Наиболее интересен случай малой вязкости ($|\varkappa|\mathscr{H}\gg 1$) и малого поверхностного натяжения:

$$\mathscr{L}_1 \cong \frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1+\rho_2} - i\frac{12\rho_1\rho_2\nu}{(\rho_1+\rho_2)^2\omega\mathscr{H}^2} + \frac{6\alpha\rho_2}{(\rho_1+\rho_2)^2\omega^2\mathscr{H}^3}, \qquad \nu=\frac{\eta_2}{\rho_2}, \tag{32}$$

$$\mathscr{L}_2 \cong \frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1+\rho_2} - i\frac{24\rho_1\rho_2\nu}{(\rho_1+\rho_2)^2\omega\mathscr{H}^2} + \frac{15\alpha\rho_2}{(\rho_1+\rho_2)^2\omega^2\mathscr{H}^3}, \tag{33}$$

величина $\mathscr{L}_3$ экспоненциально мала. Поскольку $b/\mathscr{H}\ll 1$, то «стационарный» уровень пульсации определяется приближенным соотношением

$$\mathrm{Re}\,\mathscr{L}_1\,\mathrm{Re}\,\varepsilon+\mathrm{Im}\,\mathscr{L}_1\,\mathrm{Im}\,\varepsilon\cong 0. \tag{34}$$

Отсюда

$$\frac{9(2b^2\delta^2+4b\delta+3)}{b\delta(2b^3\delta^3+6b^2\delta^2+9b\delta+18)} \cong \frac{1}{2\nu}\left[\frac{\omega\mathscr{H}^2(\rho_1^2-\rho_2^2)}{6\rho_1\rho_2}+\frac{\alpha}{\rho_1\omega\mathscr{H}}\right]. \tag{35}$$

Для очень малых пузырьков ($b\delta\ll 1$)

$$b \cong 25\frac{\nu^{3/2}}{\omega^{1/2}\mathscr{H}^2}\left(\frac{\rho_1^2-\rho_2^2}{\rho_1\rho_2}+\frac{6\alpha}{\rho_1\omega^2\mathscr{H}^3}\right)^{-1}, \tag{36}$$

а для несколько бóльших ($b\delta\gg 1$)

$$b \cong 15\frac{\nu}{\omega\mathscr{H}}\left(\frac{\rho_1^2-\rho_2^2}{\rho_1\rho_2}+\frac{6\alpha}{\rho_1\omega^2\mathscr{H}^3}\right)^{-1/2}. \tag{37}$$

Мы видим, что при $\rho_1>\rho_2$ величина b очень мала, а при $\rho_1<\rho_2$ возможен случай равновесия и для сравнительно больших пузырьков.

Автор признателен М. А. Исаковичу и С. А. Недужему за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехтеориздат, 1953.

Московский институт управления
им. С. Орджоникидзе

Поступила
3 января 1978 г.
После доработки
29 мая 1978 г.

УДК 534.231

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СКОРОСТИ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В ПОЛОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СТЕРЖНЕ, СЖАТОМ ОСЕВЫМ ДАВЛЕНИЕМ

Ю. Д. Сергеев

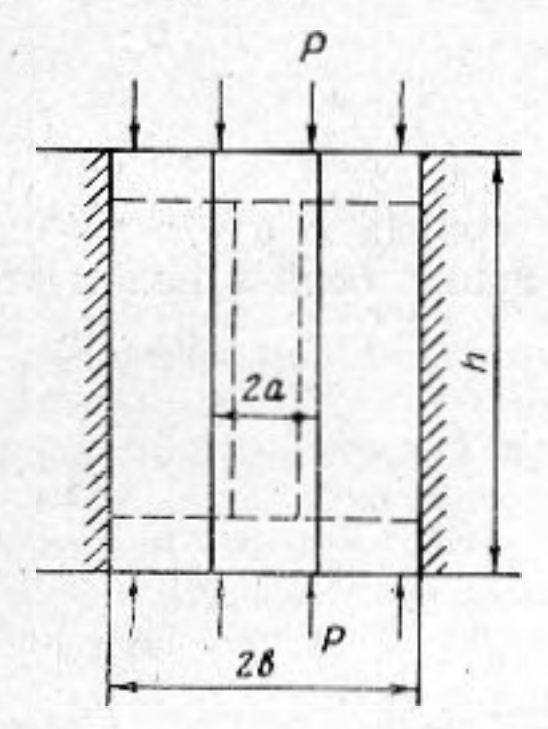
В работе [1] было получено в низкочастотном приближении выражение для скорости продольных волн в полом цилиндрическом стержне из резиноподобного материала в жесткой скользкой обойме. В работе [2] это выражение было уточнено. В последующих работах [3, 4] было вычислено изменение скорости продольных волн в упомянутом стержне, сжатом осевым давлением, путем определения изменения статического модуля его упругости. При этом пренебрегалось нелинейностью соотношений между тензорами деформации и напряжения, что справедливо, вообще говоря, только при малых деформациях. Этого приближения можно избежать, если для определения модуля упругости воспользоваться методом расчета больших деформаций резиноподобных стержней, изложенным в работе [5].

Рассмотрим деформацию полого стержня под действием осевого усилия P в соответствии с фиг. 1. Внешняя его поверхность радиально закреплена точно так же, как и в задаче, рассмотренной в упомянутых работах [1—4]. Предполагается, что торцевые поверхности стержня в радиальном направлении проскальзывают без

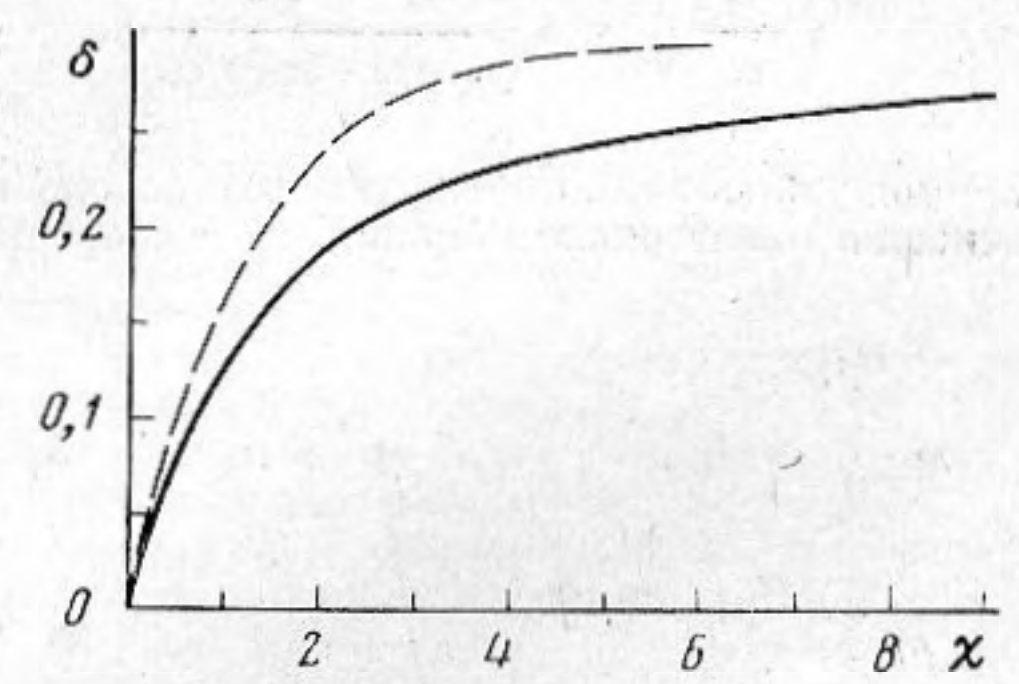
усилий. Под действием увеличивающегося сжимающего усилия P материал стержня постепенно заполняет его внутреннюю полость, не подвергаясь практически деформации объемного сжатия в широком диапазоне осевых деформаций стержня [5]. Поэтому материал стержня при расчете его статической деформации считается несжимаемым. В силу этих обстоятельств стержень деформируется равномерно по всей длине. Для радиальных перемещений ρ в [5] из условия несжимаемости с учетом нелинейности соотношения между деформациями и напряжением было получено выражение

$$\rho=\sqrt{\mathscr{D}+r^2/\lambda_0}-r, \tag{1}$$

где $\mathscr{D}$ – постоянная интегрирования, λ_0 – степень деформации стержня, которая связана с относительным изменением длины стержня δ выражением $\lambda_0=1-\delta$. В свою очередь $\delta=\Delta/h$, где Δ – абсолютное изменение длины стержня, h – его первоначальная длина. Постоянная $\mathscr{D}$ может быть определена из условия отсутствия радиальных перемещений внешней поверхности стержня $\rho|_{r=b}=0$. Откуда



Фиг. 1. Схема деформации полого стержня



Фиг. 2. Расчетная зависимость относительной деформации стержня

$$\mathscr{D}=b^2\left(1-\frac{1}{\lambda_0}\right)=b^2\frac{\delta}{1-\delta}. \tag{2}$$

Следуя работе [5], можно далее определить компоненты деформации с учетом формулы (2), а затем вычислить энергию деформации стержня, принимая во внимание общий нелинейный характер соотношений между тензорами деформации и напряжения. Суммируя ее с работой внешних сил, взятой с обратным знаком, получим выражение для полной энергии рассматриваемой системы

$$\Pi=\frac{\pi b^2 h}{2}\mu\left[\left(\lambda_0^2+\frac{2}{\lambda_0}-3\right)(1-\varepsilon_0^2)+\right.$$
$$\left.+\left(1-\frac{1}{\lambda_0}\right)\ln\frac{\lambda_0-(1-\varepsilon_0^2)}{\varepsilon_0^2\lambda_0}\right]-Ph\lambda_0, \tag{3}$$

где μ – модуль сдвига материала стержня, $\varepsilon_0=a/b$. Минимизация энергии (3) по λ_0 дает искомое соотношение между сжимающим усилием и деформацией, которое может быть представлено в виде

$$\frac{P}{\pi b^2(1-\varepsilon_0^2)}=-\mu\left\{\delta-1+\frac{1}{(1-\delta)^2}\left[1+\frac{\delta}{2(\varepsilon_0^2-\delta)}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{2(1-\varepsilon_0^2)}\ln\frac{\varepsilon_0^2-\delta}{\varepsilon_0^2(1-\delta)}\right]\right\}. \tag{4}$$

Знак «–» означает, что под действием сжимающего усилия длина стержня уменьшается. Аналогичное соотношение, полученное в работе [4] в предположении линейной зависимости между деформациями и напряжениями, имеет вид

$$\frac{P}{\pi b^2(1-\varepsilon_0^2)}=-\mu\left[\frac{3\delta}{1-\delta}-\frac{1}{(1-\varepsilon_0^2)}\ln\frac{\varepsilon_0^2-\delta}{\varepsilon_0^2(1-\delta)}\right]. \tag{4'}$$

При $\delta \ll 1$, т. е. малых деформациях, оба соотношения линеаризуются и могут быть представлены как

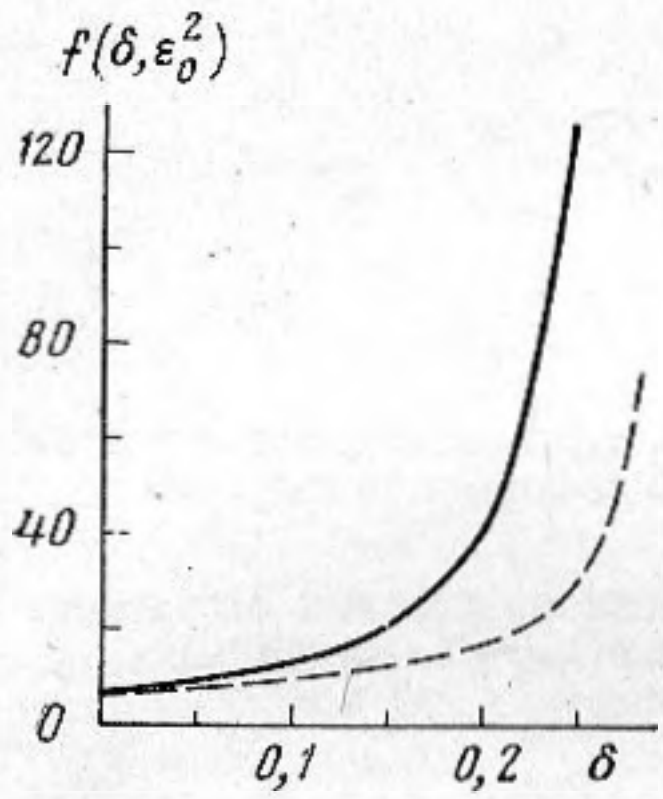
$$\frac{P}{\pi b^2(1-\varepsilon_0^2)} = -\mu \frac{1+3\varepsilon_0^2}{\varepsilon_0^2}\delta. \tag{5}$$

При достаточно больших δ разница между выражениями (4) и (4′) существенна, что иллюстрируется фиг. 2, где представлены результаты расчета относительной деформации при $\varepsilon_0^2=0{,}3$ по формулам (4) (сплошная кривая) и (4′) (штриховая кривая).

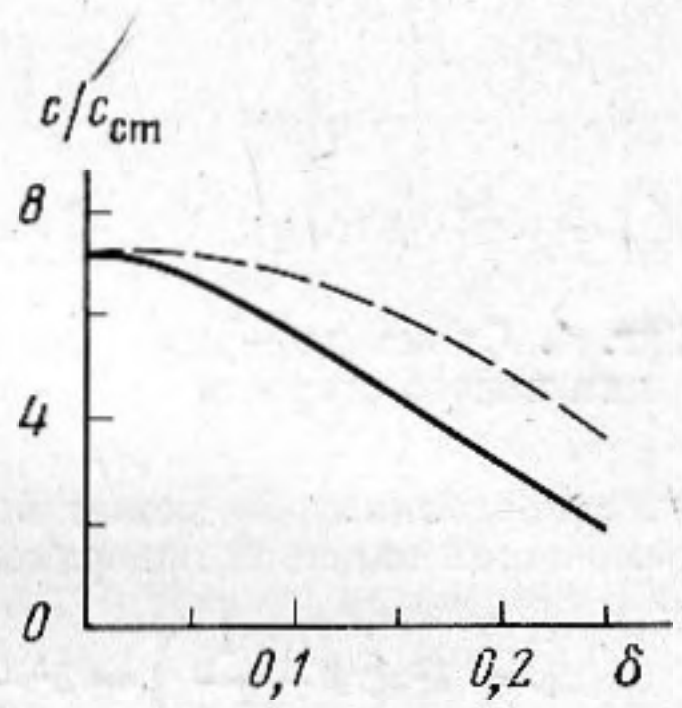
Обратимся теперь к упоминавшемуся выше полученному в работе [2] выражению для скорости звука в полом стержне

$$\left(\frac{c}{c_{\text{ст}}}\right)^2 = 1 + \frac{\lambda}{\mu(1+3\varepsilon_0^2)/\varepsilon_0^2}, \tag{6}$$

где λ – модуль объемного сжатия резиноподобного материала с $\mu \ll \lambda$, c – скорость волн сжатия в материале стержня, $c_{\text{ст}}$ – скорость продольных волн в полом стержне.



Фиг. 3. Зависимость изменения модуля упругости от деформации стержня



Фиг. 4. Изменение относительной величины скорости продольных волн в стержне при его деформации

Можно видеть, что коэффициент при δ в формуле (5) совпадает с величиной знаменателя в формуле (6). В то же время $\mu(1+3\varepsilon_0^2)/\varepsilon_0^2$ – модуль упругости полого стержня при малых деформациях и пренебрежении объемным сжатием материала стержня, т. е. при $\lambda\varepsilon_0^2 \gg \mu$. Под действием осевого давления из-за нелинейной зависимости деформации от напряжения и изменения диаметра полости в стержне этот модуль изменяется в соответствии с формулой (4). Осевое сжатие выступает в данном случае как параметр, изменяющий упругость стержня. В то же время распространение колебаний по стержню определяется дифференциальным значением модуля упругости, которое вычисляется путем дифференцирования выражения (4) по δ. Это приводит к следующему соотношению:

$$\frac{1}{1-\varepsilon_0^2}\frac{d\chi}{d\delta} = f(\delta, \varepsilon_0^2), \tag{7}$$

$$f(\delta, \varepsilon_0^2) = 1 + \frac{1}{(1-\delta)^3}\left[2 + \frac{2(\varepsilon_0^2-\delta^2) - \delta(1-\varepsilon_0^2)}{2(\varepsilon_0^2-\delta)^2} - \right. \tag{8}$$

$$\left. - \frac{1}{(1-\varepsilon_0^2)}\ln\frac{\varepsilon_0^2-\delta}{\varepsilon_0^2(1-\delta)}\right].$$

Здесь $\chi = P/\pi b^2\mu$. При $\delta = 0$ функция $f(0, \varepsilon_0^2) = (1+3\varepsilon_0^2)/\varepsilon_0^2$. Таким образом, функция $f(\delta, \varepsilon_0^2)$ описывает изменение модуля упругости деформированного полого стержня в диапазоне статических его деформаций, в котором можно пренебречь объемным сжатием материала стержня. Следовательно, требуемое уточнение может быть получено, если в формуле (6) вместо $f(0, \varepsilon_0^2)$ подставить $f(\delta, \varepsilon_0^2)$. Тогда можно получить выражение для скорости продольных волн в деформированном цилиндри-

ческом полом стержне

$$(c/c_{ст})^2=1+\lambda/\mu f(\delta, \varepsilon_0^2). \quad (9)$$

Справедливость этого выражения ограничивается областью низких частот [1] и указанным выше диапазоном статических деформаций стержня. На фиг. 3 (сплошной кривой) представлены результаты расчета $f(\delta, \varepsilon_0^2)$ при $\varepsilon_0^2=0{,}3$ по формуле (8). Для сравнения аналогичные расчеты были выполнены с использованием соотношения (4′) (штриховая кривая). На фиг. 4 представлены расчетные значения $c/c_{ст}$ в зависимости от δ.

Эти данные иллюстрируют необходимость учета нелинейности соотношений между напряжениями и деформациями при достаточно больших деформациях стержня.

Автор признателен С. А. Шляпочникову за обсуждение результатов настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тютекин В. В.* Распространение упругих волн в среде с цилиндрическими каналами. Акуст. ж., 1956, *2*, 3, 291–301.
2. *Глазанов В. Е.* К вопросу об определении скорости распространения упругих волн в среде с цилиндрическими каналами. Акуст. ж., 1962, *8*, 4, 468–469.
3. *Тарасов Л. А., Тютекин В. В.* Метод измерения модулей сдвига и сжатия резины при малых деформациях. Каучук и резина, 1960, 9, 38–41.
4. *Глазанов В. Е.* Некоторые задачи распространения звука в упругих средах (курс лекций). Таганрог, Изд. Таганрогского радиотехнического ин-та, 1973.
5. *Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К., Макушин В. М., Малинин Н. Н., Феодосьев В. И.* Расчеты на прочность в машиностроении, т. II. М., Машгиз, 1958.

Поступила
13 марта 1978 г.
После переработки
4 октября 1978 г.