АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXIV 1978 Вып. 2

УДК 534.231.1–14

ВИБРОГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ

И. А. Чабан

Показано, что в слое нематического жидкого кристалла, находящемся между двумя параллельными пластинами, при колебаниях нижней пластины в своей плоскости возникает гидродинамическая неустойчивость. Эта неустойчивость имеет параметрический характер: периодическим параметром является решение линейной системы, которое через квадратичные члены входит в систему уравнений в вариациях. Рассчитаны пороги и выяснен характер переориентации молекул в слое при такой неустойчивости.

В работах [1–3] наблюдалась гидродинамическая неустойчивость нормального слоя нематического жидкого кристалла (ЖК), помещенного между двумя пластинами при колебаниях нижней пластины как целого в своей плоскости. Эта неустойчивость возникала, как только амплитуда колебаний пластины становилась больше некоторого порогового значения. Она проявлялась в появлении изменений ориентации молекул, значительно превосходящих подобные изменения для известных линейных эффектов. Непосредственно за порогом на частотах порядка 10 *Кгц* эти изменения ориентации были одинаковыми в плоскости, параллельной пластинам, и изменялись только по толщине слоя; при этом они оставались постоянными во времени. При некотором превышении порога появлялась доменная структура (аналог доменов Вильямса), которая при наблюдении в поляризационном микроскопе имела вид темных и светлых полос, перпендикулярных к направлению колебаний пластины. Одновременно появлялись периодические движения молекул не только в направлении колебаний пластины, но и в направлении нормали к слою. Теоретически виброгидродинамическая неустойчивость до сих пор не исследовалась.

В настоящей работе виброгидродинамическая неустойчивость трактуется как параметрическая. Роль периодического параметра, раскачивающего систему, играет решение линеаризованной системы уравнений с периодическими граничными условиями, которое через квадратичные члены входит в систему уравнений для следующего приближения. Ниже будут рассчитаны пороговые амплитуды смещений, при которых возникает эта неустойчивость, а также найдены ее пространственные и временные характеристики. Заметим, что похожая на виброгидродинамическую неустойчивость высокочастотная электрогидродинамическая неустойчивость [4, 5] также является параметрической, однако периодический параметр — электрическое поле — в этом случае входит уже в линеаризованную систему уравнений.

В соответствии с предлагаемой трактовкой ход исследования будет следующим. Напишем систему уравнений нематического ЖК, считая в соответствии с экспериментом, что директор и скорости смещений имеют лишь компоненты в направлении нормали к слою (ось z) и в направлении скорости колебаний нижней пластины (ось x). (Ось x и нормальную к ней ось y направим по ребрам нижней пластины, а начало координат помес-

тим в ее углу.) Эта система уравнений связывает компоненты скорости смещений ЖК v_x, v_z и угол отклонения директора от нормали θ, которые далее будем считать малыми величинами. Систему уравнений напишем с точностью до квадратичных по v_x, v_z, θ членов. Линейную систему уравнений, которая получается при пренебрежении этими квадратичными членами, назовем порождающей. Обозначим через $v_x^{(0)}, v_z^{(0)}$, $\theta^{(0)}$ решение этой порождающей системы с заданными граничными условиями и будем его далее называть накачкой. Решение системы уравнений, записанных с учетом квадратичных членов представим в виде: $v_x = v_x^{(0)} + v_x^{(1)}$, $v_z = v_z^{(0)} + v_z^{(1)}$, $\theta = \theta^{(0)} + \theta^{(1)}$, где $v_x^{(1)}$, $v_z^{(1)}$, $\theta^{(1)}$ — малые поправки, удовлетворяющие нулевым граничным условиям. Подставляя эти выражения в систему уравнений, записанных с учетом квадратичных членов, и сохраняя лишь нелинейные по $v_x^{(1)}$, $v_z^{(1)}$, $\theta^{(1)}$ члены, получаем систему линейных уравнений, в которую решение порождающей системы войдет как совокупность периодических параметров. Эта система содержит также вынуждающие силы — квадратичные по $v_x^{(0)}$, $v_z^{(0)}$, $\theta^{(0)}$ члены. Систему уравнений для $v_x^{(1)}$, $v_z^{(1)}$, $\theta^{(1)}$ будем далее исследовать методом Хилла [6, 7]. При этом мы будем искать условия, отвечающие неограниченно возрастающим во времени решениям. Эти условия и дают выражения для пороговых смещений возникновения виброгидродинамической неустойчивости. Заметим, что упомянутые выше вынуждающие силы дают лишь конечное вынужденное решение, так что они несущественны при вычислении порогов и поэтому с самого начала могут быть отброшены. Расчет пороговых смещений по указанной схеме удается провести, постольку поскольку накачку можно считать слабой и ограничиться в дисперсионном уравнении квадратичными по накачке членами. Предложенный метод анализа неустойчивости близок обычному методу теории динамической неустойчивости [8, 9], однако отличается от последнего существенным усложнением, связанным с тем, что приходится учитывать изменение накачки по толщине слоя.

Перейдем непосредственно к расчету. Система уравнений движения ЖК имеет следующий вид [4, 10, 11]:

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial u_i} + \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial u_k}, \qquad [\mathbf{n}(\gamma_1\mathbf{N} + \gamma_2\hat{A}\mathbf{n})]_y = [\mathbf{n}\boldsymbol{\varphi}]_y. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{n}$ — директор ($n_x = \sin\theta$, $n_y = 0$, $n_z = \cos\theta$), ρ — плотность, p — давление, $\hat{A}\mathbf{n}$ — вектор с компонентами $A_{ji}n_i$, $\boldsymbol{\varphi} = \partial\mathcal{F}/\partial\mathbf{n}$, $\mathcal{F}$ — франковская энергия (определяемая пространственными производными компонент директора), u_k — компоненты вектора смещений, $\gamma_1 = \alpha_3 - \alpha_2$, $\gamma_2 = \alpha_6 - \alpha_5$, α_2, $\alpha_3 \ldots$ — постоянные Лесли, индексы принимают значения x, z, по одинаковым индексам подразумевается суммирование, σ_{ki} — тензор вязких напряжений, написанный с учетом объемной вязкости [4],

$$\sigma_{ki} = \alpha_2 n_k N_i + \alpha_3 n_i N_k + \alpha_4 A_{ki} + \alpha_5 n_k n_j A_{ji} + \alpha_6 n_i n_j A_{jk} + \mu_1 A_{jj}\delta_{ki} + \mu_2 A_{jj} n_k n_i,$$

$$A_{mj} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial u_m} + \frac{\partial v_m}{\partial u_j}\right) \qquad \mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} + \frac{1}{2}[\mathbf{n}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{v}],$$

μ_1, μ_2 — коэффициенты объемной вязкости. Во втором из уравнений (1) опущены инерционные члены ввиду их малости в рассматриваемом диапазоне частот.

Конкретный вид уравнений (1), записанных с точностью до квадратичных по v_x, v_z, θ членов, ввиду их громоздкости приводить не будем. В этих уравнениях можно сделать ряд упрощений. Квадратичные члены, получен-

ные из франковской энергии, в силу малости постоянных Франка значительно меньше других квадратичных членов, так что ими можно пренебречь. В линейной части уравнений (но не в квадратичной) при написании вязких членов в силу малости вязких напряжений по сравнению с упругими можно считать ЖК несжимаемым. Ввиду малости α_3 по сравнению с другими постоянными Лесли в нематических ЖК можно положить $\alpha_3=0$ и, следовательно, использовать соотношения $\alpha_6=\alpha_2+\alpha_5$, $\gamma_2=-\gamma_1$, а также использовать тот факт, что μ_2 обычно значительно больше постоянных Лесли. Как показал расчет, кадратичные по скоростям члены не вносят существенного вклада в выражения для пороговых смещений, поэтому для упрощения изложения эти члены будут опущены с самого начала. Из этой системы уравнений с указанными упрощениями способом, описанным выше, получается следующая система уравнений для $v_x^{(1)}$, $v_z^{(1)}$, $\theta^{(1)}$:

$$
\begin{aligned}
(2)\qquad \rho\frac{\partial^2 v_x^{(1)}}{\partial t^2} &= \mathcal{K}\left(\frac{\partial^2 v_x^{(1)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z^{(1)}}{\partial x\,\partial z}\right)+\eta\frac{\partial^3 v_x^{(1)}}{\partial t\,\partial z^2}+\\
&+\eta_1\frac{\partial^3 v_x^{(1)}}{\partial t\,\partial x^2}+\alpha_2\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial t}\left(\frac{\mathcal{K}_{11}}{\gamma_1}\frac{\partial^2\theta^{(1)}}{\partial x^2}+\frac{\mathcal{K}_{33}}{\gamma_1}\frac{\partial^2\theta^{(1)}}{\partial z^2}\right)+\\
&+(\alpha_2+\alpha_5)\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}\left(\theta^{(0)}\cdot\frac{\partial v_z^{(1)}}{\partial z}\right)+\alpha_2\frac{\partial^3(\theta^{(1)}\theta^{(0)})}{\partial x\,\partial t^2}+\\
&+\alpha_5\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}\left(\theta^{(0)}\frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial z}+\theta^{(1)}\frac{\partial\theta^{(0)}}{\partial t}\right)+\\
&+\mu_2\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial t}\left[\theta^{(0)}\left(\frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial v_z^{(1)}}{\partial z}\right)\right],\\
\rho\frac{\partial^2 v_z^{(1)}}{\partial t^2} &= \mathcal{K}\left(\frac{\partial^2 v_z^{(1)}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 v_x^{(1)}}{\partial z\,\partial x}\right)+\eta\frac{\partial^3 v_z^{(1)}}{\partial t\,\partial x^2}+\\
&+\eta_2\frac{\partial^3 v_z^{(1)}}{\partial t\,\partial z^2}-\alpha_2\frac{\partial^3}{\partial z\,\partial t^2}(\theta^{(0)}\theta^{(1)})+\\
&+(\alpha_2+\alpha_5)\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial t}\left(\theta^{(0)}\frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial z}\right)+\alpha_5\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial t}\left(\theta^{(0)}\frac{\partial v_z^{(1)}}{\partial x}\right)+\\
&+\mu_2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}\left[\theta^{(0)}\left(\frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial v_z^{(1)}}{\partial z}\right)\right]\\
\frac{\partial\theta^{(1)}}{\partial t} &= \frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial z}+\frac{\mathcal{K}_{11}}{\gamma_1}\frac{\partial^2\theta^{(1)}}{\partial x^2}+\frac{\mathcal{K}_{33}}{\gamma_1}\frac{\partial^2\theta^{(1)}}{\partial z^2}-\\
&-\theta^{(0)}\frac{\partial v_z^{(1)}}{\partial z}+\theta^{(0)}\frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial x}
\end{aligned}
$$

где $\mathcal{K}_{11}$, $\mathcal{K}_{33}$ — постоянные Франка, $\eta=\frac{1}{2}(\alpha_4+\alpha_5+\alpha_2)$, $\eta_1=\frac{1}{2}(\alpha_4-\alpha_5-\alpha_2)$, $\eta_2=\frac{1}{2}(\alpha_4+\alpha_2+3\alpha_5)$, $\mathcal{K}$ — модуль всестороннего сжатия ЖК.

Будем считать далее, что толщина h ЖК-слоя значительно меньше длины звуковой волны, но значительно больше длины вязкой волны, распространяющейся вдоль оси z. Эти условия выполняются на частотах порядка *Мгц* при толщинах слоя 10^{-3}—10^{-2} *см*, а на частотах порядка нескольких десятков *Кгц* — при толщинах порядка 10^{-2} *см*, так что рассматриваемый диапазон частот составляет от нескольких *Мгц* до нескольких десятков *Кгц*. Последнее условие приводит к следующему выражению для $\theta^{(0)}$:

$$\theta^{(0)}=u\varkappa \exp(-\varkappa z)\left[\cos(\varkappa z-\omega t)+\sin(\varkappa z-\omega t)\right], \tag{3}$$

где ω — частота колебаний нижней пластины, u — амплитуда ее смещений, $\varkappa=\sqrt{\omega\rho/2\eta}$. Выражение (3) для $\theta^{(0)}$, а также выражения $v_x^{(0)}=\int\frac{\partial\theta^{(0)}}{\partial t}dz$ и $v_z^{(0)}=0$ являются решением порождающей системы всюду, кроме очень тонкого слоя (толщиной порядка $\sqrt{\mathscr{K}_{33}/\gamma_1\omega}$) вблизи колеблющейся пластины, которым мы пренебрегаем. Удобно представить $\theta^{(0)}$ в виде

$$\theta^{(0)}=f_1(z)\,e^{-i\omega t}+f_2(z)\,e^{i\omega t} \tag{4}$$

и разложить $f_1(z)$ и $f_2(z)$ в ряды по волновым числам $\tilde{k}=0,\ \pm\pi/h\ldots$:

$$f_1(z)=\sum_{\tilde{k}}F_1(\tilde{k})\exp(i\tilde{k}z),\qquad f_2(z)=\sum_{\tilde{k}}F_2(\tilde{k})\exp(i\tilde{k}z).$$

Коэффициенты Фурье при этом оказываются равными

$$F_1(\tilde{k})=\frac{2i\varkappa^2}{2i\varkappa^2-\tilde{k}^2}\frac{u}{2h},\qquad F_2(\tilde{k})=F_1^*(\tilde{k}).$$

Решение системы уравнений (2) можно представить в следующем виде:

$$v_x^{(1)}=\sum_{n=0,\pm1}^{\pm\infty}\sum_{m=0,\pm1}^{\pm\infty}A(q,n\pi/h,m\omega)\exp\{iqx+i(k-n\pi/h)z-i(\sigma-m\omega)t\}, \tag{5}$$

$$v_z^{(1)}=\sum_{n=0,\pm1}^{\pm\infty}\sum_{m=0,\pm1}^{\pm\infty}\tilde{A}(q,n\pi/h,m\omega)\exp\{iqx+i(k-n\pi/h)z-$$
$$-i(\sigma-m\omega)t\},$$

$$\theta^{(1)}=\sum_{n=0,\pm1}^{\pm\infty}\sum_{m=0,\pm1}^{\pm\infty}\tilde{\tilde{A}}(q,n\pi/h,m\omega)\exp\{iqx+i(k-n\pi/h)z-$$
$$-i(\sigma-m\omega)t\},$$

где q и k — действительные величины. Подставляя (5) в (2), получаем, как условие существования отличного от нуля решения, дисперсионное уравнение:

$$\Delta(\sigma,k,q)=0.$$

Определитель $\Delta(\sigma,\ k,\ q)$ — бесконечного ранга — представлен ниже. При его написании использованы следующие обозначения:

$$L(\sigma,k)=\rho\sigma^2-\mathscr{K}q^2+i\sigma k^2\eta+i\sigma q^2\eta_1,$$
$$N(\sigma,k)=\rho\sigma^2-\mathscr{K}k^2+i\sigma q^2\eta+i\sigma k^2\eta_2,$$

$$\Delta(\sigma, k, q) =$$

$$= \begin{vmatrix}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & L\{\sigma-\omega, k\} & 0 & 0 & 0 & 0 & l_-\{\sigma-\omega, k, 0\} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
\cdot & 0 & L\left\{\sigma-\omega, k-\frac{\pi}{h}\right\} & 0 & 0 & 0 & l_-\left\{\sigma-\omega, k-\frac{\pi}{h}, -\frac{\pi}{h}\right\} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
\cdot & 0 & 0 & L\left\{\sigma-\omega, k+\frac{\pi}{h}\right\} & 0 & 0 & l_-\left\{\sigma-\omega, k+\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right\} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
\cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
\cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & L\left\{\sigma-\omega, k+\tilde{n}\frac{\pi}{h}\right\} & l_-\left\{\sigma-\omega, k+\frac{\tilde{n}\pi}{h}, \frac{\tilde{n}\pi}{h}\right\} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
\cdot & l_+\{\sigma, k, 0\} & l_+\left\{\sigma, k, \frac{\pi}{h}\right\} & l_+\left\{\sigma, k, -\frac{\pi}{h}\right\} & \cdot & l_+\left\{\sigma, k, \tilde{n}\frac{\pi}{h}\right\} & L\{\sigma, k\} & l_-\{\sigma, k, 0\} & l_-\left\{\sigma, k, \frac{\pi}{h}\right\} & l_-\left\{\sigma, k, -\frac{\pi}{h}\right\} & \cdot & l_-\left\{\sigma, k, \tilde{n}\frac{\pi}{h}\right\} & \cdot
\end{vmatrix}$$

.	0	0	0	0	0	$l_+\{\sigma+\omega, k, 0\}$	$L\{\sigma+\omega,\ k\}$	0	0	0	0	.
.	0	0	0	0	0	$l_+\left\{\sigma+\omega, k-\frac{\pi}{h}, -\frac{\pi}{h}\right\}$	0	$L\left\{\sigma+\omega, k-\frac{\pi}{h}\right\}$	0	0	0	.
.	0	0	0	0	0	$l_+\left\{\sigma+\omega, k+\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right\}$	0	0	$L\left\{\sigma+\omega, k+\frac{\pi}{h}\right\}$	0	0	.
.	0	0	0	0	0	.	0	0	0	.	0	.
.	0	0	0	0	0	$l_+\left\{\sigma+\omega, k+\frac{\kappa\pi}{h}, \frac{\kappa\pi}{h}\right\}$	0	0	0	0	$L\left\{\sigma+\omega, k+\kappa\frac{\pi}{h}\right\}$	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

$$M(\sigma, k) = -\alpha_2 \sigma k \left(\frac{\mathcal{K}_{11}}{\gamma_1} q^2 + \frac{\mathcal{K}_{33}}{\gamma_1} k^2 \right)$$

$$P(\sigma, k) = i\sigma - \frac{\mathcal{K}_{11}}{\gamma_1} q^2 - \frac{\mathcal{K}_{33}}{\gamma_1} k^2, \tag{6}$$

$$l\left(\sigma, k, \frac{\pi}{h}\right) = i\sigma q \left[\alpha_5 \left(k - \frac{\pi}{h} \right) + \mu_2 k \right],$$

$$m\left(\sigma, k, \frac{\pi}{h}\right) = i\sigma \left(k - \frac{\pi}{h} \right) \left[(\alpha_2 + \alpha_5) q + \mu_2 k \right],$$

$$n(\sigma, \omega) = -i\sigma q (\alpha_2 \sigma + \alpha_5 \omega),$$

$$r\left(\sigma, k, \frac{\pi}{h}\right) = i\sigma \left[(\alpha_2 + \alpha_5) k \left(k - \frac{\pi}{h} \right) + \mu_2 q^2 \right],$$

$$s\left(\sigma, k, \frac{\pi}{h}\right) = i\sigma q \left[\alpha_5 k + \mu_2 \left(k - \frac{\pi}{h} \right) \right],$$

$$q(\sigma, k) = i\alpha_2 \sigma^2 k,$$

$$L\{\sigma, k\} = \begin{pmatrix} L(\sigma, k) & -\mathcal{K} qk & M(\sigma, k) \\ -\mathcal{K} qk & N(\sigma, k) & 0 \\ ik & 0 & P(\sigma, k) \end{pmatrix},$$

$$l_+\left(\sigma, k, \frac{\pi}{h}\right\} =$$

$$= \begin{pmatrix} l\left(\sigma, k, \frac{\pi}{h}\right) F_1\left(\frac{\pi}{h}\right) & m\left(\sigma, k, \frac{\pi}{h}\right) F_1\left(\frac{\pi}{h}\right) & n(\sigma, \omega) F_1\left(\frac{\pi}{h}\right) \\ r\left(\sigma, k, \frac{\pi}{h}\right) F_1\left(\frac{\pi}{h}\right) & s\left(\sigma, k, \frac{\pi}{h}\right) F_1\left(\frac{\pi}{h}\right) & q(\sigma, k) F_1\left(\frac{\pi}{h}\right) \\ iqF_1\left(\frac{\pi}{h}\right) & -i\left(k - \frac{\pi}{h}\right) F_1\left(\frac{\pi}{h}\right) & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица $l_+\left\{\sigma, k, \frac{\pi}{h}\right)$, в которой функция $n(\sigma, \omega)$ заменена на $n(\sigma, -\omega)$ и $F_1(\pi/h)$ на $F_2(\pi/h)$, обозначена $l_-\{\sigma, k, \pi/h\}$. Через $\pi\tilde{n}/h$ обозначено максимально допустимое значение $\tilde{k}$, при котором среду можно рассматривать как сплошную. Поскольку с ростом n функции $F_1(n\pi/h)$ и $F_2(n\pi/h)$ уменьшаются, то далее достаточно будет рассмотреть лишь несколько первых значений n.

Исследование устойчивости системы сводится к анализу корней характеристического уравнения. Если среди них окажутся такие, у которых $\operatorname{Im} \sigma > 0$, то система неустойчива: соответствующие этим корням решения будут экспоненциально нарастать со временем. Ограничимся далее расчетом корней характеристического уравнения с точностью до квадратичных по накачке членов (членов, пропорциональных $|F_1(\tilde{k})|^2$). Структура определителя $\Delta(\sigma, k, q)$ такова, что по диагонали расположены матрицы с элементами нулевого порядка по накачке (0-матрицы), а вне ее находятся матрицы с элементами первого порядка (1-матрицы). Чтобы получить слагаемое второго порядка по накачке, два сомножителя a_{lm} в выражении для слагаемого $a_{1i}a_{2j}\ldots$ определителя $\Delta(\sigma, k, q)$ должны быть взяты из 1-матриц. Нетрудно показать, что эти сомножители могут быть взяты единственным образом: один из одной 1-матрицы, а другой из симметричной относительно диагонали 1-матрицы. Определитель, составленный из двух 0-мат-

риц и двух 1-матриц, расположенных по вершинам прямоугольника, рассчитанный с точностью до квадратичных по накачке членов и умноженный на определители неиспользованных 0-матриц, представляет собой одно из слагаемых определителя $\Delta(\sigma, k, q)$. Перебирая таким образом все 1-матрицы и складывая слагаемые, получим значение определителя $\Delta(\sigma, k, q)$ с точностью до квадратичных членов. Разлагая $\Delta(\sigma, k, q)$ на множители и сравнивая с указанным выше значением, нетрудно убедиться, что корни определителя, составленного из двух 0-матриц и двух 1-матриц, расположенных по вершинам прямоугольника, рассчитанного с точностью до квадратичных членов, являются (с той же точностью) корнями характеристического уравнения. Перебирая такие определители мы получим все корни характеристического уравнения. Таким образом, для нахождения корней характеристического уравнения с точностью до квадратичных по накачке членов нужно выполнить следующие операции: найти корни уравнения

$$d^{(6)}=\begin{vmatrix} L\{\sigma-\omega, k-\pi/h\} & l_-\{\sigma-\omega, k-\pi/h, -\pi/h\} \\ l_+\{\sigma, k, \pi/h\} & L\{\sigma, k\} \end{vmatrix}=0;$$

в этих корнях произвести замены $\pi/h\to n\pi/h$ $(n=0, \pm1\ldots)$; во всех корнях, полученных выше, произвести замены $\sigma\to\sigma+m\omega$ $(m=0, \pm1\ldots)$.

Из решений (5), соответствующих определенным k, q и $\sigma(k, q)$ и удовлетворяющих характеристическому уравнению, следует составить решение, удовлетворяющее нулевым граничным условиям, которое и будет решением поставленной задачи. Эти граничные условия определяют возможные значения k и q. В нулевом по накачке приближении такими значениями являются $k=n\pi/h$, $q=n\pi/L$ $(n=\pm1, \pm2)$, L – длина ЖК-слоя, а также любые значения q, удовлетворяющие условию $|q|L\ll1$. Далее именно эти значения k и q мы будем подставлять в выражения для порогов.

Прежде всего найдем корни уравнения $d^{(6)}=0$ в нулевом по накачке приближении. Среди этих корней лишь два корня – $\sigma=-i\nu_0Q(q, k)$ и

$$\sigma=\omega-i\nu_1Q(q, k-\pi/h), \qquad \text{где} \qquad Q(q, k)=1-\alpha_2\left[\eta+\frac{q^2}{k^2}(\eta_1+\eta_2)+\frac{q^4}{k^4}\eta\right]^{-1},$$

$$\nu_0=\frac{\mathscr{K}_{11}}{\gamma_1}q^2+\frac{\mathscr{K}_{33}}{\gamma_1}k^2, \quad \nu_1=\frac{\mathscr{K}_{11}}{\gamma_1}q^2+\frac{\mathscr{K}_{33}}{\gamma_1}(k-\pi/h)^2,$$ имеют малую (отрицательную) мнимую часть. Только для этих корней есть основание надеяться, что квадратичные по накачке члены при амплитудах смещения, использованных в [1–3], окажутся достаточно большими по абсолютной величине (и положительными) для того, чтобы с их учетом величина $\operatorname{Im}\sigma$ стала положительной. Далее рассмотрим лишь первый из этих корней, так как второй получается из него заменой $k\rightleftarrows k-\pi/h$. С учетом квадратичных членов этот корень будет иметь следующий вид:

$$\sigma=-i\nu_0Q(q, k)+\delta.$$

Будем далее считать $|\delta|\leqslant\nu_0Q(q, k)$. Пороговые значения будем находить из условия

$$\operatorname{Im}\delta=\nu_0Q(q, k). \tag{7}$$

Ввиду малости ν_0 при расчете δ ограничимся членами первого порядка малости по ν_0. В результате получим

$$\begin{aligned}\delta=&-|F_1(\pi/h)|^2[L(\sigma, k)N(\sigma, k)-\mathscr{K}^2q^2k^2]^{-1}\times\\ &\times\left[L\left(\sigma-\omega, k-\frac{\pi}{h}\right)N\left(\sigma-\omega, k-\frac{\pi}{h}\right)-\mathscr{K}^2q^2\left(k-\frac{\pi}{h}\right)^2\right]^{-1}\times\\ &\times\left\{qn(\sigma-\omega, -\omega)\left[\mathscr{K}\left(k-\frac{\pi}{h}\right)^2-N\left(\sigma-\omega, k-\frac{\pi}{h}\right)\right][L(\sigma, k)N(\sigma, k)-\right.\end{aligned} \tag{8}$$

$$-\mathcal{K}^2q^2k^2]+\left(k-\frac{\pi}{h}\right)q\left(\sigma-\omega,k-\frac{\pi}{h}\right)\left[L\left(\sigma-\omega,k-\frac{\pi}{h}\right)-\right.$$

$$\left.-\mathcal{K}q^2\right][L(\sigma,k)N(\sigma,k)-\mathcal{K}^2q^2k^2]+n(\sigma-\omega,-\omega)\mathcal{K}qk^2\times$$

$$\times\left[\mathcal{K}q\left(k-\frac{\pi}{h}\right)s\left(\sigma,k,\frac{\pi}{h}\right)+r\left(\sigma,k,\frac{\pi}{h}\right)N\left(\sigma-\omega,k-\frac{\pi}{h}\right)\right]+$$

$$+q\left(\sigma-\omega,k-\frac{\pi}{h}\right)\mathcal{K}qk^2\left[L\left(\sigma-\omega,k-\frac{\pi}{h}\right)s\left(\sigma,k,\frac{\pi}{h}\right)+\right.$$

$$\left.+\mathcal{K}q\left(k-\frac{\pi}{h}\right)r\left(\sigma,k,\frac{\pi}{h}\right)+n(\sigma-\omega,-\omega)N(\sigma,k)k\right]\times$$

$$\times\left[\mathcal{K}q\left(k-\frac{\pi}{h}\right)m\left(\sigma,k,\frac{\pi}{h}\right)+N\left(\sigma-\omega,k-\frac{\pi}{h}\right)l\left(\sigma,k,\frac{\pi}{h}\right)-\right.$$

$$\left.-n(\sigma,\omega)i\left(k-\frac{\pi}{h}\right)\frac{N\left(\sigma-\omega,k-\frac{\pi}{h}\right)}{P\left(\sigma-\omega,k-\frac{\pi}{h}\right)}\right]+$$

$$+q\left(\sigma-\omega,k-\frac{\pi}{h}\right)kN(\sigma,k)\left[L\left(\sigma-\omega,k-\frac{\pi}{h}\right)m\left(\sigma,k,\frac{\pi}{h}\right)+\right.$$

$$+\mathcal{K}q\left(k-\frac{\pi}{h}\right)l\left(\sigma,k,\frac{\pi}{h}\right)-$$

$$\left.\left.-n(\sigma,\omega)i\left(k-\frac{\pi}{h}\right)^2\frac{\mathcal{K}q}{P\left(\sigma-\omega,k-\frac{\pi}{h}\right)}\right]\right\}.$$

Дальнейший анализ проведем для жидкого кристалла МББА (p-метоксибензилиден-p-n-бутиланилин), для которого при комнатной температуре $\alpha_2=-0{,}77$ *пз*, $\alpha_5=0{,}43$, $\gamma_1=0{,}77$, $\eta_1=0{,}58$, $\eta=0{,}24$ [12], $\mu_2\simeq 2$ *пз* на частоте 35 *Мгц* [13] и, по-видимому, растет с понижением частоты, $\mathcal{K}_{11}=6\cdot10^{-7}$ *дин*, $\mathcal{K}_{33}=7{,}5\cdot10^{-7}$ *дин* [14], $\rho=1{,}08$ *г/см*^{3}, $c=\sqrt{\mathcal{K}/\rho}=1{,}5\cdot10^5$ *см/сек* [15]. Полагая в (8) $k=\pi/h$, находим, что $\operatorname{Im}\delta>0$ лишь при $\pi/h\gg q>k_{зв}$. Подставляя эти значения q в выражение (7) и обозначая ближайшее к $k_{зв}=\omega/c$ значение q через $\pi n_0/L$, получаем следующее выражение для порогового смещения:

$$u_{пор}=2\left\{\frac{\mathcal{K}_{33}\pi^2\rho(\alpha_2-\eta)}{\gamma_1k_{зв}^2(\alpha_2+\alpha_5)(\mu_2-\eta)}\left(\frac{\pi^2}{L^2}\frac{n_0^2}{k_{зв}^2}-1\right)\right\}^{1/2}. \tag{9}$$

Пороговое смещение, представленное выражением (9), оказывается малым лишь при $\pi n_0/L$, близком к $k_{зв}$. Этот случай исследуем особо. Величина $\operatorname{Re}\left\{\left[L\left(\sigma-\omega,k-\frac{\pi}{h}\right)N\left(\sigma-\omega,k-\frac{\pi}{h}\right)-\mathcal{K}^2q^2\left(k-\frac{\pi}{h}\right)^2\right]^{-1}\right\}$ в случае $k=\pi/h$ имеет наибольшее по абсолютной величине отрицательное значение при значении q, удовлетворяющем уравнению $\rho\omega^2-\mathcal{K}q^2+\omega q^2\eta_1=0$. При таком q (близком к $k_{зв}$) выражение для порогового смещения имеет вид

$$u_{пор}=2\left\{\frac{\mathcal{K}_{33}\pi^2(\alpha_2-\eta)\eta_1}{\gamma_1\omega(\alpha_2+\alpha_5)(\mu_2-\eta)}\left[2+\frac{(\pi/h)^4}{2\varkappa^4}\right]\right\}^{1/2} \tag{10}$$

В случае $k_{зв}L \ll 1$ q может принимать любое значение, близкое к $k_{зв}$, так что всегда можно найти значение q, удовлетворяющее указанному выше уравнению. Найденный порог (10) соответствует появлению практически постоянного во времени изменения ориентации молекул по толщине слоя. Это изменение одинаково по всей плоскости, параллельной плоскости пластин. Оно удерживается упругими напряжениями. Именно пороговое смещение (10), по-видимому, наблюдалось в работах [1—3]. Оно не зависит от толщины слоя и уменьшается с частотой, что и отмечается в [1, 2]. При $\omega=1{,}5\cdot10^5$ *сек*$^{-1}$, $h=10^{-2}$ *см* и указанных параметрах МББА выражение (10) дает $u_{пор}=2{,}2\cdot10^{-5}$ *см*, что близко к значению, наблюдавшемуся в [1—3]. Однако выражение (10) без учета частотной зависимости коэффициентов вязкости дает более слабую зависимость от частоты, чем та, которая наблюдалась в [1, 2]. При $k=2\pi/h, \ldots$ получаются гораздо более высокие пороги. При замене в расчете π/h на $n\dfrac{\pi}{h}$ $(n=0, \pm1, \pm2\ldots)$ мы получаем также более высокие пороги. Те же пороги, что представлены выражениями (9), (10), получаются для аналогичных изменений ориентации с частотами ω, $2\omega\ldots$ *.

Заменяя в (8) $-\pi/h$ на π/h и полагая $k=\pi/h$, нетрудно установить, что при $q=a\dfrac{\pi}{h}$ (где $a\gg1$) $\operatorname{Im}\delta>0$. Соответствующее пороговое смещение равно

$$u_{пор}=ah\left\{\frac{\mathscr{K}_{11}\rho[4\varkappa^4+(\pi/h)^4]}{4\gamma_1(-\alpha_2-(1/2)\alpha_5)\varkappa^4}\right\}^{1/2}. \tag{11}$$

При превышении порога (11) аналогично предыдущему случаю появляются как практически постоянные во времени изменения ориентации молекул, так и периодические изменения с частотами ω, $2\omega\ldots$. Итак, при превышении порогового смещения (11) появляется синусоидальное изменение угла поворота директора вдоль толщины слоя с волновым числом π/h, а затем, при небольшом дальнейшем превышении порога, с волновыми числами $n\dfrac{\pi}{h}$ $(n=2, 3\ldots)$, где $n\leqslant\varkappa h/\pi$. Кроме того, появляется периодическое изменение угла поворота директора по длине ЖК-слоя с волновыми числами, в несколько раз большими π/h. Эти изменения сопровождаются движениями молекул с той же периодичностью. Пороговое смещение (11) пропорционально толщине слоя. Оно дает порог появления доменной структуры. Подставляя в (11) $\omega=1{,}5\cdot10^5$ *сек*$^{-1}$, $h=10^{-2}$ *см*, $a=4$ и приведенные параметры МББА, получаем $u_{пор}=2{,}48\cdot10^{-5}$ *см*, что по порядку величины совпадает с порогом появления доменной структуры, наблюдавшимся в [1, 2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hatakeyama T., Tanaka I., Kagawa I.* Optical and Dielectrical Effects in a Nematic Liquid Crystal Film due to Vibratory Shear Wave, J. Acoust. Soc. Japan, 1975, *31*, 2, 81–88.
2. *Kagawa I., Hatakeyama T., Tanaka I.*, Vibro-optical and Vibro-dielectrical Effects in a Nematic Liquid Crystal Layer. J. Sound and Vibration, 1975, *41*, 1, 1—11.
3. *Scudiery F.* High-frequency Shear Instability in Nematic Liquid Crystals. Appl. Phys. Lett, 1976. *29*, 7, 398–400.
4. *Stephen M. I., Straley I. P.* Physics of Liquid Crystals. Rev. Mod. Phys., 1974, *46*, 4, 617–705.
5. *Пикин С. А.* Высокочастотный электрогидродинамический эффект в жидких кристаллах. ЖЭТФ, 1971, *61*, 5 (11), 2133–2139.

---

* Поскольку вероятность возбуждения высокочастотных возмущений меньше, чем низкочастотных, то обычно пороги первых немного выше порогов вторых и частоты 0, ω, 2ω, ... появляются последовательно.

6. *Уиттекер Э. Г., Ватсон Дж. М.* Курс современного анализа, II, М., Физматгиз, 1963.
7. *Валеев К. Г.* К методу Хилла в теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. ПММ, 1960, *24*, 6, 979–987.
8. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. М., Гостехтеориздат, 1956.
9. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961.
10. *Eriksen I. L.* Continuum Theory of Liquid Crystal of Nematic Type. Mol. Cryst. Liq. Cryst., 1969, *7*, 153–164.
11. *Leslie F. M.* Some Thermal Effects in Cholesteric Liquid Crystals. Proc. Roy. Soc. L., 1968, *A307*, 1490, 359–372.
12. *Gähwiller C.* The Viscosity Coefficients of a Room — Temperature Liquid Crystal. Phys. Lett., 1971, *36A*, 4, 311–312.
13. *Natale G. G., Commins D. E.* Temperature Dependence of Anisotropic Ultrasonic Propagation in Nematic Liquid Crystal. Phys. Rev. Lett., 1972, *28*, 2, 1439–1441.
14. *Haller I.* Elastic Constants of the Nematic Liquid Crystalline Phase of *p*-Metoxybenzylidene-*p*-*n*-Butylaniline (MBBA), J. Chem. Phys., 1972, *57*, 4, 1400—1405.
15. *Mullen M. E., Lüth B., Stephen H. J.* Sound Velocity in a Nematic Liquid Crystal. Phys. Rev. Lett., 1972, *28*, 13, 799.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
12 мая 1976 г.
После повторной доработки
23 августа 1977 г.