АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXIV 1978 Вып. 3

УДК 534.213

ПОЛЕ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ИСТОЧНИКА ВОЛН УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ В ТВЕРДОМ СЛОЕ

Ю. Ф. Болтов, И. Н. Григорьев

Путем использования прямого и обратного преобразования Фурье получено решение для поля элементарного источника, характеризуемого равномерным распределением сил по нормали к граничным поверхностям и δ-распределением в любой плоскости продольного сечения твердого слоя. Силы источника, возбуждающего волны деформаций, ориентированы параллельно свободным поверхностям слоя. Приведены результаты анализа поля в дальней зоне.

В работе [1] рассмотрено поле в твердом волноводе при задании произвольным образом распределения гармонических во времени сил в его поперечном сечении. Метод решения задачи основан на использовании интегрального преобразования Фурье уравнения движения с правой частью, соответствующей заданным силам, и граничных условий, определяемых равенством нулю компонент тензора напряжений на свободных поверхностях.

Ограничив плоский твердый слой свободными поверхностями $x_2=\pm a$, направим для определенности гармоническую во времени объемную силу источника по оси x_3, предполагая ее равномерное распределение с линейной плотностью $\mathscr{F}_3$ в направлении оси x_2 и δ-распределение в направлениях осей x_1 и x_3. Характеризуя твердую среду слоя постоянными Ламе μ, λ и плотностью ρ, представим правую часть уравнения движения относительно вектора смещения $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$ в следующем виде: $\mathscr{F}_3\delta(x_1)\delta(x_3)$, где $\mathscr{F}_3=\text{const}$ при x_2 в пределах $[-a, a]$.

Производя преобразование Фурье в плоскостях $x_2=\text{const}$, получим неоднородную систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

$$
\begin{gathered}
[\omega^2\rho-\mu k^2-(\mu+\lambda)k_1^2]g_1+\mu\frac{d^2g_1}{dx_2^2}+ \\
+ik_1(\mu+\lambda)\frac{dg_2}{dx_2}-(\mu+\lambda)k_1k_3g_3=0, \\
ik_1(\mu+\lambda)\frac{dg_1}{dx_2}+(\omega^2\rho-\mu k^2)g_2+(2\mu+\lambda)\frac{d^2g_2}{dx_2^2}+ik_3(\mu+\lambda)\frac{dg_3}{dx_2}=0, \\
-(\mu+\lambda)k_1k_3g_1+ik_3(\mu+\lambda)\frac{dg_2}{dx}+ \\
+[\omega^2\rho-\mu k^2-(\mu+\lambda)k_3^2]g_3+\mu\frac{d^2g_3}{dx_2^2}=\mathscr{F}_3,
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где g_1, g_2, g_3 — составляющие векторной функции $\mathbf{g}(k_1, x_2, k_3)$, которая является прообразом Фурье векторной функции $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$; $k^2=k_1^2+k_3^2$.

Общее решение системы (1) с учетом граничных условий при $x_2=\pm a$, определяющих коэффициенты в общем решении соответствующей однородной системы, находим, например, для составляющей g_3 в виде

$$g_3=\frac{\lambda k_3^2\mathcal{F}_3\Phi(k,x_2)}{\mu[\omega^2\rho-(2\mu+\lambda)k^2]}+\mathcal{F}_3\frac{\omega^2\rho-\mu k^2-(\mu+\lambda)k_1^2}{(\omega^2\rho-\mu k^2)[\omega^2\rho-(2\mu+\lambda)k^2]}, \tag{2}$$

где

$$\Phi(k,x_2)=\frac{2\alpha\beta\sin\alpha a\cos\beta x_2+(\beta^2-k^2)\sin\beta a\cos\alpha x_2}{4\alpha\beta k^2\cos\beta a\sin\alpha a+(\beta^2-k^2)^2\cos\alpha a\sin\beta a}.$$

В решении (2) обозначения α и β соответствуют корням ($i=1, 2, \ldots, 6$) характеристического уравнения системы (1)

$$\gamma_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{\frac{\omega^2}{c_S^2}-k^2}=\pm\beta,\quad \gamma_{5,6}=\pm\sqrt{\frac{\omega^2}{c_D^2}-k^2}=\pm\alpha, \tag{3}$$

где $c_S=\sqrt{\mu/\rho}$, $c_D=\sqrt{(2\mu+\lambda)/\rho}$ — скорости соответственно сдвиговых и продольных волн в безграничной среде.

Составляющие векторной функции $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$, например u_3, найдем, используя обратное преобразование Фурье. Соответствующий интеграл преобразуется поворотом системы координат относительно оси x_2 до совпадения по направлению радиус-вектора точки в плоскости $x_2=\text{const}$ с осью x_3 и заменой переменных $k_1=k\cos\varphi$, $k_3=k\sin\varphi$. После ряда преобразований и интегрирования по φ искомый интеграл представим в виде

$$u_3=-\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty\left\{\frac{\lambda k^3\mathcal{F}_3\pi\left[\mathcal{J}_0(rk)+\frac{x_1^2-x_3^2}{r^2}\mathcal{J}_2(rk)\right]}{\omega^2\rho-(2\mu+\lambda)k^2}\Phi(k,x_2)+\right. \tag{4}$$

$$\left.+\frac{\mathcal{F}_3k2\pi\mathcal{J}_0(rk)}{\omega^2\rho-(2\mu+\lambda)k^2}-\frac{\mathcal{F}_3(\mu+\lambda)k^3\pi\left[\mathcal{J}_0(rk)+\frac{x_3^2-x_1^2}{r^2}\mathcal{J}_2(rk)\right]}{[\omega^2\rho-(2\mu+\lambda)k^2](\omega^2\rho-\mu k^2)}\right\}dk,$$

где $\mathcal{J}_0(rk)$, $\mathcal{J}_2(rk)$ — по определению функции Бесселя соответственно нулевого и второго порядков.

В отличие от работы [1] искомый интеграл преобразован к виду, удобному для интегрирования, в результате чего удалось применить иной прием перехода к обратному преобразованию Фурье и, таким образом, избежать неточности, допущенной в работе [1] при интегрировании образа Фурье. Эта неточность, связанная с выбором контура интегрирования в комплексной плоскости, как следует из конечных результатов настоящей работы, не отразилась на полученном в работе [1] решении при положительных величинах координаты в направлении распространения.

Интеграл (4) относится к интегралам типа

$$\int_0^\infty kf(k^2)\mathcal{J}_{2m}(rk)\,dk=\int_0^{-\infty}kf(k^2)\mathcal{J}_{2m}(rk)\,dk= \tag{5}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^{-\infty}kf(k^2)\mathcal{J}_{2m-\varepsilon}(rk)\,dr,$$

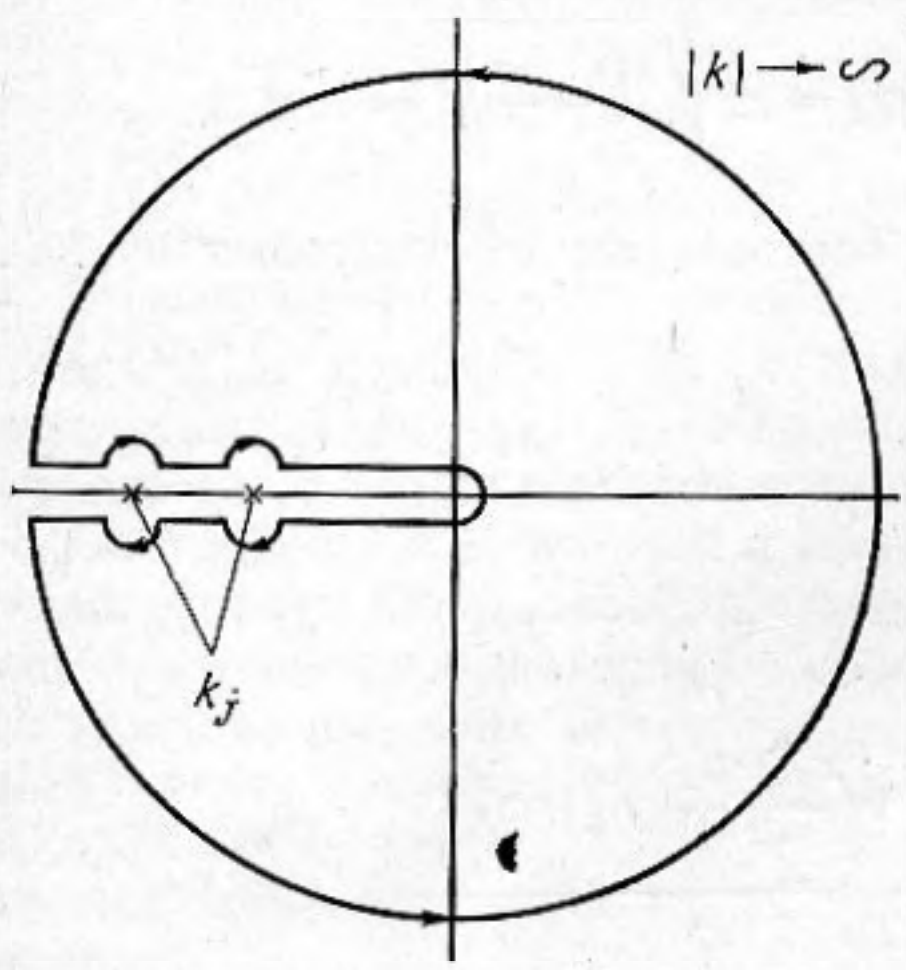
в которых подынтегральная функция $f(k^2)$ в комплексной плоскости имеет только простые полюса. Из формулы (4) следует, что помимо полюсов $k_t=\pm\omega\sqrt{\rho/\mu}$ и $k_l=\pm\omega\sqrt{\rho/(2\mu+\lambda)}$, комплексная плоскость содержит бесчисленное множество полюсов, определяемых дисперсионным уравнением для

продольных волн

$$D(k^2)=4\alpha\beta k^2 \operatorname{tg}\alpha a+(k^2-\beta^2)^2 \operatorname{tg}\beta a=0. \tag{6}$$

В работе [2] показано, что уравнение (6) совместно с условиями (3) определяет бесчисленное множество действительных, мнимых и комплексных корней, соответствующих семейству нормальных продольных волн.

Чтобы найти интеграл (5), сделаем разрез по отрицательной оси и обойдем этот разрез по замкнутому контуру (фигура). Простые полюса k_j на отрицательной оси обойдем по полуокружностям малого радиуса с центрами в полюсах k_j. При обходе начала координат по полуокружности малого радиуса аргумент k изменяется на $i\pi$. В этом случае значения функции Бесселя ниже и выше разреза связаны между собой соотношением [3]



Контур для интеграла (5)

$$\mathcal{J}_{2m-\varepsilon}(e^{i\pi}kr)=e^{i\pi(2m-\varepsilon)}\mathcal{J}_{2m-\varepsilon}(kr) \text{ при } \varepsilon\to 0. \tag{7}$$

При обходе разреза в противоположных направлениях пределы интегрирования также изменяются на противоположные, но в области полюсов направление обхода и, следовательно, знак интеграла изменится на противоположный. Из формулы (4) следует, что при $|k|\to\infty$ подынтегральная функция стремится к нулю быстрее, чем $1/k$. Поэтому интеграл по окружности с радиусом $|k|\to\infty$ также равен нулю. Интеграл по выбранному контуру равен сумме вычетов в полюсах всей комплексной плоскости за исключением полюсов на действительной оси отрицательных величин. Таким образом, с учетом соотношения (7) и направлений обхода контура интегрирования, получим

$$[1-e^{i\pi(2m-\varepsilon)}]\int_0^{-\infty} kf(k^2)\mathcal{J}_{2m-\varepsilon}(kr)\,dk-$$

$$-\sum_{j=1}^{p} i\pi[1+e^{i\pi(2m-\varepsilon)}]\operatorname{Res} k_j f(k_j^2)J_{2m-\varepsilon}(k_j r)=$$

$$=2\pi i\sum_{\nu=1}^{2n-p}\operatorname{Res} k_\nu f(k_\nu^2)\mathcal{J}_{2m-\varepsilon}(k_\nu r),$$

где $2n$ — число полюсов на комплексной плоскости, p — число полюсов на действительной оси отрицательных величин. При $\varepsilon\to 0$ получим

$$\int_0^{-\infty} kf(k^2)\mathcal{J}_{2m-\varepsilon}(kr)\,dk=$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2\pi\sum\limits_{j=1}^{n}\operatorname{Res} k_j f(k_j^2)\,[\cos\pi(2m-\varepsilon)J_{2m-\varepsilon}(k_j r)-\mathcal{J}_{2m-\varepsilon}(-k_j r)]}{\sin\pi(2m-\varepsilon)}=$$

$$=\pi\sum_{j=1}^{n}\lim_{j}(k^2-k_j^2)f(k_j^2)\,Y_{2m}(k_j r),$$

где $Y_{2m}(k_j r)$ — по определению функция Бесселя второго рода. Воспользуемся теперь известным равенством

$$Y_{2m}(k_j r)=\frac{H_{2m}^{(1)}(k_j r)-H_{2m}^{(2)}(k_j r)}{2i},$$

где $H_{2m}^{(1)}(k_j r)$ и $H_{2m}^{(2)}(k_j r)$ — первая и вторая функции Ханкеля. Поскольку $H_{2m}^{(1)}(k_j r)$ соответствует расходящимся волнам, а $H_{2m}^{(2)}(k_j r)$ — сходящимся, то, отбросив члены с $H_{2m}^{(2)}(k_j r)$, получим

$$\int_0^\infty kf(k^2)\mathcal{J}_{2m}(kr)\,dk=\frac{\pi}{2i}\sum_{j=1}^{n}\lim_{k\to k_j}[(k^2-k_j^2)f(k_j^2)]H_{2m}(k_j r), \tag{8}$$

где n — число полюсов в правой (или левой) комплексной полуплоскости.

Используя формулы (4), (8) и вводя обозначение $\Phi(k, x_2)=A(k^2, x_2)/D(k^2)$, найдем составляющую u_3 векторного поля смещений в следующем виде:

$$u_3=\frac{i\mathcal{F}_3}{8\mu}\left[H_0^{(1)}(k_t r)+\frac{x_3^2-x_1^2}{r^2}H_2^{(1)}(k_t r)\right]+$$

$$+\frac{i\lambda\mathcal{F}_3}{8\mu}\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j^2A(k_j^2, x_2)}{[\omega^2\rho-(2\mu+\lambda)k_j^2]D_{k^2}'(k_j^2)}\left[H_0^{(1)}(k_j r)-\frac{x_3^2-x_1^2}{r^2}H_2^{(1)}(k_j r)\right],$$

где $D_{k^2}'(k_j^2)$ — производная $D(k^2)$ по k^2 в точке $k=k_j$. Корень $k_t=\omega/c_s$ соответствует чисто сдвиговым волнам. Корни k_j соответствуют семейству нормальных продольных волн и определяются из уравнения (6).

Рассмотрим составляющую u_3 векторного поля смещений на оси x_1 при условии $k_t x_1$, $k_j x_1 \gg 1$. Учитывая соответствующие этому случаю приближенные равенства

$$H_0^{(1)}(kx_1)+H_2^{(1)}(kx_1)=\sqrt{2\pi(x_1k)^3}e^{i(kx_1-3/4\pi)},$$

$$H_0^{(1)}(kx_1)-H_2^{(1)}(kx_1)=\sqrt{2/\pi(kx_1)}\,e^{i(kx_1-1/4\pi)},$$

получим волны смещений с учетом зависимости от времени в виде

$$u=\frac{i\mathcal{F}_3\exp(ik_t x_1-i\frac{\pi}{4}-i\omega t)}{2\sqrt{2}\pi\mu\sqrt{k_t x_1}}+ \tag{9}$$

$$+\frac{i\lambda\mathcal{F}_3}{4\sqrt{2\pi}\mu}\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j^2A(k_j^2, x_2)\exp(ik_j x_1-i\frac{3}{4}\pi-i\omega t)}{\sqrt{(k_j x_1)^3}[\omega^2\rho-(2\mu+\lambda)k_j^2]D_{k^2}'(k_j^2)}$$

Из формулы (9) следует, что в твердом волноводе на расстоянии r от источника до точки наблюдения в дальней зоне на оси x_1 амплитуда перемещений, перпендикулярных направлению распространения волны вдоль оси x_1, убывает пропорционально $\sqrt{r}$ для чисто сдвиговой волны и пропорционально $\sqrt{r^3}$ для семейства нормальных продольных волн.

В частном случае относительно тонкой пластины (в пределе бесконечно тонкой), которая характеризуется неравенством $a/\lambda_{Tj}\ll 1$, где λ_{Tj} — длина j-й волны в тонкой пластине, получим

$$\Phi(k, x_2)=\frac{-\lambda}{k_t^2(2\mu+\lambda)-4(\mu+\lambda)k^2}$$

т. е. семейство нормальных продольных волн вырождается в одну волну, для которой $k_\tau^2 = k_t^2 \frac{2\mu+\lambda}{4(\mu+\lambda)}$, где k_τ — совпадает с волновым числом продольной волны в бесконечно тонкой пластине [4]. При $a \to 0$ в пределе получим

$$u_3 = \frac{i\mathcal{F}_3(\lambda+2\mu)}{32\mu(\mu+\lambda)}\left[H_0^{(1)}(k_\tau r) - \frac{x_3^2 - x_1^2}{r^2} H_2^{(1)}(k_\tau r)\right] +$$

$$+ \frac{i\mathcal{F}_3}{8\mu}\left[H_0^{(1)}(k_t r) + \frac{x_3^2 - x_1^2}{r^2} H_2^{(1)}(k_t r)\right],$$

отсюда следует, что в относительно тонком волноводе распространяется одна чисто сдвиговая волна и одна продольная недисперсионная волна с волновым числом k_τ.

Полученные результаты дают возможность производить расчеты полей перемещений и напряжений в твердых волноводах при ограниченных размерах плоского источника объемных волн, возбуждающего упругие деформации сдвига. Твердый волновод может быть реализован в виде пластины с акустически поглощающими покрытиями на узких гранях [2]. Если отражение волн на границе пластины с поглощающим покрытием отсутствует, то результаты данной работы распространяются на линии задержки волноводного типа, в которых обеспечиваются такие условия. В частности, в ленточных линиях задержки на сдвиговых колебаниях энергия сдвиговой волны нулевой моды убывает в дальней зоне пропорционально расстоянию от источника, а отношения уровней ложных сигналов, связанных с распространением семейства нормальных продольных волн, к уровню основного сигнала — пропорционально квадрату расстояния от источника.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вовк А. Е., Тютекин В. В.* Возбуждение нормальных волн в плоском упругом волноводе силами, заданными в его поперечном сечении. Тр. Акуст. ин-та, 1969, 9, 5—26.
2. Физическая акустика, под ред. У. Мэзона, т. I, ч. А, М., «Мир», 1966.
3. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М., «Наука», 1965.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория упругости. М., «Наука», 1965.

Ленинградский электротехнический институт связи им. М. А. Бонч-Бруевича

Поступила 25 октября 1976 г.
После окончательной доработки 18 ноября 1977 г.