УДК 534.222

КРИТЕРИИ ОГРАНИЧЕННОСТИ И ПЕРИОДИЧНОСТИ ВОЛНОВОГО ДВИЖЕНИЯ ПРИ ПРОСТРАНСТВЕННОМ СПОСОБЕ ЕГО ОПИСАНИЯ

В. И. Полищук, Г. И. Полищук

При решении многих задач механики сплошных сред, как известно, удобно пользоваться пространственным («эйлеровым») способом описания движения, при котором в качестве независимых переменных выбирают координаты фиксированной точки пространства x, y, z и время t (здесь и далее используются только безразмерные величины). Зачастую оказывается, что эйлерово поле скоростей $V(x, y, z, t)$ в той или иной задаче описывается функцией $v(x-t, y, z)$, по конкретному виду которой затруднительно, не проводя перехода (не всегда реально осуществимого) к отсчетному способу описания (в частности, к «лагранжеву»), указать, как же движутся отдельные частицы среды. Так, если v — периодическая по времени функция и среднее ее значение равно нулю, то это еще не означает, что и движение частиц среды периодично по t, и даже не означает, что величина их смещения ограничена. А если среднее по времени значение функции v отлично от нуля, то отсюда еще не следует вывод, что имеет место дрейф частиц. Действительно, средняя эйлерова скорость, вообще говоря, не отражает истории перемещения отдельной материальной частицы: ее значение получается путем осреднения по t скоростей различных частиц, проходящих через фиксированную точку пространства. Однако, как замечено в работе [1], имеются исследования, в которых верно рассчитанные поля эйлеровых скоростей (в частности, в несжимаемой жидкости) интерпретируются неправильно вследствие того, что при истолковании полученных результатов смешиваются пространственная и отсчетная точки зрения: о характере движения частиц судят по осредненным по времени полям эйлеровых скоростей.

Заметим, что подобный подход, являясь, разумеется, неверным, тем не менее в задачах «первого приближения» (например, в линейной акустике) дает правильный результат, т. е. результат, точность которого соответствует точности указанного приближения. В работе [2] Н. Н. Андреев указывал на необходимость четко различать эйлеров и лагранжев способы описания движения уже «во всех вопросах второго приближения».

Данная заметка посвящена кинематике частиц сплошной среды, в которой возбуждено одномерное волновое движение, и ставит целью дать простой рецепт установления таких важных кинематических характеристик, как финитность и периодичность движения частиц среды по эйлерову полю скоростей $v(x-t)$ без перехода к отсчетному способу описания движения. (Напомним, что движение называется финитным, если при каждом фиксированном ξ функция $q_t(\xi)$ ограничена, т. е. ни одна частица не уходит с течением времени сколь угодно далеко от своего исходного положения ξ.)

Рассмотрим одномерное движение сплошной среды вдоль координатной оси x. Положение в момент времени t некоторой частицы среды, координата которой при отсутствии возмущения равна ξ, обозначим через $q_t(\xi)$:

$$x=q_t(\xi).$$

В механике сплошной среды предполагается, что движение однозначно обратимо в каждый момент времени [3], т. е. функция q_t имеет обратную Q_t и

$$q_t'(\xi)>0. \tag{1}$$

Штрих означает производную по аргументу, стоящему в скобках.

Условие (1) имеет простой геометрический смысл: возможно лишь такое одномерное движение среды, при котором вектор, соединяющий две частицы и параллельный оси x, не может с течением времени ни обратиться в нуль, ни изменить своей ориентации на противоположную. Это условие соответствует аксиоме о взаимной непроницаемости частиц сплошной среды, именуемой обычно просто «аксиомой непроницаемости» [3].

Оказываются справедливыми следующие три утверждения.

1. Инвариантность волнового движения. Для того, чтобы скорость жидкости в эйлеровых переменных x, t изменялась по закону бегущей волны $v(x-t)$, необходимо и достаточно, чтобы смещение частиц среды происходило по закону бегущей волны $s(\xi-t)$ в переменных ξ, t.

Действительно, если среда деформируется так, что смещение частиц описывается функцией $s(\xi-t)$, т. е.

$$q_t(\xi)-\xi=s(\xi-t), \tag{2}$$

то $s(\xi)=q_0(\xi)-\xi$, а выражение (2) может быть переписано в виде

$$q_t(\xi)=t+q_0(\xi-t) \tag{3}$$

или

(4) $\xi - t = Q_0(x-t)$.

Из определения эйлеровой скорости $V(x, t)$ и равенств (3) и (4) получается

(5) $V(x, t) = \dot{q}_t(Q_t(x)) = 1 - q_0'(Q_0(x-t))$.

Т. е. эйлерова скорость изменяется по закону бегущей волны $v(x-t)$, где

(6) $v(x-t) = 1 - q_0'(Q_0(x-t))$.

Доказательство необходимости также не представляет затруднений.

2. Критерий финитности движения. Для финитности движения, описываемого функцией $v(x-t)$, необходимо и достаточно ограниченности функции

$I(x) = \int\limits_0^x v(\alpha)(1-v(\alpha))^{-1}\, d\alpha$ и положительности функции $1-v$.

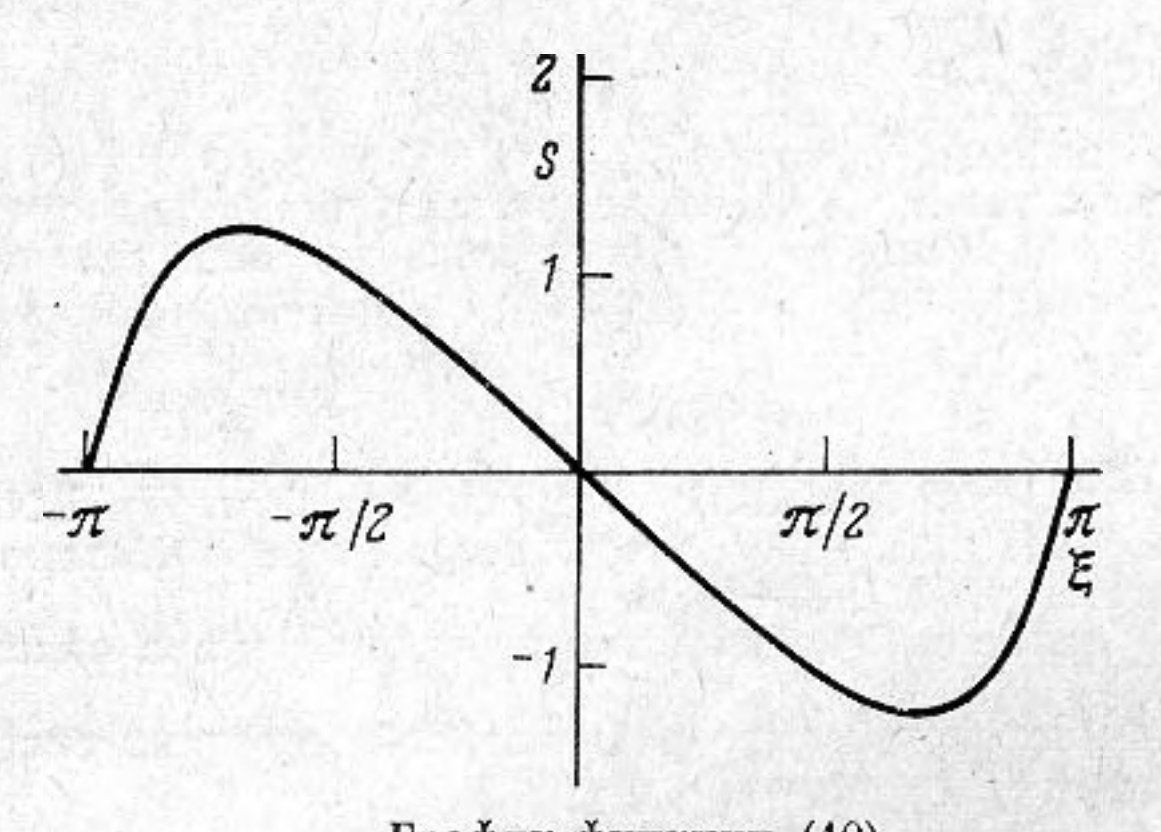

График функции (10)

Действительно, равенство (6) можно переписать так:

$$1 - v(\sigma) = q_0'(Q_0(\sigma)),$$

где $\sigma = x - t$. Тогда, согласно неравенству (1), получается, что $1-v>0$. Инвариантность волнового движения и равенство (2) позволяют записать соотношение (5) в следующем виде:

(7) $v(\xi + s(\xi - t) - t) = \dot{s}(\xi - t)$.

Решая уравнение (7), с использованием подстановки $u = \xi - t + s(\xi - t)$ получаем

(8) $s(\tau) = \int\limits_0^{\tau + s(\tau)} v(\alpha)(v(\alpha) - 1)^{-1}\, d\alpha + \text{const}$,

где $\tau = \xi - t$, α — переменная интегрирования. Отсюда следует, что финитность движения равносильна ограниченности интеграла $I(x)$.

Из анализа выражения (8) с учетом положительности функции $1-v$ вытекает справедливость следующего, последнего и, как мы увидим далее на примерах, основного утверждения.

3. Критерий периодичности движения. Для периодичности движения, описываемого функцией $v<1$, необходимо и достаточно периодичности функции v и равенства среднего значения функции $(1-v)^{-1}$ единице.

Наконец, приведем примеры использования полученных критериев. Для функции v, периодичной с периодом T, введем обозначение $B = \frac{1}{T}\int\limits_0^T (1-v(\alpha))^{-1}\, d\alpha$.

а) Эйлерова скорость периодична и не имеет постоянной составляющей:

$$v(\sigma) = \varepsilon \cos \sigma; \quad \varepsilon < 1; \quad \sigma = x - t.$$

Периодично ли движение частиц среды? Вычисление величины B дает

(9) $B = (2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} (1 - \varepsilon \cos \alpha)^{-1}\, d\alpha =$

$$= (i\pi)^{-1} \oint (\varepsilon\beta^2 - 2\beta + \varepsilon)^{-1}\, d\beta = (1-\varepsilon^2)^{-1/2}.$$

Здесь обозначено $\beta=e^{i\alpha}$. Так как $B\neq 1$, интеграл $I(x)$ оказывается неограниченной функцией и, значит, рассматриваемое движение не будет даже финитным.

б) Эйлерова скорость периодична и имеет постоянную составляющую:

$$v(\sigma)=\sqrt{3}\cos\sigma-1.$$

Очевидно, что $v<1$. Воспользовавшись результатом (9), получим

$$B=\frac{1}{2}(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}(1-(\sqrt{3}/2)\cos\alpha)^{-1}\,d\alpha=1,$$

т. е. движение частиц среды оказывается периодичным с периодом, равным 2π.

И в самом деле, если выполнить осуществимый для данного примера переход к отсчетному способу описания движения среды, разрешая для этого уравнение (7) относительно функции s, то получится, что смещение частиц описывается 2π — периодической функцией $s(\xi-t)$, где функция $s(\xi)$ на интервале $|\xi|<\pi$ равна $S(\xi)$:

$$S(\xi)=2\,\mathrm{arctg}\,((2-\sqrt{3})\,\mathrm{tg}\,\xi/2)-\xi. \tag{10}$$

график которой изображен на фигуре.

Последний пример, таким образом, показывает, что наличие стационарной составляющей в эйлеровом поле скоростей не означает еще наличия дрейфа (стационарного в среднем перемещения) частиц среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jaffrin M. Y., Shapiro A. H.* Peristaltic pumping. Ann. Rev. Fluid Mech., vol. 3, Palo Alto, California, 1971, p. 13—36. (русск. перев. в сб.: Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1972, 5, 88—108).
2. *Андреев И. Н.* О некоторых величинах второго порядка в акустике. Акуст. ж., 1955, *1*, 1, 3—11.
3. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М., «Мир», 1975.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова,
Физический факультет

Поступила
16 мая 1979 г.

УДК 534.232

ОБ ИМПЕДАНЦЕ ИЗЛУЧЕНИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПРИ РАЗЛИЧНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

Г. К. Скребнев

В практике часто встречаются случаи, когда круглые пластины, закрепленные по контуру, совершают колебания изгиба, излучая в окружающую среду. Правильное определение параметров этого излучения зависит от точности учета распределения колебаний поверхности пластины, которое в свою очередь обусловливается характером закрепления пластин по контуру.

В работе [1] методом, предложенным Рэлеем, были вычислены коэффициенты активных и реактивных составляющих импеданца излучения для двух случаев идеального закрепления контура пластины – жестко защемленного и свободно опертого, которые сопоставлены с результатами расчета для равновеликого круглого поршня. Характерным для обоих случаев является закрепление контура пластины, исключающее его поступательное перемещение.

Определим импеданц одностороннего излучения круглой пластины, находящейся в безграничном жестком экране, контур которой закреплен упруго как относительно вращательных, так и поступательных перемещений, воспользовавшись методом, изложенным в работе [2]. Собственные значения и систему собственных функций, описывающих нормальную составляющую смещения пластины, необходимые для определения сил реакции среды и скорости колебаний центра приведения пластины (точка O), получим в результате решения задачи о колебаниях пластины в вакууме при упругом закреплении контура.

Такая ситуация для пластины характеризуется силовыми краевыми условиями (фиг. 1) (M_a – момент в каждой точке контура пластины, возникающий как реакция на его вращение, Q_a – сила, возникающая как реакция на поступательное перемещение контура), которые определяют форму колебаний пластины. При осесимметричных колебаниях решение, характеризующее пространственное распределение ко-