УДК 534.26

О ГАШЕНИИ КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ БЕСКОНЕЧНЫХ ОБОЛОЧЕК АКТИВНЫМ МЕТОДОМ

В. Ю. Приходько, М. В. Федорюк

В статье [1] на основании третьей формулы Бетти для системы уравнений Ламе и эластопотенциалов получено теоретическое решение задач активного гашения волновых полей в твердых средах при помощи непрерывно распределенных на замкнутых поверхностях точечных приемников и излучателей.

Для описания волновых процессов в некоторых твердых структурах вместо точных уравнений Ламе используются приближенные уравнения. К таким структурам, в частности, относятся тонкие стержни, пластины и оболочки. Теоретическое решение задач активного гашения колебаний твердых структур, описываемых приближенными уравнениями, может быть получено методом, изложенным в статьях [1, 2], на основании принципа взаимности в акустике [3]. Ниже будет рассмотрена задача об активном гашении заданного числа нормальных волн изгибного и продольного типов в упругой цилиндрической оболочке.

В цилиндрической системе координат (z, φ, r), где ось z направлена по оси оболочки, вектор упругих смещений $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3)$ оболочки удовлетворяет уравнениям движения Тимошенко [4]. Предположим, что оболочка возбуждается источниками, описываемыми вектор-функцией $\mathbf{F}$, причем $\mathbf{F}=\mathbf{F}^++\mathbf{F}^-$, $\mathbf{F}^+\equiv 0$, $z<z^+$, $z^+>0$, $\mathbf{F}^-\equiv 0$, $z>z^-$, $z^-<0$.

Пусть требуется погасить первые N нормальных волн поля $\mathbf{u}^-$, создаваемого источниками $\mathbf{F}^-$, в области $z>b$, $0<b<z^+$. Для создания необходимого компенсирующего поля $\mathbf{u}^*$ расположим на поверхности оболочки в точках (z_s, φ_s, a), $0\leqslant z_s\leqslant b$, $0\leqslant\varphi_s\leqslant 2\pi$, $2N$ нормальные к поверхности оболочки точечные силы с амплитудами F_s, $s=1, 2, \ldots, 2N$. Поле смещений, создаваемое такой системой излучателей, можно представить в виде [5]

$$\mathbf{u}^* = \sum_{s=1}^{2N}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k_{mn}\in\sigma^+}\frac{F_s\mathbf{U}_{mn}}{\rho c_p^2 h\Delta'(k_{mn})}\exp[im(\varphi-\varphi_s)+ik_{mn}|z-z_s|], \tag{1}$$

где

$$U_{1mn}=\alpha\left(\nu\Delta_{22}+\frac{1+\nu}{2}m^2\right)\operatorname{sign}(z-z_s),$$

$$U_{2mn}=\alpha^2 m\nu\frac{1+\nu}{2}+m\Delta_{11},\qquad U_{3mn}=i\left(\Delta_{11}\Delta_{22}-\alpha^2m^2\frac{(1+\nu)^2}{4}\right),$$

$$\Delta_{11}=\alpha_p{}^2-\alpha^2-\frac{1-\nu}{2}m^2,\qquad \alpha=ka,\qquad \Delta_{12}=\Delta_{21}=-\frac{1+\nu}{2}\alpha m,$$

$$\Delta_{13}=\Delta_{31}=i\nu\alpha,\qquad \Delta_{22}=\alpha_p{}^2-\frac{1-\nu}{2}\alpha^2-m^2,$$

$$\Delta_{32}=\Delta_{23}=im,\qquad \Delta_{33}=1-\alpha_p{}^2+\frac{h^2}{12a^2}(\alpha^2+m^2)^2,$$

$\Delta(k)=\det\|\Delta_{ik}\|=0$ — дисперсионное уравнение, корни которого определяют спектр возможных нормальных волн в оболочках [5], σ^+ — множество всех k_{mn}, таких, что при введении затухания в среде $\operatorname{Im}k_{mn}>0$, a — радиус оболочки, ν — коэффициент Пуассона, h — толщина стенок оболочки, ρ — плотность, c_p — скорость продольных волн в пластине из материала оболочки $\mathbf{U}_{mn}=(U_{1mn}, U_{2mn}, U_{3mn})$.

Поля $\mathbf{u}^\pm$ также представим в виде суммы нормальных волн

$$\mathbf{u}^\pm=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k_{mn}\in\sigma^+}\mathbf{A}^\pm_{mn}\exp(im\varphi\mp ik_{mn}z),\qquad \begin{cases} z<z^+;\\ z>z^-,\end{cases} \tag{2}$$

где $\quad A^\pm_{1mn}=U_{1mn}U^{-1}_{3mn}A^\pm_{mn},\quad A^\pm_{2mn}=U_{2mn}U^{-1}_{3mn}A^\pm_{mn},\quad A_{3mn}=A^\pm_{mn}.$

Условие гашения первых N нормальных волн поля u^- в области $z>b$ позволяет из формул (1), (2) получить N алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитуд F_s

(3) $$\sum_{s=1}^{2N} F_s \exp[-im\varphi_s-ik_{mn}z_s]+\Delta'(k_{mn})\,U_{3mn}^{-1}\rho c_p{}^2 hA_{mn}=0.$$

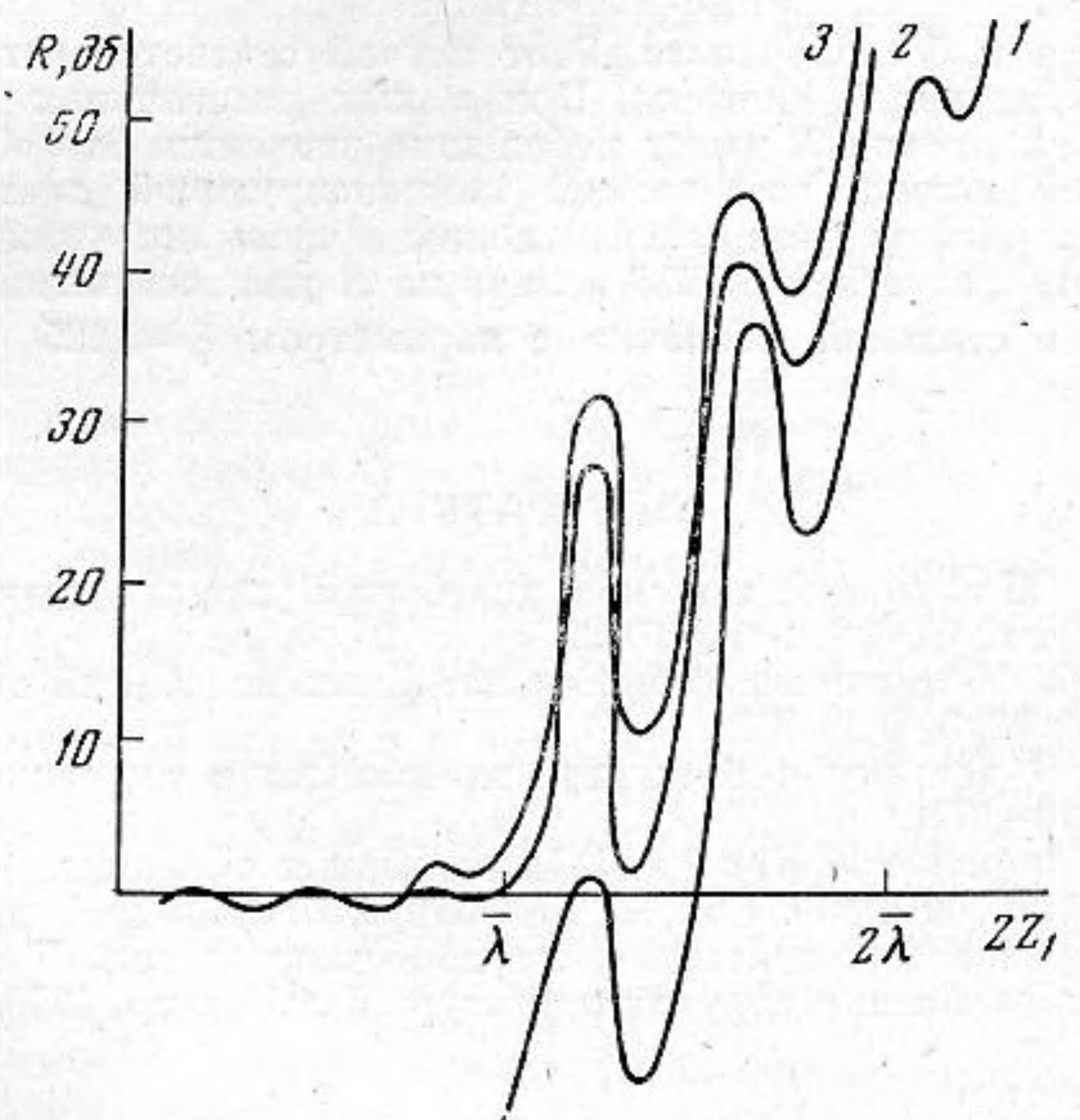
Амплитуды F_s можно выбрать так, чтобы в поле u^* при $z<0$ отсутствовали первые N нормальных волн

(4) $$\sum_{s=1}^{2N} F_s \exp[-im\varphi_s+ik_{mn}z_s]=0.$$

Для определения неизвестных $\overset{\pm}{A}_{mn}$ поместим на поверхности оболочки в точках $(\tilde z_s, \tilde\varphi_s, a)$, $0>\tilde z_s>\tilde z^-$, $2N$ приемников, измеряющих нормальные смещения оболочки u_3

(5) $$u_3(\tilde z_s, \tilde\varphi_s)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k_{mn}\in\sigma^+}[\overset{+}{A}_{mn}e^{ik_{mn}\tilde z_s}+\overset{-}{A}_{mn}e^{-ik_{mn}\tilde z_s}]\,e^{im\tilde\varphi_s}.$$

Так как в оболочке существует лишь конечное число N_0 распространяющихся нормальных волн, то при $N\geqslant N_0$ уравнения (5) могут быть сколь угодно точными при достаточном удалении, порядка радиуса оболочки, от источников волновых



Зависимость эффективности гашения R осесимметричной волны от расстояния $2z_1$ между приемником и излучателем. Кривые соответствуют: *1* – $b=0{,}11\ \bar\lambda$; *2* – $b=0{,}6\ \bar\lambda$; *3* – $b=1{,}8\ \bar\lambda$

полей. Отметим, что условия (4) практически обеспечивают устранение влияния излучения компенсирующей системы на показания приемников. Координаты расположения приемников и компенсирующих излучателей должны выбираться так, чтобы определители системы уравнений (3)—(5) были отличны от нуля. Поэтому нельзя располагать все приемники и излучатели, например, на узловых линиях распространяющейся нормальной волны. Таким образом, величины F_s, $A_{mn}{}^{\pm}$ могут быть определены однозначно из системы уравнений (3)—(5) по правилу Крамера.

Приведем выражение для амплитуд F_s и величины виброизоляции R в случае гашения осесимметричной волны $\mathbf{u}^-=(i\nu\alpha_p(\alpha_0{}^2-\alpha_p{}^2)^{-1}A,\ 0,\ A)\,e^{ik_0z}$, возбуждаемой источниками, находящимися в области $z<z^-$, $z^-<0$. Решая систему уравнений (3)—(5) при $m=0$, $s=1, 2$, находим F_s

$$F_1=\gamma_0 W \exp(ik_0(z_1+z_2)), \quad F_2=-\gamma_0 W \exp(2ik_0 z_1), \tag{6}$$

где W — показания приемника, находящегося на сечении оболочки

$$z=-z_1, \quad z_1>0; \quad \gamma_0=\rho c_p{}^2 h \frac{\Delta_0'(k_0)}{2\sin k_0 b}; \quad b=z_2-z_1;$$

$$R=10\lg\left|\frac{1+T}{T}\right|^2, \tag{7}$$

где

$$T=\frac{\exp(ik_0z_1)\Delta_0'(k_0)}{2\sin k_0 b}\left[e^{ik_0z_2}\left(\frac{e^{2ik_1z_1}}{\Delta_0'(k_1)}+\frac{e^{2ik_2z_1}}{\Delta_0'(k_2)}\right)+\right.$$

$$\left.+e^{ik_0z_1}\left(\frac{e^{ik_1(z_1+z_2)}}{\Delta'(k_1)}+\frac{e^{ik_2(z_1+z_2)}}{\Delta'(k_2)}\right)\right],$$

k_0, k_1 и k_2 — корни уравнения $\Delta_0(k)=a^2(k_p{}^2-k^2)\left(1-k_p{}^2a^2+\frac{\beta^2}{12}k^4a^4\right)+$ $+(\nu ka)^2=0$, $\beta=h/a$, соответствующие распространяющейся и двум неоднородным волнам ($\operatorname{Im} k_{1,2}>0$) соответственно. Из формулы (7) следует, что при фиксированных расстояниях b, не равных целому числу полуволн, R стремится к бесконечности с возрастанием расстояния между приемной и компенсирующей системами. Если $b=n\frac{\lambda_0}{2}$, то, как следует из формулы (6), амплитуды компенсирующих сил должны стремиться к бесконечности. Этот случай соответствует резонансному возбуждению компенсирующей системы. При малых расстояниях между приемной и компенсирующей системами R имеет небольшие значения. Это объясняется тем, что амплитуда стоячей волны, создаваемой компенсирующей системой, существенно больше амплитуды распространяющейся волны вблизи источников. На фигуре приведены результаты расчета на ЭВМ величины R для осесимметричной волны на частоте $f=1$ *кгц* в стальной оболочке с параметром $\beta=0{,}125$ (λ – длина стоячей волны).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Федорюк М. В.* Об активном гашении колебаний упругих сред. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1976, 4, 1065–1068.
2. *Приходько В. Ю.* Об активном гашении изгибных колебаний стержней и пластин. Акуст. ж., 1976, *22*, 3, 462–464.
3. *Лямшев Л. М.* К вопросу о принципе взаимности в акустике. Докл. АН СССР, 1959, *125*, 6, 1019–1021.
4. *Тимошенко С., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1963.
5. *Тартаковский Б. Д., Михайлов Р. Н.* Колебания бесконечной цилиндрической тонкостенной оболочки под действием сосредоточенных сил. В сб.: Колебания, излучение и демпфирование упругих структур. М., «Наука», 1973.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
31 января 1977 г.
После повторного исправления
13 января 1978 г.