\pi}A_2\Delta f \exp(-j\omega_0 q_2 - q_2^2\Delta f^2),$$

где
$$q_1 = t + \frac{x_1 \xi}{2\pi Rc}$$
; $q_2 = t + \frac{x_2 \xi}{2\pi Rc}$. Уравнение голограммы будет

(6)
$$T(\xi) = |U(\xi)U(\xi)| = \frac{8\pi^2}{R^2c^2} [A_1A_0 \exp(-q_1\Delta f - t^2\Delta^2 f) \times \cos \omega_0 (t - q_1) + A_2A_0 \exp(-q_2\Delta f - t^2\Delta f^2) \cos \omega_0 (t - q_2) + A_1A_2 \exp(-\Delta f^2 q_1^2 - \Delta f^2 q_2^2) \cos \omega_0 (q_2 - q_1)],$$

причем здесь и далее мы пренебрегаем членами, описывающими постоянную составляющую.

Теперь необходимо усреднить полученное выражение (6) по времени (время экспозиции), а затем найти вид восстановленных изображений путем обратного преобразования Фурье. Удобнее произвести эти линейные операции в обратной последовательности. Введем для сокращения записи условные обозначения

$$a_i = x_i \Delta^2 f / 4\pi^2 R^2 c^2$$
, $b_i = x_i t \Delta^2 f / \pi R c$, $c_i = \omega_0 x_i / 2\pi R c$,

где i=1, 2 и

$$a_3 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{4\pi^2 R^2 c^2}, \quad b_3 = \frac{(x_1 + x_2) t \Delta f^2}{\pi R c}, \quad c_3 = \frac{\omega_0 (x_2 - x_1)}{2\pi R c}.$$

Тогда восстановленное изображение в момент времени t можно написать в таком виде

(7)
$$\Lambda(\eta) = F^{-1}(T_{10} + T_{20} + T_{12}),$$

где η — координата плоскости изображения, F^{-1} — символ обратного преобразования Фурье, а

$$T_{10} = A_1^2 A_0^2 \exp(-a_1 \xi^2 - b_1 \xi) \cos \xi c_1,$$

$$T_{20} = A_2^2 A_0^2 \exp(-a_2 \xi^2 - b_2 \xi) \cos \xi c_2,$$

$$T_{12} = A_1^2 A_2^2 \exp(-\Delta f^2 t^2 - a_3 \xi^2 - b_3 \xi) \cos \xi c_3.$$

Рассмотрим более подробно преобразование Фурье от первого слагаемого T_{10} в выражении (7). Вычисления для слагаемых T_{20} и T_{12} будут аналогичны

(8)
$$\Lambda_{i0}(\eta) = A_i^2 A_0^2 \int_{-D}^{D} \exp(-a_i \xi^2 - b_i \xi - j \eta \xi) \cos \xi c_i d\xi,$$

где $\eta = x/\lambda_0 R$. Интеграл (8) можно свести к сумме двух интегралов Френеля [5] и после интегрирования

(9)
$$A_{10}(\eta) = \frac{A_1^2 A_0^2}{4 \sqrt[3]{a_1}} \left\{ \exp\left(\frac{\alpha_1}{4a_1}\right) \left[\Phi\left(D \sqrt[3]{a_1} - \frac{\alpha_1}{2 \sqrt[3]{a_1}}\right) + \right. \right.$$

$$+ \Phi \left(D \sqrt{a_{1}} + \frac{\alpha_{1}}{2 \overline{\sqrt{a_{1}}}}\right) + \exp \left(\frac{\gamma_{1}^{2}}{4 a_{1}}\right) \times \left[\Phi \left(D \sqrt{a_{1}} - \frac{\gamma_{1}}{2 \sqrt{a_{1}}}\right) + \Phi \left(D \sqrt{a_{1}} + \frac{\gamma_{1}}{2 \sqrt{a_{1}}}\right)\right]\right\}.$$

где $\Phi(\cdot)$ — интеграл вероятностей, $\alpha_1 = b_1 - jc_1 + j\eta$; $\gamma_1 = b_1 + jc_1 + j\eta$. Для остальных слагаемых $\Lambda_{20}(\eta)$ и $\Lambda_{12}(\eta)$ условные обозначения выглядят так:

$$\alpha_2 = b_2 - jc_2 + j\eta;$$
 $\gamma_2 = b_2 + jc_2 + j\eta,$
 $\alpha_3 = b_3 - jc_3 + j\eta;$ $\gamma_3 = b_3 + jc_3 + j\eta.$

Дальнейшие аналитические результаты могут быть получены путем приближений, поскольку проинтегрировать выражение (9) по «t» в явном виде не представляется возможным.

Воспользуемся разложением функции Ф(z) в степенной ряд вида

(10)
$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1 \cdot 3 \cdot \dots (2n+1)} z^{2n+1}$$

и ограничимся первым членом ряда. Такое приближение достаточно точ-

но описывает функцию $\Phi(z)$ при $z \leq 0.8$.

Подставляя в выражение (9) вместо функции $\Phi(z)$ ее приближение (10) и усредняя $\Lambda_{10}(\eta)$ по времени, после алгебраических преобразований получаем окончательное выражение для восстановленного мнимого изображения

(11)
$$\tilde{\Lambda}_{10}(x) = \frac{A_1^2 A_0^2 \omega_0^2 D^2}{4c^2 (1 + \Delta f T)} \exp\left(-\frac{\Delta^2 f D^2 x^2}{R^2 c^2}\right) \times \left\{ \frac{2 \operatorname{ch} q_1}{p_1^2 (1 + q_1^2)} \sin^2\left(\frac{p_1 q_1}{\Delta f T}\right) - \frac{q_1^2 - p_1^2}{q_1^2 + p_1^2} (1 - \exp \Delta f T) - \frac{\sin^2 p_1 (1 + q_1)}{\cos (q_1^2 + \Delta f^2 T^2)} \left[\frac{1}{2(p_1 + q_1)^2} \operatorname{ch}\left(\frac{p_1^2 q_1^2}{1 + \Delta f^2 T^2}\right) + \frac{1}{2(p_1 - q_1)^2} \operatorname{ch}\left(\frac{p_1^2 q_1^2}{1 + \Delta f^2 T^2}\right) \right] \right\},$$

где

$$p_1=\omega_0 D(x-x_1)/Rc$$
, $q_1=Dx\Delta f/Rc$.

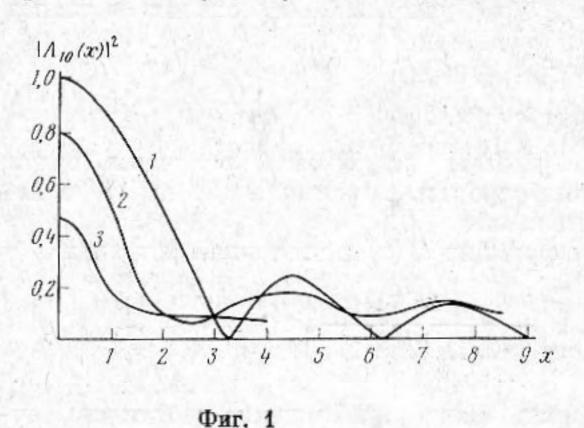
Изображение второго слагаемого описывается аналогичным выражением с параметром $p_2 = \omega_0 D(x-x_2)/Rc$. Изображение, образованное комбинацией первого и второго источников, описывается также выражением (11),

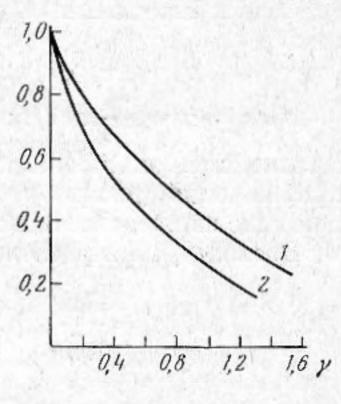
но при $p_3 = \omega_0 D (x - x_2 + x_1) / Rc$.

Расчеты, выполненные по выражению (11), показывают, что восстановленное изображение существенно зависит от ширины полосы Δf . При $\Delta f \rightarrow 0$ выражение (11) переходит в функцию типа $\sin x/x$, т. е. описывает изображение тонального точечного источника (фиг. 1). Чем больше ширина полосы Δf , тем уже становится главный максимум и меньше выражаются вторичные лепестки в изображении. Интенсивность восстановленного изображения также уменьшается с увеличением ширины полосы. Таким образом, выигрыш в угловом разрешении сопровождается проигрышем в амплитуде восстановленного изображения.

Чтобы восстановленное изображение не отличалось от изображения, полученного на тональном сигнале, необходимо, чтобы величина $Dx\Delta f/Rc$ была невелика. Поскольку $Dx/Rc=\Delta \tau$ есть разность времен прохождения сигналов от источника до крайних точек апертуры, а $\tau_k=1/\Delta f$ есть время

корреляции сигнала, то условие отсутствия искажений получится в следующем виде: $\Delta \tau < \tau_k$. На фиг. 2 видно, что с расширением полосы частот $\gamma = \Delta f/f$ улучшение углового разрешения растет несколько быстрее, чем спадание интенсивности главного максимума. Так, при $\gamma = 0.2$ спадание амплитуды сигнала составляет 20%, а угловое разрешение улучшается на 30%, и в качестве критерия допустимой ширины полосы можно выбрать величину допустимого спадания интенсивности восстановленного





Фиг. 2

Фиг. 1. Вид восстановленного изображения точечного источника при различных значениях ширины полосы: $I-\gamma=0;\ 2-\gamma=0,2;\ 3-\gamma=0,9$

Фиг. 2. Зависимость интенсивности изображения и ширины главного максимума от ширины полосы: 1 — интенсивность изображения; 2 — ширина главного максимума

изображения (кривая 1, фиг. 2). Сделанные выводы полностью относятся и к изображению второго источника; таким образом, расширение полосы способствует улучшению разрешения двух точечных источников. Однако более детальное обсуждение этого вопроса, в частности качества разрешения слабого источника на фоне сильного, требует специального рассмотрения.

Автор благодарит В. А. Зверева за плодотворное обсуждение настоящей работы, а также А. И. Бойко и Э. А. Полянского за полезные советы при ее выполнении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. С. Грасюк, Ю. Б. Семенников. Анализ чувствительности и четкости звуковых изображений. Акуст. ж., 1975, 19, 1, 39—45.

 W. A. Penn, J. L. Chovan. The application of Holographic concepts to Sonar, Acoustic Holography, vol. 2, Plenum Press, N. Y., 1970, 133—171.

3. F. R. Castella. Application of one dimensional techniques to a mapping Sonar, Acoustic Holography, vol. 3. Plenum Press, 1971, 247-271.

4. В. А. Зверев. Голография и стереофония. Пленарный доклад. Материалы VIII Всес. акуст. конф., М., 1973.

 И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.

Акустический институт Академии наук СССР

Поступила 25 июня 1976 г. После повторной переработки 27 мая 1977 г.