В табл. 1, 2 представлены собственные частоты x, y цилиндрических резонаторов в режимах холостого хода и короткого замыкания с электрической стороны для различных значений относительной толщины стенки $H=h/a$. Можно отметить, что первый резонанс ($n=1$) является радиальным – параметр k_1a слабо зависит от толщины стенки цилиндра; остальные резонансы ($n>1$) являются в принципе резонансами по толщине – значения k_1h слабо зависят от радиуса цилиндра. Величина $x/2y$ имеет смысл добротности на соответствующем резонансе.

Кроме предельных электрических режимов были выполнены расчеты спектров собственных частот цилиндрического пьезопреобразователя, нагруженного на параллельно подключенные индуктивность L и резистор R. При этом электрическая цепь характеризовалась двумя параметрами:

$$m=\omega_э/\omega_1 \text{ и } Q=R\omega_э C_п, \text{ где } \omega_э^2=1/LC_п;\ \omega_1=c_1/a.$$

На фигуре приведены спектры собственных частот пьезоцилиндров, имеющих разную толщину стенки, в виде семейств изолиний параметров m и Q, построенных в координатах x, y. Сплошные линии соответствуют постоянным Q, штриховые – постоянным m. Отмечены характерные точки спектров: режим холостого хода ХХ, короткого замыкания КЗ и кратного резонанса КР.

Полученные результаты являются основой для анализа импульсного режима работы нагруженного цилиндрического пьезопреобразователя.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Касаткин Б. А., Лебедев В. Г.* Особенности спектра собственных частот нагруженного пьезопреобразователя. Докл. IX Всесоюзн. акуст. конф., 1977, секция П, в-4, 39–41.
2. *Дианов Д. Б., Кузьменко А. Г.* Расчет цилиндрического пьезокерамического преобразователя, совершающего радиально-симметричные колебания. Акуст. ж., 1970, *16*, 1, 42–48.

Всесоюзный научно-исследовательский институт физико-технических и радиотехнических измерений
Хабаровский филиал
Гидрофизический центр

Поступила 6 февраля 1979 г.

УДК 534.222

ТЕЧЕНИЕ ВБЛИЗИ ПЛАСТИНЫ, ПО КОТОРОЙ РАСПРОСТРАНЯЕТСЯ ПРОДОЛЬНАЯ ВОЛНА ДЕФОРМАЦИИ

Г. И. Полищук

Стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости, создаваемое затопленной неограниченной, гибкой, но нерастяжимой пластиной, по которой распространяется поперечная синусоидальная волна смещения малой амплитуды, изучено в работах [1, 2]. Оказалось, что направление средней гидродинамической скорости всюду совпадает с направлением распространения волны деформации и в системе координат, связанной с пластиной. Скорость эта отлична от нуля на бесконечности. Это означает, что пластина перемещается в жидкости (плывет) против направления распространения волны.

Впервые скорость такого перемещения вычислена в работе [3]. Там же сообщено о том, что пластина, в волнообразной деформации которой преобладают продольные колебания, будет плыть по направлению распространения волны со скоростью U, равной

$$U=c[\varepsilon^2(3\beta-1)/4\beta+o(\varepsilon^2)]. \tag{1}$$

Здесь c – фазовая скорость волны деформации, $\varepsilon=kb$ – относительная амплитуда смещения, $k=2\pi/\lambda$ – волновое число, b – амплитуда смещения, $\beta=\sqrt{(1+\sqrt{1+R^2})/2}$, $R=\omega/\nu k^2$ – колебательное число Рейнольдса, ω – циклическая частота, ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости. Поле гидродинамических скоростей в работе [3] не рассматривалось.

В настоящей заметке рассчитано поле скоростей стационарного течения вязкой, несжимаемой жидкости, возникающего в полупространстве $y>0$, ограниченном при $y=0$ тонкой непроницаемой пластиной, продольно-деформируемой по закону бегущей волны. Здесь и далее все величины безразмерные. За единицы длины и времени приняты величины k^{-1} и ω^{-1} соответственно.

Ориентируем ось x декартовой системы координат x, y, z, связанной с пластиной, по направлению распространения волны деформации. Смещение $\mathbf{s}(\xi, t)$ гидродинамической частицы, прилипшей к пластине и имеющей в невозмущенном состоянии координату $x=\xi$, при малой гармонической по времени продольной деформации

пластины равно

(2) $$\mathbf{s}(\xi, t)=\varepsilon \operatorname{Re}\{E(\xi)e^{-it}\}\mathbf{e}_1,$$

где $0<\varepsilon\ll 1$, $\mathbf{e}_1$ – орт оси x, t – время, $E(\xi)$ – функция, описывающая распределение комплексной амплитуды смещения вдоль пластины.

Предположим, что возмущения, вызываемые деформацией пластины в жидкости, не зависят от координаты z, и будем считать, что эйлерова скорость жидкости $\mathbf{q}$ имеет вид

$$\mathbf{q}=u(x, y, t)\mathbf{e}_1+v(x, y, t)\mathbf{e}_2,$$

где $\mathbf{e}_2$ – орт оси y, u и v – компоненты скорости $\mathbf{q}$.

Условия прилипания и непроницаемости на границе $y=0$ запишутся так:

(3) $$u(\xi+s(\xi, t), 0, t)=s_t(\xi, t),$$

(4) $$v(x, 0, t)=0.$$

Здесь и далее нижний буквенный индекс означает производную по соответствующему аргументу.

Уравнение для безразмерной функции тока $\psi(x, y, t)$, как известно, имеет вид

(5) $$\Delta\psi_t-R^{-1}\Delta\Delta\psi=[\psi, \Delta\psi].$$

Здесь введено обозначение $[f, g]=\partial(f, g^*)/\partial(x, y)$, Δ – оператор Лапласа, а звездочка означает операцию комплексного сопряжения. Дополним уравнение (5) условиями прилипания (3), непроницаемости (4) и ограниченности скорости на бесконечности, записанными для функции ψ:

(6) $$\psi_y(\xi+s(\xi, t), 0, t)=s_t(\xi, t);\ \psi_x(x, 0, t)=0;$$
$$|\psi_x(x, \infty, t)|;\ |\psi_y(x, \infty, t)|<\infty.$$

Предположим следующую структуру функции ψ:

(7) $$\psi=\operatorname{Re}\{\varepsilon\Pi^{(1)}e^{-it}+\varepsilon^2(\Pi^{(2)}e^{-2it}+\Pi^{(0)})+o(\varepsilon^2)\},$$

где $\Pi^{(n)}$ – функции лишь координат ($n=0, 1, 2$). Подстановка выражения (7) в уравнение (5), осреднение по времени и учет условий (6) с сохранением лишь членов второго порядка малости по ε приводят к граничной задаче для функции $\Pi^{(0)}$:

(8) $$\Delta\Delta\Pi^{(0)}=-\frac{R}{2}[\Pi^{(1)}, \Delta\Pi^{(1)}];$$
$$\nabla\Pi^{(0)}=\frac{i}{2}[\Pi^{(1)}, \nabla\Pi^{(1)}] \quad \text{при} \quad y=0; \quad |\Pi_x^{(0)}|,\ |\Pi_y^{(0)}|<\infty \ \text{при}\ y\to\infty,$$

где $\Pi^{(1)}$ – решение следующей граничной задачи:

(9) $$\Delta\Pi^{(1)}-R^{-1}\Delta\Delta\Pi^{(1)}=0;$$
$$\nabla_\perp\Pi^{(1)}(x, 0)=-iE(x)\mathbf{e}_1; \qquad |\Pi_x^{(1)}(x, \infty)|,\ |\Pi_y^{(2)}(x, \infty)|<\infty.$$

Символ $\perp$ означает операцию поворота векторного поля в плоскости (x, y) на угол $\pi/2$ по направлению движения часовой стрелки.

Ограничимся случаем $E(\xi)=ie^{i\xi}$, т. е. скорость частиц в прилипшем слое изменяется по закону бегущей волны $\mathbf{s}_t(\xi, t)=\varepsilon\cos(\xi-t)\mathbf{e}_1$. Течение, вызываемое стоячей волной смещения ($E(\xi)=i\sin\xi$), рассчитано в работе [4]. Решая последовательно задачи (9) и (8), получаем

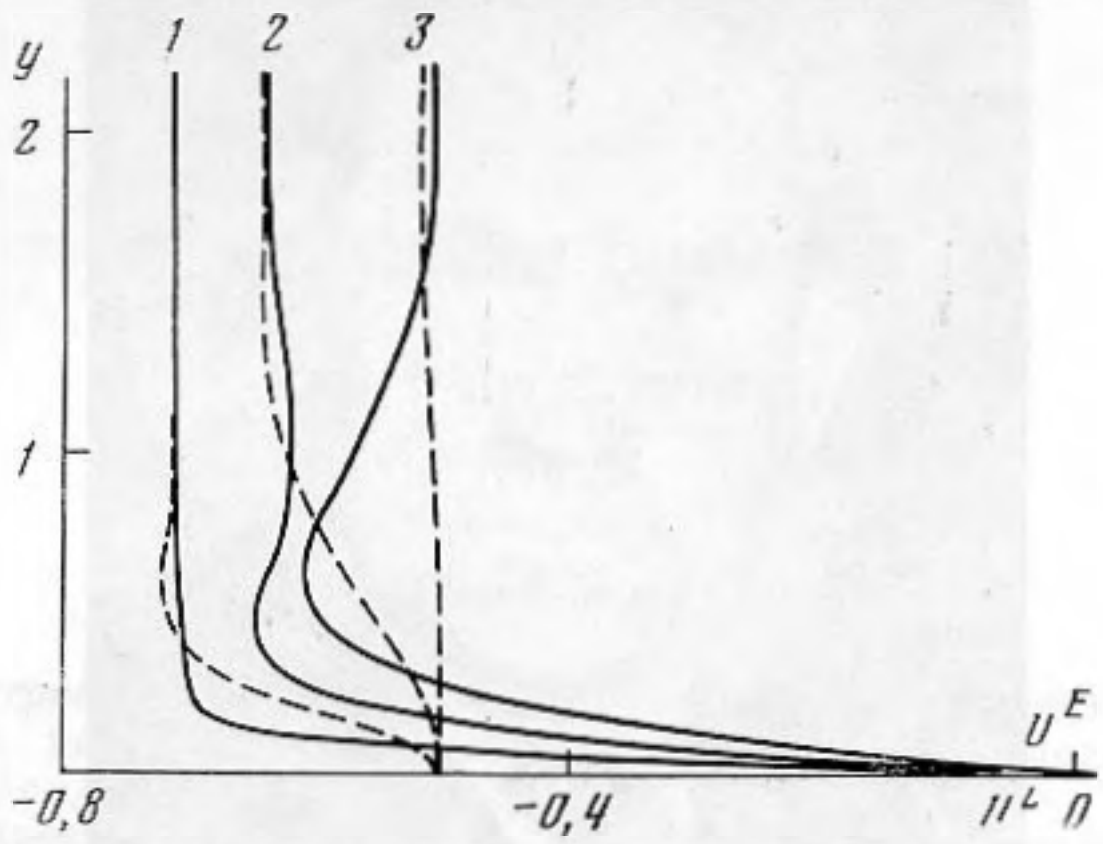
$$\Pi^{(1)}=\frac{e^{-y}-e^{-\alpha y}}{\alpha-1}e^{ix};$$

$$\Pi_y^{(0)}=\frac{iR}{2}\frac{\alpha^*+1}{\alpha-1}\left[\frac{e^{-(1+\alpha^*)y}}{(1+\alpha^*)^2}-\frac{e^{-(\alpha+\alpha^*)y}}{(\alpha+\alpha^*)^2}\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\alpha-\alpha^*}{1+\alpha^*}-\frac{(1+\alpha)(1+\alpha^*)}{(\alpha+\alpha^*)^2}\right],$$

где $\alpha=\sqrt{1-iR}$. Тогда получается, что средняя эйлерова скорость $\mathbf{Q}^E$ имеет лишь x-компоненту U^E и

(10) $$U^E=\overline{\psi}_y=\varepsilon^2\operatorname{Re}\Pi_y^{(0)}=\frac{\varepsilon^2}{4\beta}[1-3\beta+(1+\beta)e^{-2\beta y}-$$
$$-2\beta e^{-(1+\beta)y}\cos(\sqrt{\beta^2-1}\,y+\operatorname{arctg}\sqrt{\beta^2-1})].$$

Здесь черта означает операцию осреднения по времени, а $\beta = \mathrm{Re}\,\alpha = \sqrt{(1+\sqrt{1+R^2})/2}$. Можно показать, что средняя лагранжева скорость $\mathbf{Q}^L$ и средняя эйлерова ско-



Профили безразмерных (отнесенных к скорости распространения волны деформации) средних эйлеровой U^E (штриховые линии) и лагранжевой U^L (сплошные линии) скоростей при различных значениях колебательного числа Рейнольдса R: *1* – 10^2; *2* – 10; *3* – 1

рость $\mathbf{Q}^E$ для функции ψ вида (7) связаны следующим соотношением:

$$\mathbf{Q}^L = \mathbf{Q}^E - \varepsilon^2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{i}{2}\,[\Pi^{(1)}, \nabla_\perp \Pi^{(1)}]\right\} + \mathbf{o}(\varepsilon^2).$$

Отсюда для единственной отличной от нуля x-компоненты U^L скорости $\mathbf{Q}^L$ получается

$$U^L = U^E + \varepsilon^2 \delta(x) + o(\varepsilon^2), \tag{11}$$

где

$$\delta(x) = [e^{-2y} + \beta^2 e^{-2\beta y} - \beta(\beta+1)\,e^{-(\beta+1)y}\cos(\sqrt{\beta^2-1}\,y - \mathrm{arctg}\,\sqrt{\beta^2-1})]/2\beta(\beta-1).$$

Профили скорости U^E и U^L при различных значениях колебательного числа Рейнольдса R изображены на фигуре. Если при малых R скорость U^E изменяется монотонно вдоль оси y, то при больших значениях R монотонность эта нарушается. Подобная закономерность наблюдается и для средней эйлеровой скорости потока, возникающего у пластины, вдоль которой распространяется поперечная волна смещения [1]. Однако монотонность там нарушается уже при $R=10$. Немонотонность функции U^L, напротив, проявляется лишь при небольших значениях R. Средние скорости U^E и U^L всюду в области $y>0$ отрицательны.

Из выражений (10) и (11) следует

$$U^L(\infty) = U^E(\infty) = -\varepsilon^2(3\beta-1)/4\beta + o(\varepsilon^2),$$

что соответствует результату (1).

Таким образом, при возбуждении в бесконечной тонкой пластине бегущей продольной волны смещения в окружающей пластину жидкости возникает стационарное течение. Линии тока его параллельны пластине и ориентированы против направления распространения волны. Геометрия профиля скорости потока существенно зависит от величины колебательного числа Рейнольдса. Результатом указанной деформации является перемещение пластины в вязкой жидкости, т. е. плавание ее без изменения формы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tanaka K.* Induced flow due to wavy motion of a wall. I. J. Phys. Soc. Japan, 1977, *42*, 1, 297–305.
2. *Tanaka K.* Induced flow due to wavy motion of a wall. II. J. Phys. Soc. Japan, 1977, *42*, 5, 1752–1758.
3. *Tuck E. O.* A note on a swimming problem. J. Fluid Mech., 1968, *31*, part 2, 305–308.
4. *Полищук Г. И.* Стационарные потоки над бесконечной пластиной, в которой возбуждена продольная стоячая волна. Акуст. ж., 1979, *25*, 3, 434–438.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова
Научно-исследовательский
физический институт

Поступила
11 августа 1978 г.
После исправления
13 июня 1979 г.