АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXV 1979 Вып. 4

УДК 534.222

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗВУКОВЫХ ПУЧКОВ

Н. С. Бахвалов, Я. М. Жилейкин, Е. А. Заболотская

На основе численного интегрирования нелинейного уравнения акустики ограниченных пучков исследовано поведение амплитуд и фаз разностной волны, генерируемой при взаимодействии двух высокочастотных коллинеарных звуковых пучков конечной амплитуды. Рассмотрены два амплитудных распределения волн накачки: гауссово и по полиному четвертой степени. Проанализированы случаи, соответствующие различным соотношениям нелинейных и дифракционных эффектов, при разном отношении частот несущих волн для сред с различным поглощением.

Нелинейное взаимодействие звуковых волн открывает новые возможности излучения низкочастотного акустического сигнала, которые в значительной степени уже реализованы на практике. Поэтому интерес к этой проблеме исключительно высок и литература обширна [1, 2]. Здесь хотелось бы выделить два основных подхода к решению задач о параметрическом излучении звука: метод функций Грина, впервые примененный к этим задачам в работе [3], и метод, основанный на квазиоптическом приближении, предложенный и успешно развитый в работе [4]. Квазиоптическое приближение позволяет проследить за динамикой формирования диаграммы направленности и дает хорошее согласие с экспериментом [4, 5]. Стремление повысить коэффициент преобразования в низкую частоту приводит к «нелинейному насыщению» [6]. Особенности работы параметрического излучателя в режиме «нелинейного насыщения» освещены в работах [7—9].

Данная работа посвящена изучению поведения разностной волны, возникающей при взаимодействии звуковых пучков конечной амплитуды в условиях, когда нелинейные и дифракционные эффекты одного порядка и когда нелинейность проявляется сильнее, чем дифракция. В прожекторной зоне исследуются амплитудные и фазовые распределения разностной волны и одной из высокочастотных волн накачки на фиксированных расстояниях от границы нелинейной среды, а также изменения амплитуд и фаз этих волн вдоль направления распространения в разных точках поперечного сечения пучка. Рассмотрены квазиплоские волны в идеальной и диссипативной средах при разных соотношениях нелинейных и дифракционных эффектов, при разных отношениях частот несущих волн, для сред с различным поглощением. Анализ проведен на основе численного решения уравнения нелинейной акустики ограниченных пучков, когда на границе возбуждаются две гармонические волны с амплитудами, уменьшающимися от центра пучка к краям. Рассмотрены два амплитудных распределения по сечению пучка: по полиному четвертой степени и по закону Гаусса.

Распространение и взаимодействие осесимметричных звуковых пучков в слабо нелинейной среде описывается приближенным уравнением [10]

$$N\frac{\partial^2\rho^2}{\partial\theta^2}-\frac{\partial^2\rho}{\partial\theta\,\partial z}+\Delta_\perp\rho=-\delta\frac{\partial^3\rho}{\partial\theta^3}. \tag{1}$$

Допустим, что на границе возбуждаются две монохроматические волны с одинаковыми амплитудными распределениями и с частотами ω_1 и ω_2:

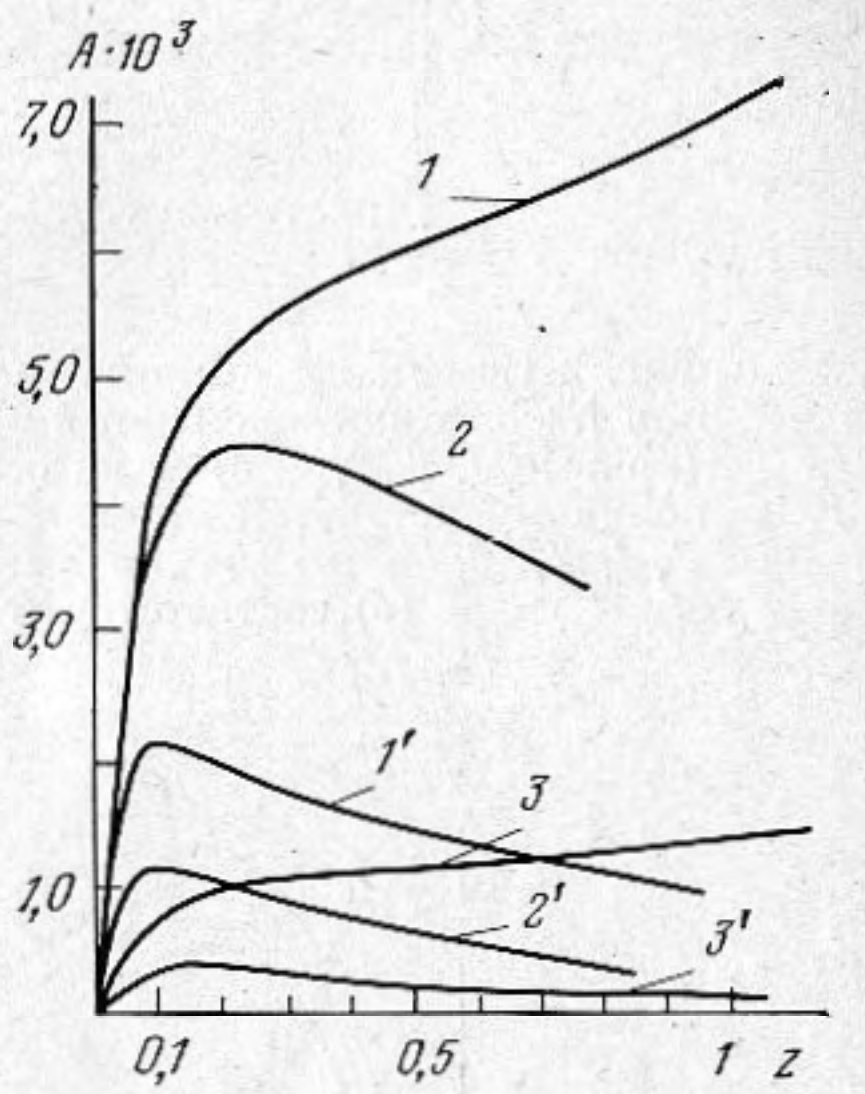
$$\rho|_{z=0} = -F(R)\left(\sin\theta + \sin\frac{\omega_2}{\omega_1}\theta\right). \tag{2}$$

Здесь введены обозначения: ρ – возмущение плотности, нормированное на амплитуду высокочастотного гармонического сигнала $\mathscr{A}_1$; $\theta = \omega_1(t - x/c_0)$ – безразмерное время в сопровождающей системе координат; c_0 – скорость распространения слабого сигнала; $z = x/2\mathscr{L}_d$ – безразмерная координата вдоль пучка; $\mathscr{L}_d = \omega_1 r_0^2/c_0$ – конфокальный параметр волны накачки; поперечная координата r нормируется на ширину высокочастотного пучка на границе r_0; $R = r/r_0$; $N = \mathscr{L}_d/\mathscr{L}_p$ – безразмерный параметр; $\mathscr{L}_p = 1/\alpha\omega_1\mathscr{A}_1$ – длина образования разрыва в плоской высокочастотной волне; коэффициент $\alpha = (\gamma+1)/2\rho_0 c_0$ характеризует нелинейные свойства среды; $\delta = \mathscr{L}_d/\mathscr{L}_з$ – безразмерный коэффициент затухания, где $\mathscr{L}_з = \rho_0 c_0^3/b\omega_1^2$ – длина затухания, $b = \zeta + 4\eta/3 + \varkappa(1/c_V - 1/c_p)$; η и ζ – сдвиговая и объемная вязкости; $\varkappa$ – коэффициент теплопроводности; c_V и c_p – коэффициенты теплоемкости при постоянном объеме и давлении соответственно; $\Delta_\perp$ – поперечный лапласиан. Функция $F(R)$ определяет амплитудное распределение, заданное на границе, и задается в виде

$$F(R) = 0{,}5(1-R^2)^2, \quad R \leqslant 1; \qquad F(R) = 0, \quad R > 1, \tag{3}$$

и

$$F(R) = 0{,}5e^{-R^2}. \tag{4}$$

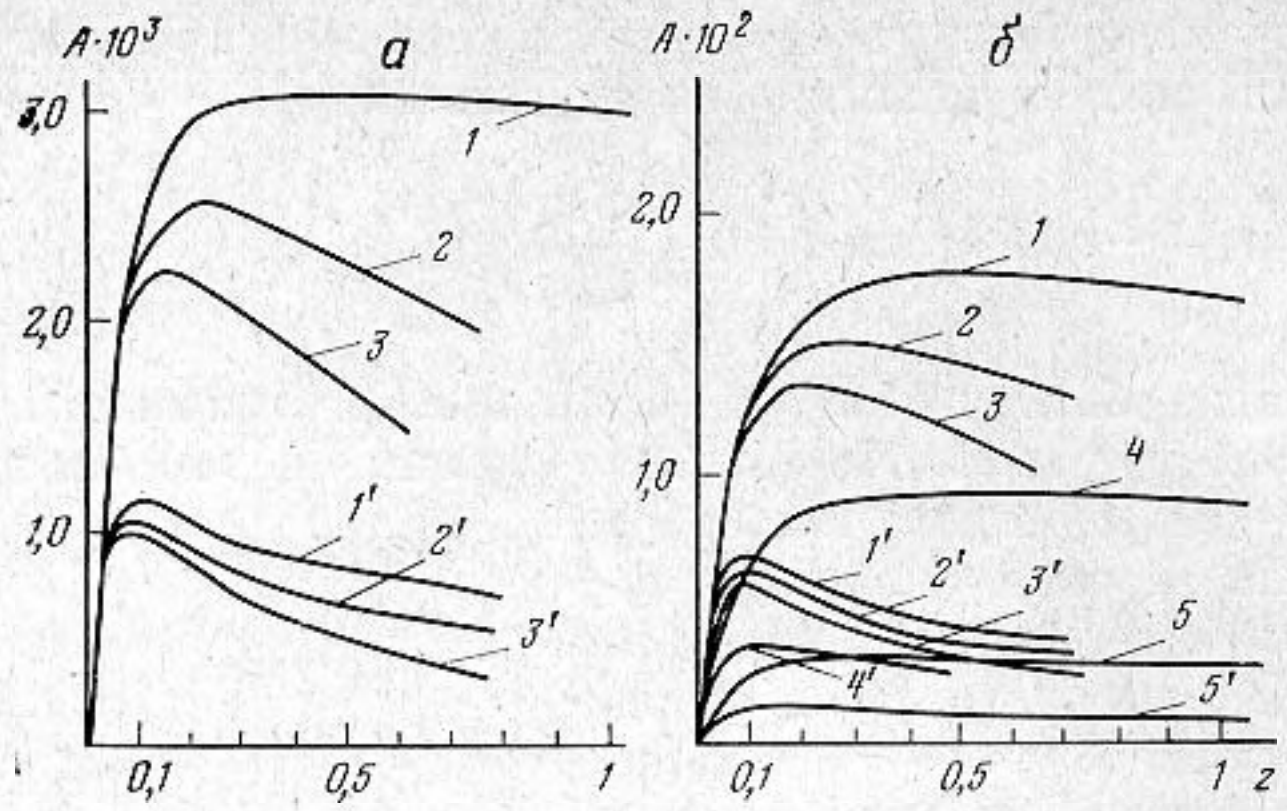


Фиг. 1. Изменение амплитуды разностной волны при распространении при $N=1$ на оси гауссова пучка (кривые *1*, *2*, *3*) и на оси пучка с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени (кривые *1′*, *2′*, *3′*), при отношении частот $k=0{,}3$ – кривые *1*, *1′*, *2*; $k=0{,}2$ – кривая *2′*, $k=0{,}1$ – кривые *3*, *3′*; коэффициент затухания $\delta=0$ – кривые *1*, *3*, *1′*, *2′*, *3′*; $\delta=1$ – кривая *2*

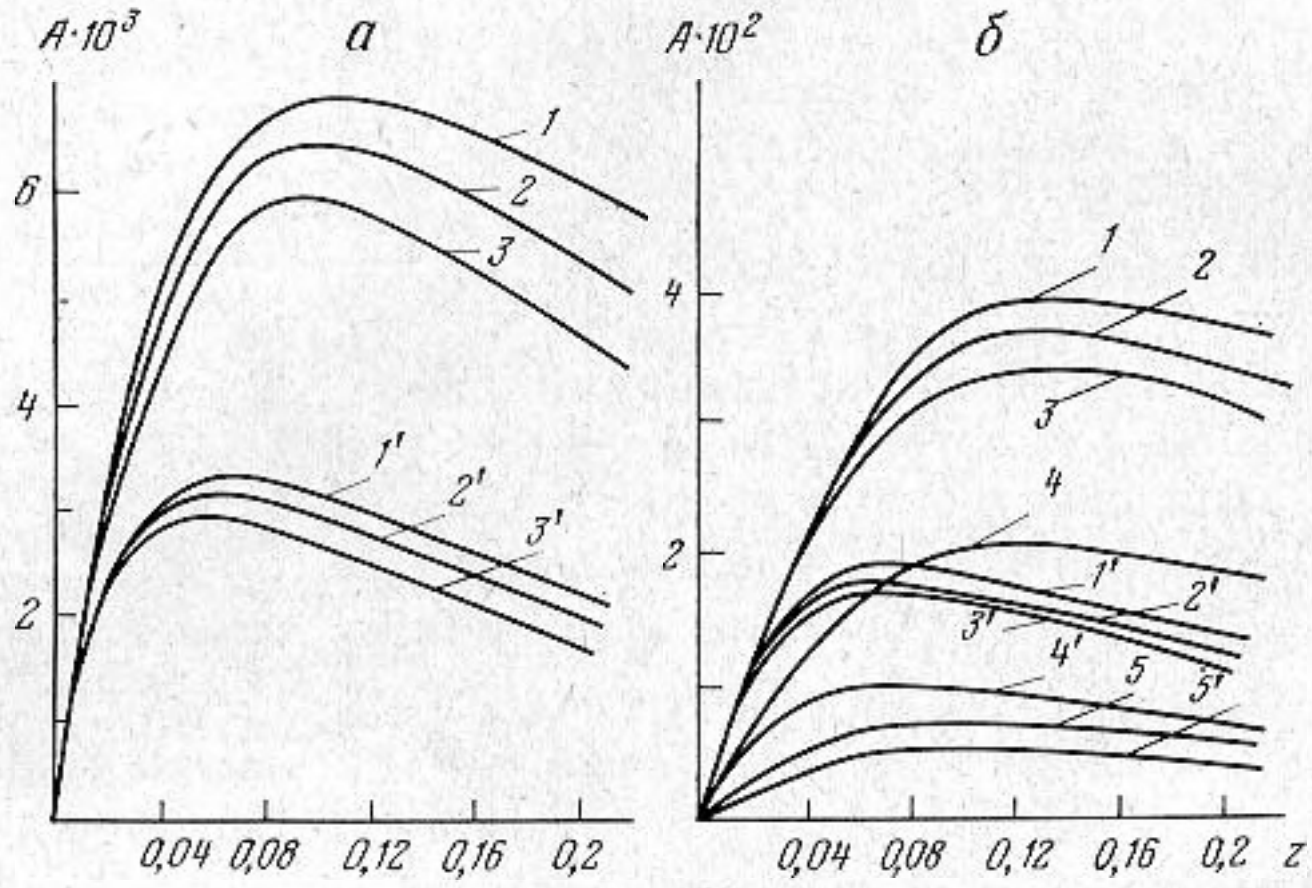
Частоты ω_1 и ω_2 выбираются таким образом, чтобы условия квазиоптического приближения выполнялись для волны разностной частоты $\Omega = \omega_1 - \omega_2$.

В задаче (1), (2) три безразмерных параметра: параметр N характеризует соотношение нелинейных и дифракционных эффектов; коэффициент δ – отношение дифракционной длины к длине затухания и параметр $k = \Omega/\omega_1$ определяет соотношение частот. Заметим, что отношение N/δ выражается через акустическое число Рейнольдса Re: $N/\delta = (\gamma+1)\,\mathrm{Re}/2$.

Уравнение (1) интегрировалось численно с граничным условием (2), где функция $F(R)$ определена выражениями (3) и (4). Разностная схема приведена в работе [11]. Затем производился гармонический анализ формы возмущения. При этом контролировались одна из несущих волн и разностная волна. Вычисления проводились для трех значений параметра N: 1; 3,25; 10. Для каждого N безразмерный коэффициент δ принимал значения: 0; 0,5; 1, а $k=0{,}1$; 0,2; 0,3. Результаты приводятся в виде графиков, изображающих распределение амплитуд и фаз разностной волны $\mathscr{A}(R)$, $\varphi(R)$ и высокочастотной волны накачки $\mathscr{A}_1(R)$, $\varphi_1(R)$ при фиксированных z. Кроме того, построены графики изменения амплитуд и фаз этих волн при распространении в различных точках поперечного сечения пучка $\mathscr{A}(z)$, $\varphi(z)$, $\mathscr{A}_1(z)$, $\varphi_1(z)$.



Фиг. 2 Изменение амплитуды разностной волны при распространении при $N=3{,}25$ для значений $k=0{,}1$ (*а*) и $k=0{,}3$ (*б*) на оси гауссова пучка (кривые *1*, *2*, *3*, *4*, *5*) и на оси пучка с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени (кривые *1′*, *2′*, *3′*, *4′*, *5′*), $\delta=0$ – кривые *1*, *1′*, *4*, *4′*, *5*, *5′*; $\delta=0{,}5$ – кривые *2* и *2′*; $\delta=1$ – кривые *3* и *3′*. Кривые *4* и *4′* (*б*) соответствуют $k=0{,}2$; кривые *5* и *5′* – $k=0{,}1$

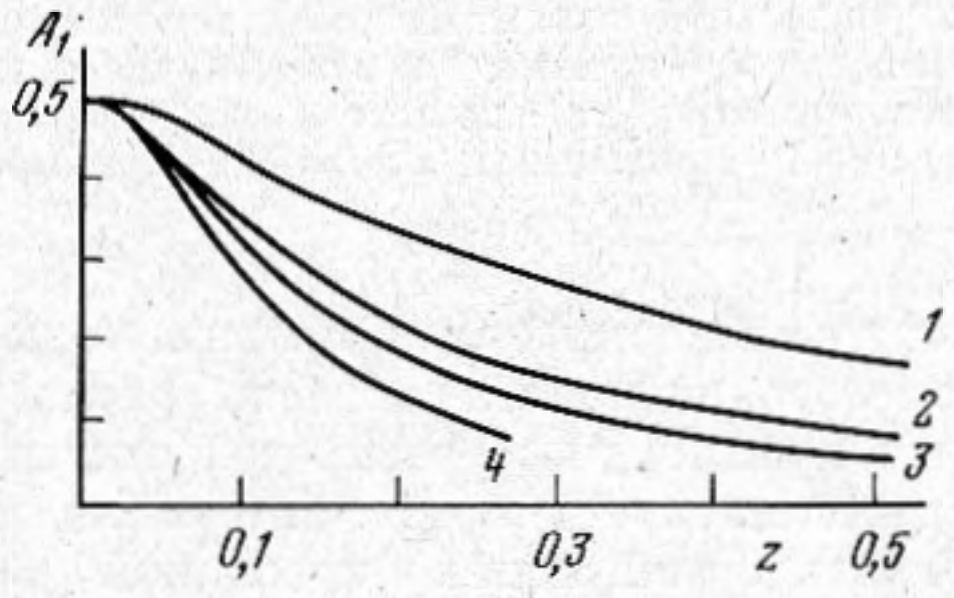


Фиг. 3. Изменение амплитуды разностной волны при распространении при $N=10$ для значений $k=0{,}1$ (*а*) и $k=0{,}3$ (*б*) на оси обоих рассмотренных пучков. Номера кривых соответствуют фиг. 2

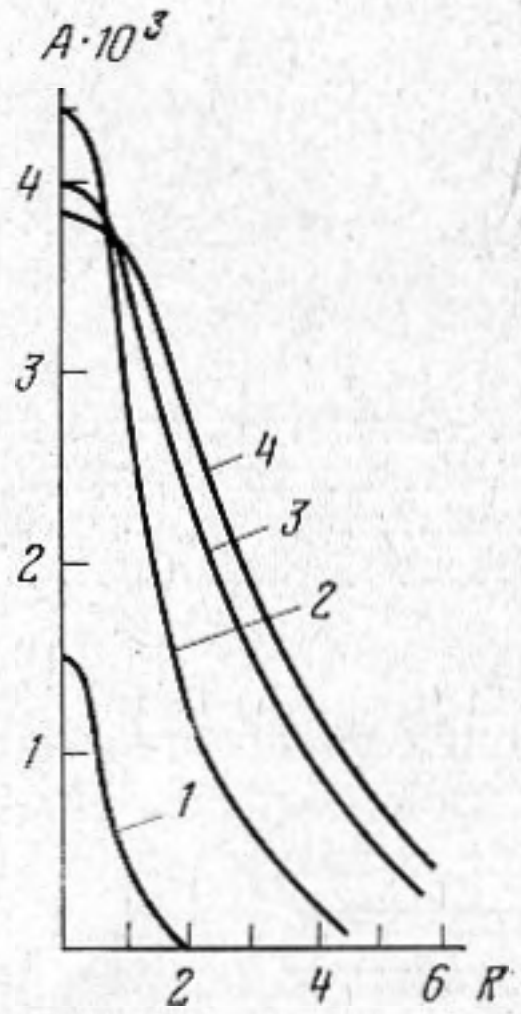
При распространении двух коллинеарных звуковых пучков в нелинейной среде генерируется волна разностной частоты. Поведение амплитуды ($\mathcal{A}$) этой волны на оси пучка изображено на фиг. 1–3. Характер изменения $\mathcal{A}$ определяется амплитудным распределением волн накачки. В гауссовом пучке амплитуда разностной волны существенно больше (кривые *1* на фиг. 1, 2, *а*, 2, *б*, 3, *а*, 3, *б*), чем в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени (кривые *1′* на тех же фигурах). Кроме того, амплитуда разностной волны, генерируемой в пучке с амплитудой накачки, распределенной по полиному четвертой степени, имеет резко выраженный максимум, координаты которого при $N=1$ и $N=3{,}25$ одинаковы и равны $z=0{,}1$ (кривые *1′* на фиг. 1, 2, *а* и *б*), что намного меньше координаты формирования ударного фронта на оси пучка. В гауссовом пучке при $N=1$ резкий рост $\mathcal{A}$ сменяется более плавным возрастанием (кривые *1* и *3* на фиг. 1), при $N=3{,}25$ $\mathcal{A}$ достигает максимума вблизи границы прожекторной зоны, что согласуется с результатами работы [5], затем $\mathcal{A}$ очень медленно уменьшается (кривые *1* на фиг. 2, *а* и *б*). При $N=10$ амплитуда разностной волны в обоих пучках имеет резко

выраженный максимум, координата которого в гауссовом пучке чуть больше, чем в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени (кривые *1* и *1′* на фиг. 3, *а* и *б*). Эта координата превосходит расстояние образования ударной волны на оси соответствующего пучка. Такое различие в поведении $\mathscr{A}$ можно объяснить сильной расходимостью пучка с резко выраженной границей, приводящей к резкому уменьшению амплитуды волны накачки на оси этого пучка (ср. кривые *1* и *2* на фиг. 4, изображающей зависимость $\mathscr{A}_1(z)$ на оси пучка).

Все кривые, иллюстрирующие различие в поведении $\mathscr{A}$ в обоих пучках, относились к идеальным средам. С увеличением поглощения величи-



Фиг. 4



Фиг. 5

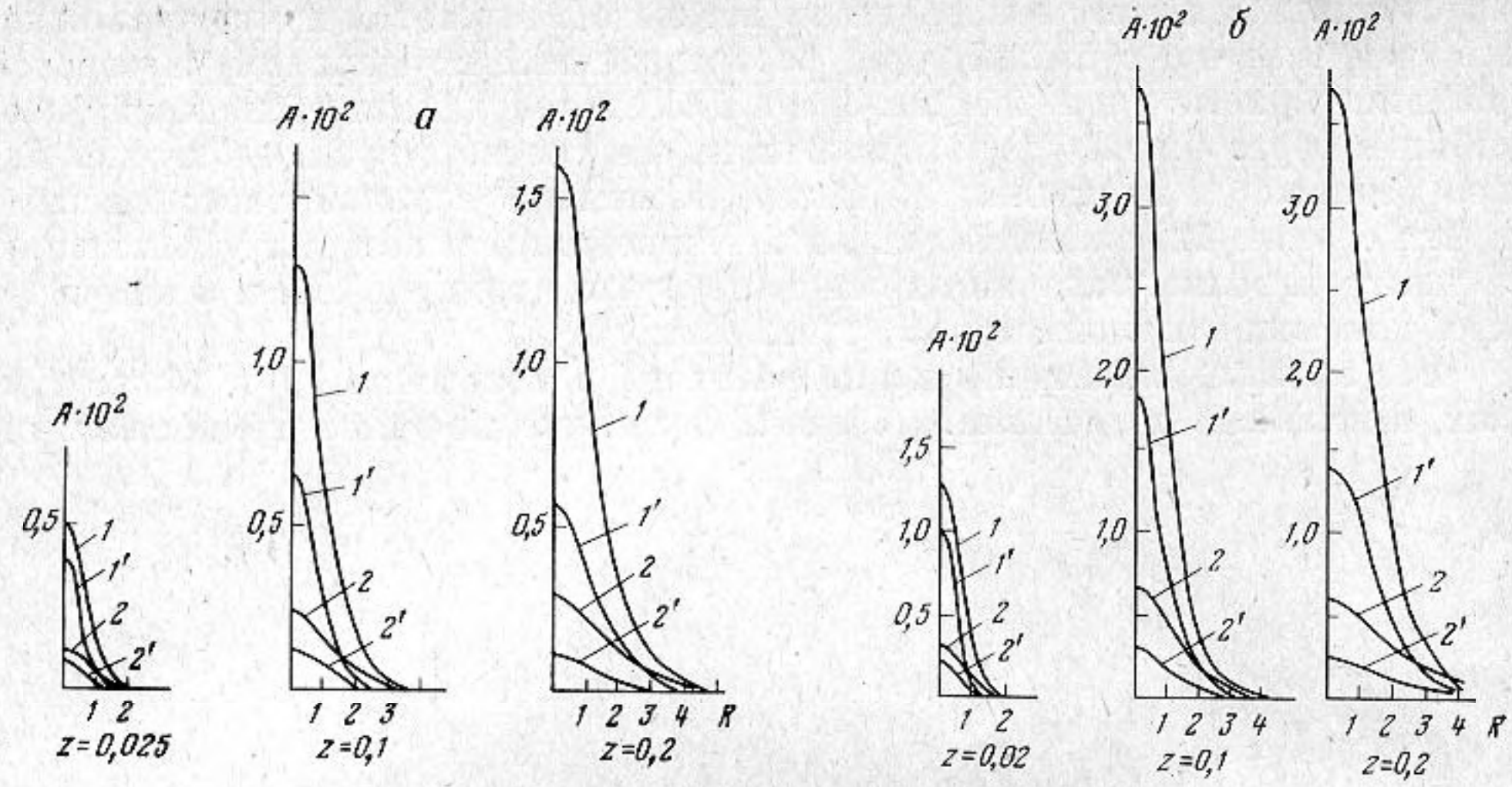
Фиг. 4. Изменение амплитуды волны накачки при распространении на оси гауссова пучка (кривая *1*) и на оси пучка с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени (кривые *2*, *3*, *4*), при значении параметров $N=3{,}25$ – кривые *1*, *2*, *3*; $N=10$ – кривая *4*, $\delta=0$ – кривые *1*, *2*, *4*; $\delta=1$ – кривая *3*

Фиг. 5. Амплитудное распределение разностной волны в гауссовом пучке при значении параметров $N=1$, $\delta=1$, $k=0{,}3$ на расстоянии $z=0{,}025$ – кривая *1*, $z=0{,}25$ – кривая *2*, $z=0{,}5$ – кривая *3*, $z=0{,}6$ – кривая *4*

на максимума $\mathscr{A}$ уменьшается и сдвигается влево (кривые *2*, *3*, а также *2′*, *3′* на фиг. 2, *а* и *б*, 3, *а* и *б*). В гауссовом пучке при $N=1$ появляется максимум у $\tilde{\mathscr{A}}$ (кривая *2* на фиг. 1). Рассмотренные значения коэффициента поглощения вносят несущественный вклад в уменьшение амплитуды волны накачки на расстояниях, равных длине прожекторной зоны (кривая *3* на фиг. 4).

Величина амплитуды разностной волны увеличивается с ростом отношения частот k (кривые *1* и *3* для гауссова пучка, *1′*, *2′*, *3′* в пучке с распределением амплитуды по полиному четвертой степени на фиг. 1, а также кривые *1*, *4*, *5* и *1′*, *4′*, *5′* на фиг. 2, *б* и 3, *б* соответствуют разным значениям параметра k).

При увеличении нелинейности возрастает величина максимума (ср. кривые с одинаковыми номерами на фиг. 2, *а* и 3, *а*). При $N=10$ координата максимума меньше, чем при рассмотренных меньших значениях N. Эта координата существенно меньше длины прожекторной зоны, но превосходит расстояние образования ударной волны в соответствующем пучке. Перекачка энергии в гармоники и комбинационные волны из волны накачки при сильной нелинейности приводит к истощению последней (кривая *4* на фиг. 4), что способствует раннему достижению максимума $\mathscr{A}$.



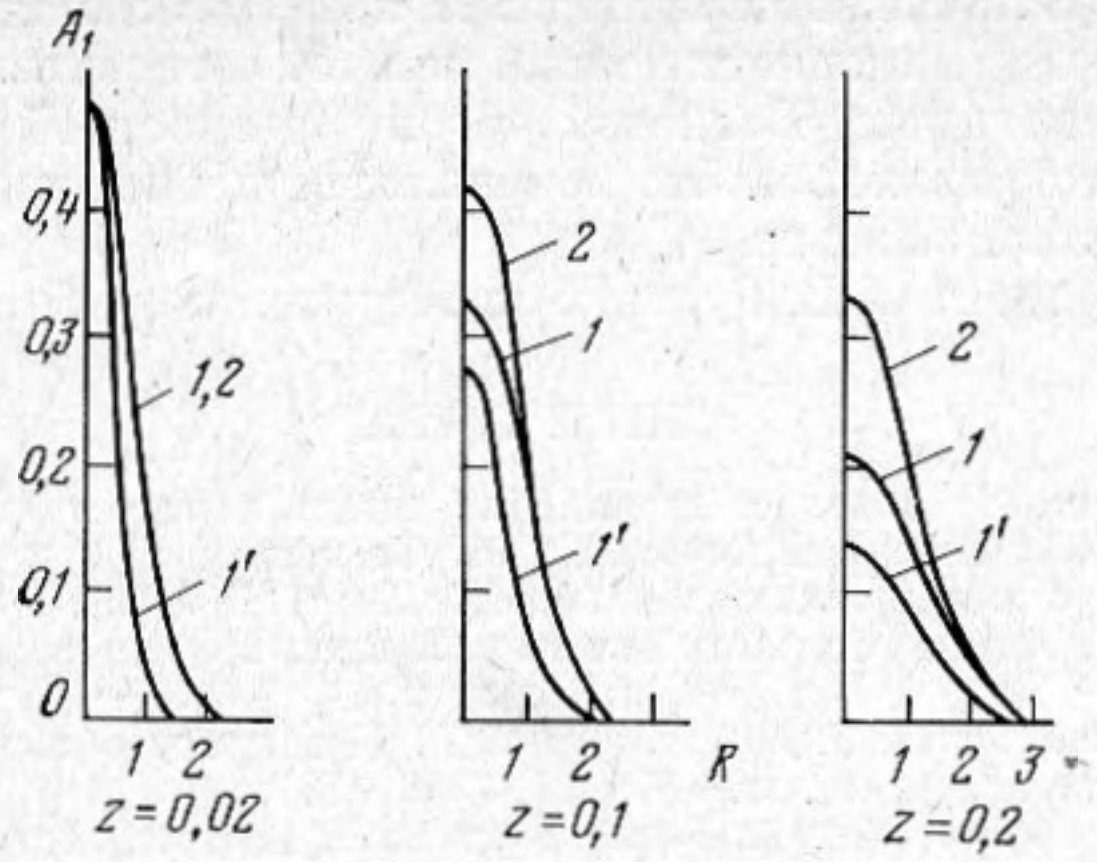
Фиг. 6. Амплитудные распределения разностной волны на разных расстояниях от границы нелинейной среды в гауссовом пучке – кривые *1* и *2* и в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени,– кривые *1'* и *2'* при значении параметров $N=3{,}25$ (*а*) и $N=10$ (*б*), $k=0{,}3$ – кривые *1* и *1'*, $k=0{,}1$ – кривые *2* и *2'*, $\delta=0$

Волна разностной частоты в пучке генерируется в сравнительно узкой приосевой области. По мере распространения эта область расширяется. Фигура 5 иллюстрирует изменение амплитудного распределения при распространении гауссова пучка в диссипативной среде. Динамика изменения амплитудных распределений разностной волны в идеальной среде при различных значениях параметров N и k для обоих пучков показана на фиг. 6, *а* и *б*. Все, что отмечалось выше относительно зависимости $\mathscr{A}$ на оси пучка от амплитудного распределения волны накачки, от значения параметров N и k, полностью относится и к другим точкам поперечного сечения пучка.

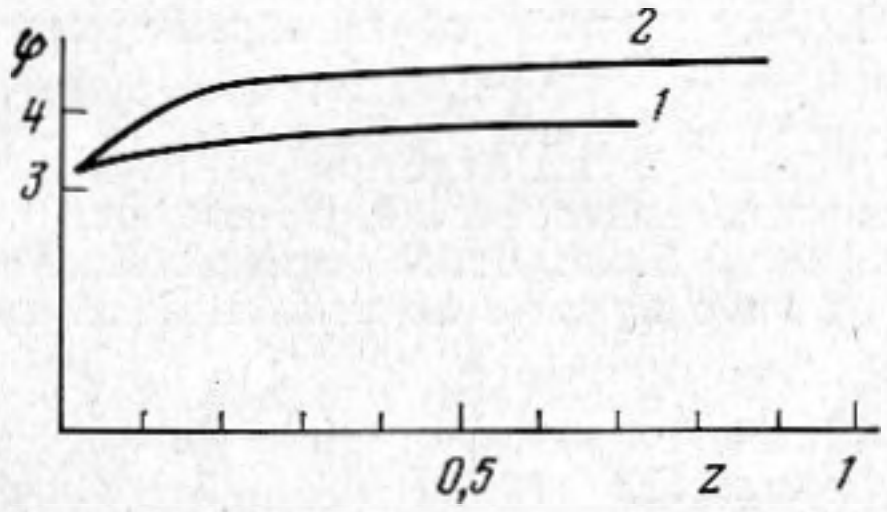
Интересно проследить за изменением амплитудного распределения несущей волны (см. фиг. 7). Если вблизи границы $z=0{,}02$ кривые *1* и *2*, соответствующие гауссову пучку с разным значением параметра N, совпадают полностью, а кривая *1'*, относящаяся к пучку с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени, мало от них отличается, то по мере распространения различие между кривыми становится существенным. Наибольшей оказывается амплитуда волны накачки в гауссовом пучке при $N=3{,}25$ (кривая *2*). Пучок с распределением амплитуды по полиному четвертой степени сильно расходится (кривая *1'*), а $\mathscr{A}_1$, соответствующая гауссову пучку со значением $N=10$, уменьшается из-за нелинейности (кривая *1*). Естественно, что амплитудное распределение волны накачки не чувствительно к изменению параметра k.

Начальная фаза разностной волны φ на оси гауссова пучка изменяется меньше (кривая *1* на фиг. 8), чем в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени (кривая *2* на фиг. 8).

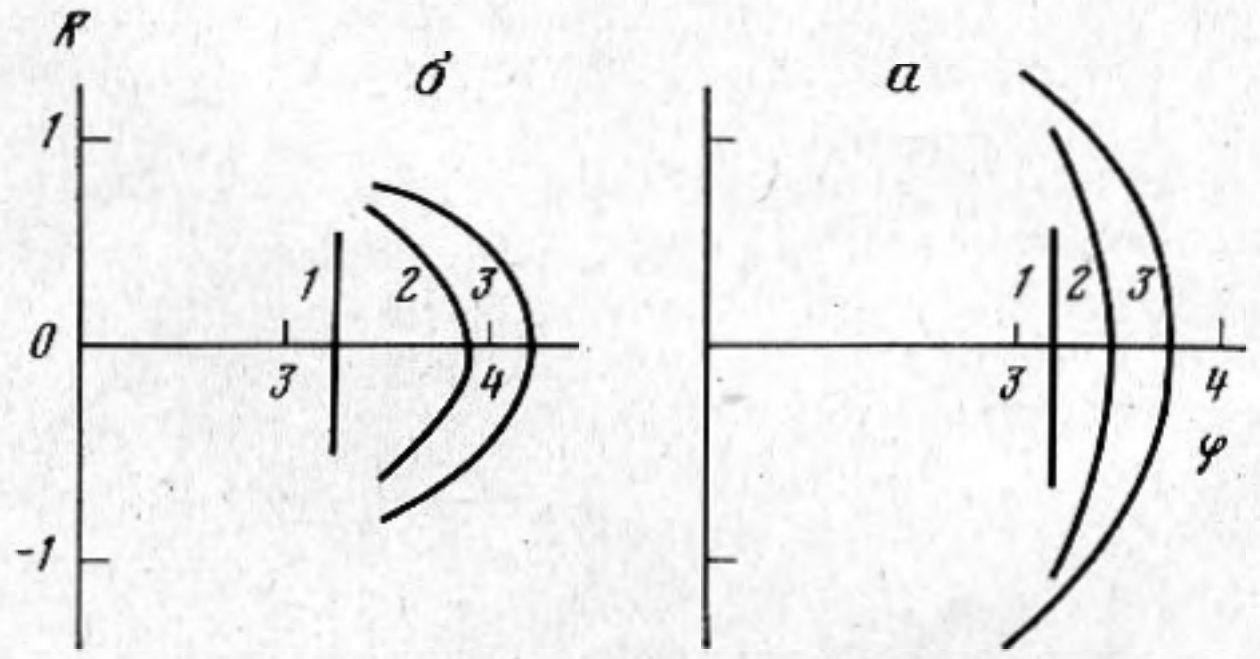
Фазовые распределения разностной волны на разных расстояниях от границы показаны на фиг. 9, *а* в гауссовом пучке и на фиг. 9, *б* в пучке с распределением амплитуды по полиному четвертой степени. Плоский волновой фронт вблизи границы нелинейной среды (кривые *1* на фиг. 9, *а* и *б*) затем искривляется, в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени, волновой фронт искривляется раньше. Заметим, что это искривление происходит на расстояниях $z\sim0{,}03-0{,}05$, т. е. гораздо раньше границы прожекторной зоны (длина прожекторной зоны равна 0,5). Показанные на фиг. 8 и 9 зависимости $\varphi(z)$ и $\varphi(R)$ наблюдаются при всех рассмотренных значениях N и k.



Фиг. 7. Амплитудные распределения волны накачки на разных расстояниях от границы в гауссовом пучке (кривые *1*, *2*) и в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени (кривая *1'*) при $N=10$ (кривые *1* и *1'*) и при $N=3{,}25$ (кривая *2*), $\delta=0$



Фиг. 8. Изменение начальной фазы разностной волны при распространении на оси гауссова пучка (кривая *1*) и пучка с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени (кривая *2*)



Фиг. 9. Волновые фронты разностной волны в гауссовом пучке (*а*) и в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени (*б*), на расстоянии $z=0{,}02$ – кривые *1*, $z=0{,}1$ – кривые *2*, $z=0{,}2$ – кривые *3*

Таким образом, разностная волна, возникающая при нелинейном взаимодействии звуковых пучков, локализована в сравнительно узкой приосевой области, расширяющейся по мере распространения. Амплитуда разностной волны зависит от амплитудного распределения несущих волн, от соотношения нелинейных и дифракционных эффектов, от коэффициента поглощения среды и от отношения частот несущих волн. Изменение амплитуды вдоль направления распространения характеризуется максимумом, координата которого определяется амплитудным распределением

волн накачки и величиной параметров N и δ. Начальная фаза разностной волны вдоль пучка изменяется мало, причем основные изменения происходят вблизи границы. Волновой фронт разностной волны, плоский вначале, затем искривляется. Это искривление происходит гораздо раньше границы прожекторной зоны.

Авторы благодарят О. В. Руденко за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hobak H.* Parametric acoustic transmitting arrays a survey of theories and experiments. Scientific Technical Report No 99, University of Bergen, Norway, 1977.
2. *Мюир Г. Д.* Акустика морских осадков, М., «Мир», 1977, 227.
3. *Westervelt P. J.* Parametric Acoustic Array. J. Acoust. Soc. America, 1963, *35*, 4, 535–537.
4. *Новиков Б. К., Руденко О. В., Солуян С. И.* К вопросу о параметрическом излучателе ультразвука. Акуст. ж., 1975, *21*, 4, 591–597.
5. *Новиков Б. К., Рыбачек М. С., Тимошенко В. И.* Взаимодействие дифрагирующих звуковых пучков и теория высоконаправленных излучателей ультразвука. Акуст. ж., 1977, *23*, 4, 621–626.
6. *Willette J. G., Moffett M. B., Konrad W. S.* Difference-frequency harmonic from saturation – limited parametric acoustic sources. Труды VI Международного симпозиума по нелинейной акустике, ч. 1. Изд-во МГУ, 1976, 308.
7. *Новиков Б. К., Руденко О. В.* Генерация низкочастотных гармоник в поле мощной амплитудно-модулированной волны. Акуст. ж., 1977, *23*, 5, 797–804.
8. *Сутин А. М.* О предельном режиме работы параметрического излучателя ультразвука. Акуст. ж., 1978, *24*, 1, 104–109.
9. *Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Руденко О. В.* Особенности работы мощных параметрических излучателей звука. Акуст. ж., 1978, *24*, 1, 125–127.
10. *Кузнецов В. П.* Уравнения нелинейной акустики. Акуст. ж., 1970, *16*, 4, 548–553.
11. *Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А., Хохлов Р. В.* Нелинейное распространение звукового пучка в недиссипативной среде. Акуст. ж., 1976, *22*, *4*, 487–491.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
Научно-исследовательский
вычислительный центр

Поступила
22 декабря 1978 г.