АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXV 1979 Вып. 1

УДК 534.83

АКТИВНОЕ ГАШЕНИЕ ЗВУКА НЕПРЕРЫВНЫМИ РЕШЕТКАМИ ИЗ МОНОПОЛЕЙ

М. В. Федорюк

Рассмотрена задача об активном гашении звука с помощью двух приемных и двух излучающих поверхностей, непрерывно заполненных точечными монопольными приемниками и излучателями соответственно. Установлено наличие резонансов этой системы и найдены приближенные формулы для первой критической длины волны в случае близких поверхностей.

В работах [1—3] разработана теория автономных систем активного гашения звука с помощью излучающих и приемных решеток. Эти схемы используют монопольные и дипольные излучатели и приемники. В настоящей работе предложен и проанализирован метод активного гашения звука, использующий только монопольные излучатели и приемники.

Рассмотрим пространство, заполненное жидкой или газообразной средой с постоянными плотностью и скоростью звука. Пусть S_1, S_2 — гладкие замкнутые поверхности, S_1 лежит внутри S_2, звуковое поле p^+ создано источниками, расположенными вне S_2, поле p^- источниками, расположенными внутри S_1. Задача стационарная, частота ω фиксирована. Требуется с помощью непрерывно расположенных на поверхностях S_1 и S_2 монопольных точечных излучателей создать компенсирующее поле $\tilde{p}(x)$, равное

$$\tilde{p}(x)=\begin{cases}-p^-(x) & \text{вне } S_2,\\ -p^+(x) & \text{внутри } S_1.\end{cases} \tag{1}$$

Поле $\tilde{p}(x)$ компенсирует поля p^+, p^- внутри S_1 и вне S_2 соответственно. Излучатели предполагаются акустически прозрачными.

В работах [1—3] аналогичная задача решена в том случае, когда поверхности S_1 и S_2 совпадают и на этой поверхности непрерывно расположены монопольные и дипольные точечные излучатели. Однако в реальном физическом эксперименте представляется более удобным использовать две излучающие поверхности, состоящие из монополей; такие эксперименты поставлены в волноводах [4, 5].

Поля p_j, создаваемые поверхностями S_j, имеют вид

$$p_j(x)=\int\limits_{S_j} m_j(y)\,G_0(x,y)\,dS_y,\quad j=1,2. \tag{2}$$

Здесь $G_0=(-1/4\pi r)e^{ikr}$, $r=|x-y|$ и $m_j(y)$ — неизвестные плотности излучателей. Пусть $\mathscr{D}$ — область, заключенная между поверхностями S_1 и S_2 (слой). Компенсирующее поле равно $\tilde{p}(x)=p_1(x)+p_2(x)$ и удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца всюду в пространстве, кроме поверхностей S_j. Положим $\tilde{p}(x)=u(x)$ при $x\in\mathscr{D}$, тогда

$$(\Delta+k^2)\,u(x)=0,\ x\in\mathscr{D}, \tag{3}$$

а на границе слоя из условия (1) и из непрерывности волновых потенциалов простого слоя [6] вытекает, что выполняются условия Дирихле:

$$(4) \qquad u(x)=-p^+(x),\ x\in S_2;\ u(x)=-p^-(x),\ x\in S_1.$$

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$(5) \qquad (\Delta+k^2)\,v(x)=0,\ x\in\mathscr{D};\ v|_{S_1}=v|_{S_2}=0.$$

Спектр этой задачи чисто дискретен и состоит из бесконечного множества собственных значений $0<k_1^2\leqslant k_2^2<\ldots$ Собственные функции $v_s(x)$ выберем так, чтобы они были вещественными и образовывали ортонормированный базис в пространстве $L_2(\mathscr{D})$.

1. Частота ω — некритическая, т. е. $k\neq k_s$ ни при каком s. Тогда решение задачи Дирихле (3), (4) единственно и дается формулой

$$(6) \qquad u(x)=\int\limits_S u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}G(x,y;k)\,dS_y,\quad S=S_1-S_2$$

при $x\in\mathscr{D}$, где G — функция Грина задачи Дирихле для слоя $\mathscr{D}$, нормали к поверхностям S_j направлены во внешность. Из известных формул для скачка нормальной производной потенциала простого слоя [6] и из формулы (1) находим искомые значения m_j:

$$(7) \qquad m_1(x)=(\partial/\partial n)\,(u(x)+p^-(x)),\ m_2(x)=-(\partial/\partial n)\,(u(x)+p^+(x)).$$

Формулы (7) были получены в предположении, что поле $\tilde p(x)$ имеет вид (1); необходимо проверить, что построенное по определенным в формуле (7) плотностям действительно имеет вид (1). Пусть $x\in\mathscr{D}_2$, где $\mathscr{D}_2$ — внешность поверхности S_2, тогда оба поля $\tilde p(x)$, $-p^-(x)$ удовлетворяют в $\mathscr{D}_2$ однородному уравнению Гельмгольца, одному и тому же краевому условию при $x\in S_2$ и условию излучения Зоммерфельда на бесконечности. По теореме единственности $\tilde p(x)\equiv-p^-(x)$ в $\mathscr{D}_2$. В области $\mathscr{D}_1$ (внутри S_1) поля $\tilde p(x)$, $-p^+(x)$ удовлетворяют однородному уравнению Гельмгольца и совпадают при $x\in S_1$. Если k не принадлежит спектру задачи Дирихле

$$(\Delta+k^2)\,w(x)=0,\ x\in\mathscr{D}_1;\ w|_{S_1}=0,$$

то $\tilde p(x)\equiv-p^+(x)$ при $x\in\mathscr{D}_1$ по теореме единственности. Пусть k_0 — точка спектра, $w_0(x)$ — собственная функция; ограничимся случаем простого собственного значения. Необходимое и достаточное условие однозначной разрешимости задачи Дирихле

$$(\Delta+k_0^2)\,w(x)=0,\ x\in\mathscr{D}_1;\ w(x)=-p^+(x),\ x\in S_1$$

имеет вид [6]

$$\int\limits_{S_1} p^+(x)\frac{\partial w_0(x)}{\partial n}\,dS=0.$$

Так как функции $-p^+(x)$, $w_0(x)$ удовлетворяют одному и тому же уравнению Гельмгольца в $\mathscr{D}_1$ и $w_0\equiv0$ на границе этой области, то это условие выполняется и $\tilde p(x)\equiv-p^+(x)$ при $x\in\mathscr{D}_1$.

Искомые плотности m_j находятся по следующей схеме:

$$\{\text{РЗ}(3),\ (4)\}\to\{\partial u/\partial n,\ x\in S\}\to\{m_1,\ m_2\}$$

(РЗ — решение задачи). В отличие от монопольно-дипольного варианта [1—3] при построении поверхности Гюйгенса только с помощью монополей приходится решать задачу Дирихле для слоя $\mathscr{D}$. Кроме того, как будет показано ниже, система имеет резонансные частоты.

2. Частота ω — критическая, т. е. $k=k_{s_0}$. В этом случае задача Дирихле (3), (4) может не быть разрешимой. Для краткости ограничимся случаем, когда k_{s_0} — простое собственное значение. Необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (3), (4) имеет вид [6]

$$A_{s_0}\equiv\int\limits_{S_1} p^-(x)\frac{\partial v_{s_0}(x)}{\partial n}dS-\int\limits_{S_2} p^+(x)\frac{\partial v_{s_0}(x)}{\partial n}dS=0 \tag{8}$$

и не обязано выполняться для заданных полей $p^{\pm}$. Пусть это условие не выполнено, k близко к k_{s_0}, $k\neq k_{s_0}$, тогда функция Грина G представима в виде

$$G(x,y;k)=\frac{v_{s_0}(x)v_{s_0}(y)}{k^2-k_{s_0}^2}+g_{s_0}(x,y;k),$$

где g_{s_0} — гладкая по совокупности переменных функция при $x\in\overline{\mathscr{D}}$, $y\in\overline{\mathscr{D}}$, $k\approx k_{s_0}$ $(x\neq y)$. Из (7) находим при $x\in S_1$

$$m_1(x)=-\frac{A_{s_0}}{k^2-k_{s_0}^2}\frac{\partial v_{s_0}(x)}{\partial n}+\varphi(x,k), \tag{9}$$

где φ — гладкая функция при $x\in\overline{\mathscr{D}}$, $k\approx k_{s_0}$. Следовательно, если $x^0\in S_1$ и $\partial v_{s_0}/\partial n\neq 0$ в этой точке, то плотность $m_1(x^0,k)\to\infty$ при $k\to k_{s_0}$; то же самое верно и для плотности m_2. Так как $v_{s_0}\equiv 0$ при $x\in S$, то $\partial v_{s_0}/\partial n\not\equiv 0$ при $x\in S$ (в противном случае $v_{s_0}\equiv 0$ в слое $\mathscr{D}$), и потому на границе слоя $\mathscr{D}$ обязательно найдутся точки, в которых плотности m_j стремятся к бесконечности при $k\to k_{s_0}$. Поэтому частоты $\omega_s=ck_s$ являются критическими (резонансными) для рассматриваемой излучающей системы.

Аналогичные эффекты возникают в приемной системе, состоящей из непрерывно расположенных на S_1 и S_2 акустически прозрачных точечных монопольных приемников. Пусть имеется звуковое поле $p=p^++p^-$, свойства полей $p^{\pm}$ описаны выше. Требуется факторизовать полное поле, т. е. по измеренным на S_1, S_2 значениям $p(x)$ найти поле $p^-(x)$ вне S_2 и поле $p^+(x)$ внутри S_1. Такая задача в случае, когда на замкнутой поверхности S расположены монопольные и дипольные приемники, решена в [1, 3]. В рассматриваемом нами случае задача приема решается по следующей схеме:

$$\{\text{РЗ}(3),\ (10)\}\to\{\partial u/\partial n,\ x\in S\}\to\{p^+(x),\ x\in\mathscr{D}_1;\ p^-(x),\ x\in\mathscr{D}_2\},$$

где $u(x)$ — решение задачи Дирихле

$$u|_S=p \tag{10}$$

в слое $\mathscr{D}$ для уравнения Гельмгольца (3). По значениям $\partial u/\partial n$ на S находим значения $\partial p/\partial n=\partial u/\partial n$, а затем находим искомые значения полей $p^{\pm}(x)$ с помощью формулы Грина так же, как и в работе [3].

Задача Дирихле (3), (10) в данном случае однозначно разрешима при всех значениях k в отличие от задачи (3), (4). Если частота ω — некритическая, то это очевидно; пусть $k=k_{s_0}$ — простое собственное значение. Необходимое и достаточное условие однозначной разрешимости задачи (3), (10) имеет вид

$$\int\limits_S p(x)\frac{\partial w_{s_0}(x)}{\partial n}dS=0. \tag{11}$$

Так как функции $p(x)$, $w_{s_0}(x)$ удовлетворяют одному и тому же однородному уравнению Гельмгольца в слое $\mathscr{D}$ и $w_{s_0}|_S\equiv 0$, то из формулы Грина следует, что (11) выполняется и потому единственным решением задачи (3), (10) является $u=p$. Тем не менее частоты $\omega_s=ck_s$ для задачи приема

также являются резонансными. Дело в том, что если значения поля $p(x)$ на S_1, S_2 измерены неточно, то соотношение (11) будет в общем случае нарушено, и тогда $\partial u/\partial n \to \infty$ при $k \to k_s$ по крайней мере на некоторых кусках поверхностей S_1, S_2 (см. формулу (9)).

Вернемся к задаче излучения; пусть $p^-(x) \equiv 0$, тогда $\tilde{p}(x) = 0$ в $\mathscr{D}_2$. Покажем, что если поверхности S_1, S_2 стягиваются к некоторой замкнутой поверхности S, лежащей в слое $\mathscr{D}$, так, что S_1 лежит внутри S, а S_2 — вне S, то на нерезонансной частоте предельная излучающая система будет стремиться к монопольно-дипольному варианту [1—3]. Действительно, из формул (2), (7) имеем

$$p(x) = \left(\int\limits_{S_1} - \int\limits_{S_2}\right) \frac{\partial u(y)}{\partial n} G_0(x, y)\, dS - \int\limits_{S_2} \frac{\partial p^+(y)}{\partial n} G_0(x, y)\, dS =$$

$$= \left[\int\limits_{S} \left(u(y) \frac{\partial G_0(x, y)}{\partial n} - \frac{\partial u(y)}{\partial n} G_0(x, y)\, dS\right)\right] +$$

$$+ \left\{\int\limits_{S_2} \left(p^+(y) \frac{\partial G_0(x, y)}{\partial n} - G_0(x, y) \frac{\partial p^+(y)}{\partial n}\right)\right\}.$$

Здесь $S = S_1 - S_2$ и мы воспользовались тем, что $\tilde{p}(x) = -p^+(x)$ на S_1, $\tilde{p}(x) = 0$ на S_2. Если x лежит вне слоя $\mathscr{D}$, то выражение в квадратных скобках тождественно равно нулю, а выражение в фигурных скобках стремится к интегралу $\int\limits_{S} \left(p^+ \frac{\partial G_0}{\partial n} - G_0 \frac{\partial p^+}{\partial n}\right) dS$.

Полная задача активного гашения звука (например, компенсация поля $p^+(x)$ в $\mathscr{D}_1$) решается по аналогии с монопольно-дипольным вариантом. Для этого требуются две приемные поверхности S_1, S_2 и две излучающие поверхности S_3, S_4 (излучающие поверхности расположены внутри приемных). По измеренным на S_1, S_2 значениям полного поля $p = p^+ + p^-$ находим значения $\partial p^+/\partial n$ на $S_{3,4}$ и затем создаем компенсирующее поле $\tilde{p}(x)$, равное $-p^+$ в $\mathscr{D}_1$ и равное нулю в $\mathscr{D}_4$. Такая система автономна, т. е. не зависит от вида внешнего поля $p(x)$; обратная связь между приемниками и излучателями отсутствует.

Проведенный выше анализ поверхностей Гюйгенса без существенных изменений переносится на тот случай, когда скорость звука или плотность среды переменны, а также для систем активного гашения звука в волноводах, во внешности ограниченного тела и т. д. Эта схема допускает обобщение на случай активного гашения вибраций в пластинах и твердых средах, для которых монопольно-дипольный вариант разработан в работе [7], и для гашения стационарных электромагнитных полей.

Покажем, что если поверхности S_1 и S_2 стягиваются к некоторой замкнутой поверхности S, т. е. $h/d \to 0$, где d — средний диаметр поверхности S, h — средняя толщина слоя $\mathscr{D}$, то

$$\lambda_1 \sim 2h. \tag{12}$$

Здесь λ_1 — длина волны при первой критической частоте ω_1. Предварительно рассмотрим ряд конкретных моделей.

1. Одномерный аналог задачи (5) имеет вид

$$y'' + k^2 y = 0, \quad y(0) = y(h) = 0,$$

откуда следует, что

$$\omega_1 = \pi c/h. \tag{13}$$

2. Пусть $\mathscr{D}$ — шаровой слой $R_1<|x|<R_2$. Собственные значения задачи (5) совпадают с множеством всех собственных значений одномерных задач [8]

$$(14)\qquad v_{rr}''+\left[k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]v=0,\quad v(R_1)=v(R_2)=0,$$

где $l=0, 1, 2, \ldots$ Из вариационного принципа для собственных значений задачи Штурма — Лиувилля следует, что наименьшее собственное значение задачи (14) возрастает с ростом l. Поэтому k_1^2 — это наименьшее собственное значение задачи (14) при $l=0$, т. е. ω_1 имеет вид (13). Такой же ответ получается для концентрического кругового кольца на плоскости.

3. Пусть W — волновод с осью Ox_3 и с постоянным сечением S, скорость звука не зависит от x_3. В качестве S_1, S_2 возьмем сечения $x_3=0$, $x_3=h$, и пусть $\mathscr{D}$ — заключенная между ними область. Критические частоты определяются из задачи на собственные значения:

$$\left(\Delta+\frac{\omega^2}{c^2}\right)u(x)=0;\quad x\in\mathscr{D};\quad u|_{S_1}=u|_{S_2}=\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial W}=0$$

в случае волновода с идеально жесткими стенками. Эта задача допускает разделение переменных; собственные функции имеют вид

$$u(x)=\sin\frac{\pi n x_3}{h}v_n(x_1, x_2),$$

где $n=1, 2, \ldots$, v_n — собственная функция задачи

$$\left(\Delta_{x_1x_2}+\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{\pi^2n^2}{h^2}\right)v_n=0,\quad x\in S;\quad \frac{\partial v}{\partial n}\bigg|_{\partial S}=0.$$

Из вариационного принципа следует, что наименьшее собственное значение ω_1 имеется при $n=1$. При постоянной скорости звука для ω_1 снова получаем выражение (13). При переменной скорости звука для собственной функции v, отвечающей ω_1, имеем

$$\omega_1^2\int\limits_S\frac{|v|^2}{c^2}dS=\frac{\pi^2}{h^2}\int\limits_S|v|^2dS+\int\limits_S|\nabla v|^2dS,$$

так что $\omega_1\geqslant\pi c_{\min}/h$, где $c_{\min}$ — минимальное значение скорости звука в волноводе.

Первое собственное значение задачи (5) определяется формулой

$$k_1^2=\min\int\limits_{\mathscr{D}}|\nabla v(x)|^2dx,$$

где минимум берется по всем гладким в $\overline{\mathscr{D}}$ функциям, равным нулю на границе слоя $\mathscr{D}$ и нормированным условием $\|v\|_{L_2(\mathscr{D})}=1$. Из неравенства Фридрихса [9]

$$\int\limits_{\mathscr{D}}|v|^2dx\leqslant Ch^2\int\limits_{\mathscr{D}}|\nabla v|^2dx,$$

где постоянная C зависит только от предельной поверхности S, h — средняя толщина слоя, вытекает, что $\omega_1\geqslant C_1/h$ при $h\ll d$. Докажем асимптотическую формулу (12) в предположении, что S_1, S_2 — выпуклые эквидистантные поверхности, h — расстояние между ними по нормали. Введем в $\mathscr{D}$ римановы координаты (n, s), где n — нормальная координата, (s_1, s_2) — координаты на поверхности S_1, так что $x=R(s)-nN(s)$. Здесь $R(s)$ — радиус-вектор точки на S_1, $N(s)$ — единичный вектор внутренней

нормали к S_1; мы используем приведенные в работе [10] формулы. Оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta=|G|^{-1}\frac{\partial}{\partial n}|G|\frac{\partial}{\partial n}+|G|^{-1}|g|^{-1/2}\times$$

$$\times\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\frac{\partial}{\partial s_\alpha}|G||g|^{1/2}(G^{-2})^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial s_\beta}.$$

Здесь $g_{\alpha\beta}$, $h_{\alpha\beta}$ — элементы тензоров первой и второй квадратичных форм поверхности S_1, $|g|$, $|G|$ — определители тензоров g и $G=e+nh$, где e — тождественное преобразование касательной плоскости Γ_s. Сделаем замену переменной $n=h\tilde{n}$ и положим $k^2=h^{-2}\tilde{k}^2$, тогда задача (5) примет вид

$$(L_0+hL_1+\tilde{k}^2)u=0,\quad x\in\tilde{\mathscr{D}};\quad u|_{\tilde{n}=0}=u|_{\tilde{n}=1}=0.$$

Здесь $L_0=\partial^2/\partial n^2$, L_1 — оператор второго порядка с гладкими коэффициентами, зависящими от переменных $(h\tilde{n}, s_1, s_2)$, слой $\mathscr{D}$ отображается в слой $\mathscr{D}$: $0\leqslant\tilde{n}\leqslant1$. Применим теорию возмущений; первое собственное значение и первую собственную функцию будем искать в виде рядов по степеням h:

$$u=u_0+hu_1+\ldots,\quad \tilde{k}^2=\tilde{k}_0^2+h\tilde{k}_1^2+\ldots$$

Для нулевого приближения получим задачу

$$\frac{\partial^2u_0}{\partial\tilde{n}^2}+\tilde{k}_0^2u_0=0,\ u_0|_{\tilde{n}=0}=u_0|_{\tilde{n}=1}=0,$$

так что $\tilde{k}_0=\pi$, $u_0=\sin\pi\tilde{n}$. Уравнение для первого приближения имеет вид

$$(L_0+\tilde{k}_0^2)u_1=-(L_1+\tilde{k}_1^2)u_0,$$

краевые условия те же, что и выше. Так как $\tilde{k}_0^2$ — простое собственное значение, то необходимое и достаточное условие разрешимости этого уравнения имеет вид $((L_1+\tilde{k}_1^2)u_0, u_0)=0$, где скалярное произведение берется в пространстве $L_2(\mathscr{D})$. Следовательно,

$$\tilde{k}_1^2=-(L_1u_0, u_0)\|u_0\|^{-2}_{L_2(\mathscr{D})}.$$

Аналогично вычисляются высшие поправки к $\tilde{k}_0^2$ и u_0, и мы снова получили соотношение (12).

Таким образом, при использовании данной схемы активного гашения звука необходимо разнести приемники (излучатели) на расстояние не ближе, чем $h\gtrsim\lambda_1/2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малюжинец Г. Д.* Нестационарные задачи теории дифракции для волнового уравнения с финитной правой частью. Тр. Акуст. ин-та, 1971, вып. 14, 124–139.
2. *Jessel M.* Acoustique théoretique. Paris, Masson et C^le, 1973.
3. *Федорюк М. В.* О работах Г. Д. Малюжинца по теории волновых потенциалов. Тр. Акуст. ин-та, 1971, вып. 14, 169–179.
4. *Мазаников А. А., Тютекин В. В., Уколов А. Т.* Активная система гашения акустических полей в многомодовом волноводе. Акуст. ж., 1977, *23*, 3, 485–487.
5. *Poole G. H., Leventhall H. G.* An experimental study of Swinbank's method of active attenuation of sound in ducts. J. Sound and Vibration, 1976, *49*, 2, 257–266.
6. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1975.
7. *Федорюк М. В.* Об активном гашении колебаний упругих сред. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1976, *16*, 4, 1065–1068.
8. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.
9. *Михлин С. Г.* Курс математической физики. М., «Наука», 1968.
10. *Буслаев В. С.* Об асимптотическом поведении спектральных характеристик внешних задач для оператора Шрёдингера. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1975, *39*, 1, 149–235.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
31 марта 1978 г.