АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXIV 1978 Вып. 3

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534.213

УСЛОВИЯ БЕЗДИСПЕРСИОННОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ В ТВЕРДОМ ВОЛНОВОДЕ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Ю. Ф. Болтов, И. И. Григорьев

Свойства твердого волновода с прямоугольным сечением и свободными границами исследованы лишь для ряда частных случаев (например, в работе [1]), причем выявилась сложная природа волновых процессов и их дисперсионный характер. Для решения прикладных задач, например конструирования бездисперсионных ультразвуковых линий задержки волноводного типа, можно определить различные сочетания граничных условий на поверхностях прямоугольного волновода, которые обеспечивают распространение в таком твердом волноводе незатухающих волн без дисперсии.

Решение задачи основано на использовании тензора Грина для безграничной твердой среды. Поле точечного источника в такой среде определено в работе [2] при ориентации внешней силы вдоль одной из осей. Применяя вращение координат, можно обобщить результат, полученный в работе [2], на случай произвольной ориентации внешней гармонической силы. Это позволяет выразить тензор Грина для безграничной среды в следующем виде:

$$G_{nm}=\frac{1}{4\pi\omega^2\rho}\frac{\partial}{\partial x_m\,\partial x_n}\left(\frac{e^{ik_t x}-e^{ik_l x}}{x}\right)+\frac{1}{4\pi\mu}\delta_{nm}\frac{e^{ik_t x}}{x}, \tag{1}$$

где G_{nm} – тензор Грина для неограниченной среды; m, $n=1, 2, 3$; ω – циклическая частота колебаний источника; ρ – плотность;

$$k_t=\omega\sqrt{\rho/\mu},\qquad k_l=\omega\sqrt{\rho/2\mu+\lambda};$$

μ и λ – коэффициенты Ламэ; δ_{nm} – символ Кронекера;

$$x=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2};$$

x_1, x_2, x_3 – текущие координаты.

Поместив в полупространство $x_3>0$ сосредоточенную в точке $(0, \eta, \xi)$ гармоническую силу * $\mathbf{a}\delta(x_1)\delta(x_2-\eta)\delta(x_3-\xi)$, найдем граничные условия на плоскости $x_3=0$, при которых равны модули волновых векторов падающих и отраженных волн. Это требование выполняется, если поле в полупространстве $x_3>0$ представить суммой полей, образуемых точечным источником $\mathbf{a}\delta(x_1)\delta(x_2-\eta)\delta(x_3-\xi)$ и введенным в полупространство $x_3<0$ фиктивным точечным источником $\mathbf{b}\delta(x_1)\delta(x_2-\eta)\delta(x_3+\xi)$. Принятое ограничение на условия отражения волн от границы $x_3=0$ соответствует равенству $|a_n|=|b_n|$, где a_n и b_n – компоненты векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Равенство $|a_n|=|b_n|$ допускает восемь вариантов ориентации вектора $\mathbf{b}$ по отношению к вектору $\mathbf{a}$, отличающихся между собой поляризацией по крайней мере одной пары одноименных составляющих векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Компоненты суммарного векторного поля смещений можно выразить, используя формулу (1), в виде $u_m=u_m'+u_m''$, где $u_m'=a_nG_{mn}\times\times(x_1, x_2-\eta, x_3-\xi)$, $u_m''=b_nG_{mn}(x_1, x_2-\eta, x_3+\xi)$. Из вида тензора G_{mn} следует, что u_3' и u_3'' являются четными, а $u_{1,2}'$ и $u_{1,2}''$ – нечетными функциями соответственно переменных $x_3-\xi$ и $x_3+\xi$. Это обстоятельство позволяет упростить вид граничных условий на плоскости $x_3=0$, определяемых вариантами ориентации вектора $\mathbf{b}$ по отношению к вектору $\mathbf{a}$. В качестве примера рассмотрим два варианта граничных условий. При $a_1=-b_1$, $a_2=-b_2$, $a_3=b_3$ получим

$$u_m=\sigma_{ii}=0,\qquad m\neq i; \tag{2}$$

* Множитель $e^{i\omega t}$ здесь и далее опускается.

при $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, $a_3=-b_3$ получим

$$u_i=\sigma_{im}=0, \qquad m\neq i, \tag{3}$$

где u_i, u_m – компоненты вектора смещения, σ_{ii}, σ_{im} – компоненты тензора напряжения.

Граничные условия типа (2) рассмотрены в работах [3, 4] при исследовании колебаний в твердых телах с прямоугольным сечением. Решение уравнений Ламе, полученное в работах [3, 4] путем разделения переменных, указывает на существование лишь затухающих волн в направлении нормали к плоскости сечения этих тел при условиях типа (2) на их граничных поверхностях.

В настоящей работе решается задача анализа класса граничных условий, которые при различных сочетаниях могут привести к существованию как затухающих, так и незатухающих бездисперсионных волн в твердых волноводах. Использование тензора Грина для аналитического представления суммарных акустических полей действительного и фиктивных источников в условиях принятого ограничения позволяет единообразно решать эту задачу, не прибегая к разделению переменных в уравнении Ламе.

В упругой полосе, ограниченной плоскостями $x_3=\pm c$, поле точечного источника с координатами $(0, \eta, \xi)$ при условиях типа (2) и (3) представляется в виде суммы полей бесконечного счетного числа источников, расположенных на оси $x_2=\eta$, $x_1=0$:

$$u_{m_1}=\sum_{p=-\infty}^{\infty}(-1)^j a_n G_{nm}[x_1, x_2-\eta, x_3-(1)^p\xi+2cp],$$

где индекс j указывает на ориентацию компонент фиктивных источников $b_n=(-1)^j a_n$, находящихся вне полосы $-c<x_3<c$.

Выполнение условий (2) при $x_3=\pm c$ соответствует $j=0$ при $n=3$ и $j=p$ при $n\neq 3$. Аналогично условия (3) выполняются при $x_3=\pm c$, если $j=p$ при $n=3$ и $j=0$ при $n\neq 3$.

В твердом волноводе с граничными поверхностями $x_3=\pm c$, $x_2=\pm b$, на которых выполняются условия типа (2) или (3), поле точечного источника $a\delta(x_1)\delta(x_2-\eta)\times\times\delta(x_3-\xi)$ представляется двойным рядом

$$u_{m_2}=\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}(-1)^{j+\alpha} a_n G_{mn}[x_1, x_2+2bq-(1)^q\eta, x_3+2cp-(-1)^p\xi]. \tag{4}$$

Смешанные граничные условия соответствуют формуле (3) при $x_2=\pm b$ и формуле (2) при $x_3=\pm c$. В этом случае $\alpha=q$ при $n=2$, $\alpha=0$ при $n\neq 2$; $j=p$ при $n\neq 3$, $j=0$ при $n=3$. Условия (2) выполняются на всех граничных поверхностях при следующих значениях индексов: $\alpha=q$ при $n\neq 2$, $\alpha=0$ при $n=2$; $j=p$ при $n\neq 3$, $j=0$ при $n=3$. Аналогично условия (3) на всех граничных поверхностях соответствуют $\alpha=q$ при $n=2$, $\alpha=0$ при $n\neq 2$; $j=p$ при $n=3$, $j=0$ при $n\neq 3$. Из формулы (4) следует, что компоненты вектора смещения выражаются либо знакопостоянным рядом при $j=\alpha=0$, либо знакопеременным рядом при j, $\alpha\neq 0$. При исследовании твердого волновода наибольший интерес представляют волны, определяемые знакопостоянными рядами.

Для решения вопроса о выполнении граничных условий на стыках граничных поверхностей достаточно сгруппировать члены двойного ряда таким образом, чтобы каждая группа соответствовала паре источников, симметрично расположенных относительно граничной плоскости. Очевидно, сумма полей таких источников на этой плоскости удовлетворяет граничным условиям. На стыке двух плоскостей граничные условия определяются суммой полей четырех источников, попарно симметричных относительно пересекающихся плоскостей. Суммирование полей групп из четырех источников доказывает выполнимость граничных условий на ребрах углов твердого волновода и отсутствие особенностей решения в окрестностях углов в принятых условиях отражения волн на границах.

Рассмотрим частный случай, когда внешняя возбуждающая сила равномерно распределена в нормальном сечении твердого волновода. Вводя замены переменных $\eta'=2bq-\eta$, $\xi'=2cp-\xi$, получим для компонент u_m следующее выражение:

$$u_m=\frac{a_n}{S_0}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}(-1)^{j+\alpha}\int_{(2p-1)b}^{(2p+1)b}d\xi'\int_{(2q-1)c}^{(2q+1)c}G(x_1, x_2-\eta', x_3-\xi')\,d\eta', \tag{5}$$

где S_0 – единица площади.

Как следует из формулы (4), знакопостоянные ряды при заданном распределении внешней силы имеют место в двух случаях: 1) $a_1=a_2=0$, $a_3\neq 0$ и условия (3) выполняются при $x_2=\pm b$, условия (2) выполняются при $x_3=\pm c$; 2) $a_2=a_3=0$, $a_1\neq 0$ и условия (3) выполняются при $x_2=\pm b$; $x_3=\pm c$. Интегрируя выражение (5) в двух указанных вариантах, получим с учетом множителя $e^{i\omega t}$ незатухающие волны

в виде

$$u_1=u_2=0, \qquad u_3=\frac{a_3}{\mu k_t S_0}e^{i(k_t x_1-\omega t)}, \tag{6}$$

$$u_2=u_3=0, \qquad u_1=\frac{a_1}{(2\mu+\lambda)k_l S_0}e^{i(k_l x_1-\omega t)}. \tag{7}$$

Полученные результаты определяют плоскую сдвиговую волну (6) и волну сжатия (7), которые без дисперсии распространяются в твердом волноводе соответственно со скоростями поперечных и продольных волн для неограниченного пространства. Использование рассмотренного частного случая, например в ультразвуковых линиях задержки, позволяет полностью перенести результаты анализа их характеристик при одномерном описании волновых процессов [5] на линии задержки волноводного типа, характеризуемые условиями решения данной задачи. Реализация граничных условий типа (2) достигается при помощи жестких в продольном направлении идеально гибких пластинок [6], которые «приклеиваются» к двум противоположным граням звукопровода. Условия (3) обеспечиваются, если две другие грани звукопровода граничат с абсолютно жестким телом при наличии «смазки» [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Физическая акустика, под редакцией У. Мэзона, т. 1, ч. А, М., «Мир», 1966.
2. *Рэлей*. Теория звука. т. II. М., Гостехиздат, 1955.
3. *Srinivas S., Joga C. V., Rao A. K.* An exact analisis for vibration of simply-supported homogeneous and laminated thick rectongular plates. J. Sound Vib., 1970, *12*, 2, 187–199.
4. *Цай И. П.* Об упругих волнах в полубесконечном параллелепипеде. Труды семинара кафедры теоретической механики и высшей математики, вып. 3, Джамбульский технологический ин-т легкой и пищевой промышленности, 1973, 155–163.
5. *Портной М. С., Ханович И. Г.* О коэффициенте передачи электромеханической линии задержки. Электросвязь, 1970, 3, 54–57.
6. *Исакович М. А.* Общая акустика. М., «Наука», 1973.

Ленинградский электротехнический институт связи им. М. А. Бонч-Бруевича

Поступила 25 октября 1976 г.
После вторичной доработки 18 ноября 1977 г.

УДК 534.26

НИЗКОЧАСТОТНОЕ РАССЕЯНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ЭЛЛИПСОИДЕ, ОТЛИЧАЮЩЕМСЯ ОТ СРЕДЫ ТОЛЬКО СЖИМАЕМОСТЬЮ

А. Г. Виноградов, Р. З. Муратов

В работе [1] была выведена система интегральных уравнений акустики неоднородной идеальной жидкости и показана эффективность ее использования в низкочастотных дифракционных задачах. В частности, рассеяние низкочастотной плоской гармонической волны на однородном акустически прозрачном эллипсоиде рассмотрено в работе [2], где найдены первые три члена разложения для звукового поля внутри эллипсоида и для рассеянной волны в дальней зоне. Нахождение последующих приближений затруднено быстро растущей громоздкостью вычислений.

Между тем интерес к получению все большего числа членов в низкочастотном разложении амплитуды рассеяния связывается в теории дифракции (см., например, [3]) с возможностью распространения ее результатов на препятствия, сравнимые с длиной волны. Любопытно, что акустика дает пример задачи, в которой большая часть вычислительных трудностей снимается. Речь идет о рассеянии звука на однородном препятствии, отличающемся от окружающей его однородной среды только сжимаемостью. Система интегральных уравнений акустики (для давления p и скорости $\mathbf{v}$) сводится в этом случае к одному уравнению

$$p(\mathbf{r})=p_0(\mathbf{r})-k^2\frac{O}{4\pi}\int\limits_V \frac{e^{ikR}}{R}p(\mathbf{r}')\,dV'. \tag{1}$$

Здесь зависимость от времени выбрана в виде $e^{-i\omega t}$, $p_0(\mathbf{r})$ – давление в падающей волне, k – волновое число, V – объем препятствия, $R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$, а отношение сжимаемости препятствия к сжимаемости среды есть $1-Q$.