

УДК 534.21 : 539.31 : 548.1.021

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ И РАСЧЕТ СЕЧЕНИЙ ВОЛНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ В АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Песляк М. Ю.

Доказано существование у волновой поверхности в анизотропной однородной среде особенностей типа «ласточкин хвост», определяющих направления, характеризующиеся наимедленным затуханием амплитуды квазипоперечной волны. Показано, что упрощающее предположение, использовавшееся ранее для изучения волновой поверхности с помощью сечений плоскостями симметрий, не всегда справедливо. Сформулирован критерий необходимости дополнительных расчетов. Они произведены для двух характерных кристаллов кубической сингонии; на их основе построены полные сечения волновой поверхности.

Распространение упругих волн в анизотропной среде от точечного источника описывается системой линейных уравнений [1, 2]

$$(1) \quad c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i \partial x_j} - \rho \frac{\partial^2 u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = f_i e^{-i\omega t} \delta(\mathbf{x}),$$

где  $c_{ijkl}$  — тензор коэффициентов упругости,  $\rho$  — плотность,  $\omega$  — частота. Решение (1) можно получить в виде [3]

$$(2) \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = e^{-i\omega t} \omega \int_S e^{i\omega(\mathbf{p}, \mathbf{x})} H((\mathbf{p}, \mathbf{x})) \hat{L}(\mathbf{p}) \mathbf{f} ds,$$

где

$$\hat{L}(\mathbf{p}) = -\frac{1}{8\pi^2} \sum_{j=1}^3 \frac{\mathbf{e}_j(\mathbf{p}) \times \mathbf{e}_j^3(\mathbf{p})}{|\nabla v_j(\mathbf{p})|}.$$

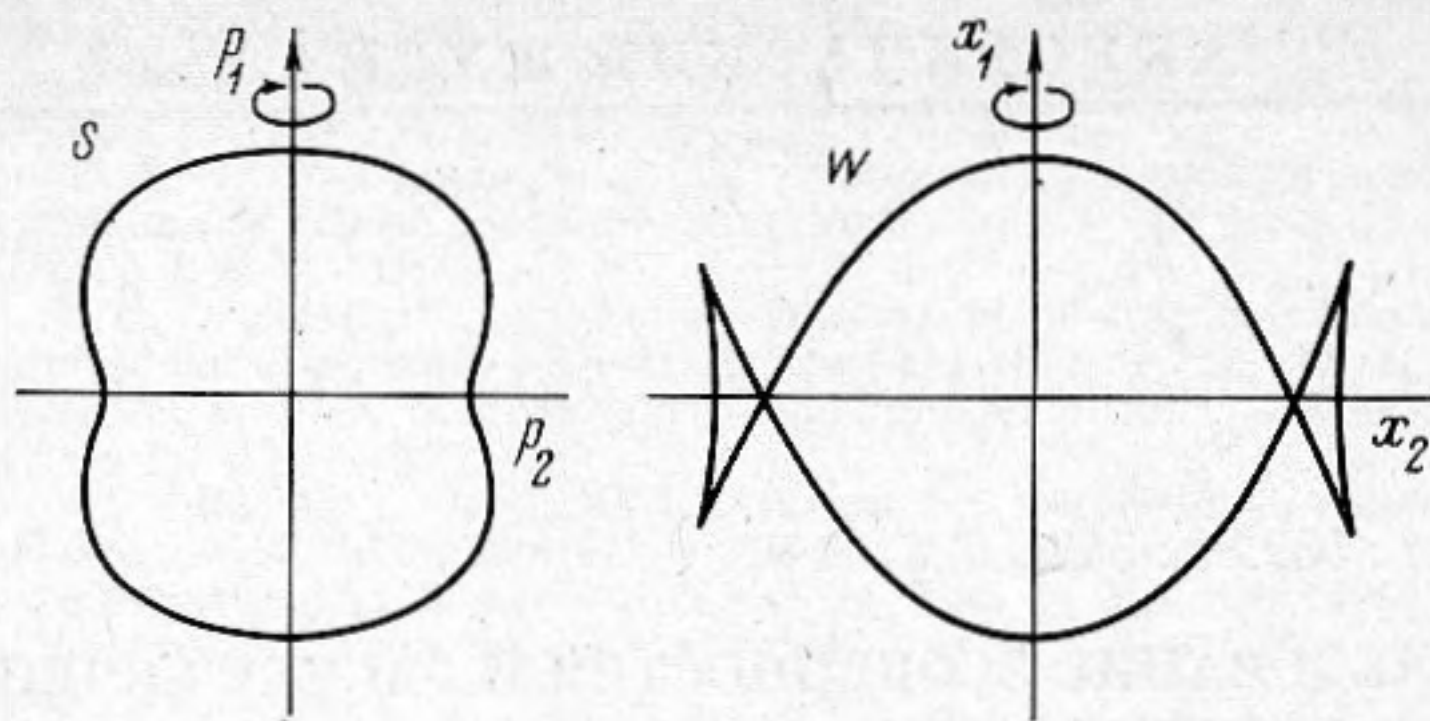
$\rho v_j^2(\mathbf{p})$  — собственные значения;  $\mathbf{e}_j(\mathbf{p})$  — собственные векторы тензора Кристоффеля  $M(\mathbf{p})$ , который имеет вид  $M_{ik} = c_{ijkl} p_j p_l$ ;

$$H(u) = \begin{cases} 1, & u \in [0, t] \\ 0, & u \notin [0, t] \end{cases}.$$

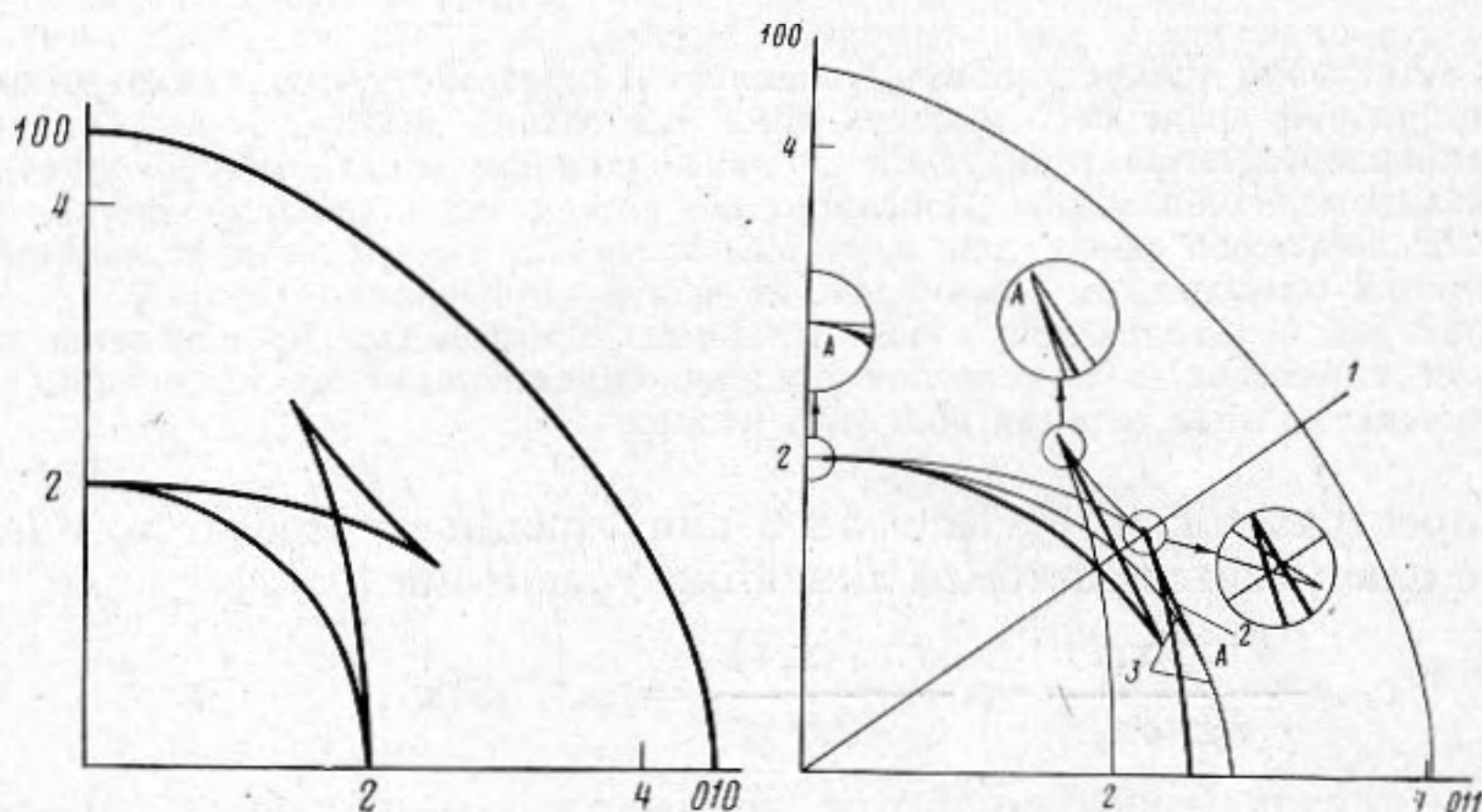
(3)  $S = \{\mathbf{p}: F(\mathbf{p}) \equiv \det |M(\mathbf{p}) - \rho| = 0\}$  — поверхность рефракции состоит из всех точек  $\mathbf{p}$  в пространстве обратных скоростей  $R_p^3$ , таких, что матрица  $M(\mathbf{p}) - \rho$  вырождена.

Скоростями распространения квазипродольной и квазипоперечных волн в анизотропной среде по направлению  $\mathbf{n}$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$  являются  $v_1(\mathbf{n})$  и  $v_2(\mathbf{n})$ ,  $v_3(\mathbf{n})$  соответственно, а смещения при их прохождении происходят по направлениям  $\mathbf{e}_j(\mathbf{n})$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Поверхность рефракции может быть также определена [1, 2], как поверхность обратных скоростей, и получена отложением по каждому направлению  $\mathbf{n}$  в пространстве  $R_p^3$  векторов  $v_j^{-1}(\mathbf{n}) \mathbf{n}$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

Аналогично [2, 4] рассмотрим асимптотику (2) по  $\tau = |\mathbf{x}_0| \omega / v \gg 1$ , где  $v$  — скорость распространения квазипродольных волн по направлению  $\mathbf{x}_0$ .



Фиг. 1. Поверхности вращения  $S$  и  $W$



Фиг. 2. Сечения волновой поверхности кристалла PbS плоскостями симметрии (км/с):  $a$  — координатной;  $b$  — диагональной;  $1$  — акустическая ось;  $2, 3$  — кривые, соответствующие кривым на фиг. 4

Что соответствует изучению а) скорости затухания упругого возмущения по мере удаления от источника колебаний; б) зависимости амплитуды упругого возмущения на фиксированном расстоянии от источника при росте частоты его колебаний. Стационарные точки интеграла (2) находятся из условия

$$(4) \quad \mathbf{n}(\mathbf{p}_0) \parallel \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{p}_0 \in S,$$

где  $\mathbf{n}(\mathbf{p}) = \nabla F(\mathbf{p}) / |\nabla F(\mathbf{p})|$ . Геометрически это означает, что нормаль к поверхности рефракции в точке  $\mathbf{p}_0$  параллельна вектору  $\mathbf{x}_0$ . Пусть  $x_{01} \neq 0$  и  $g(\mathbf{p}) = (\mathbf{p}, \mathbf{x}_0) v / |\mathbf{x}_0|$  с подстановкой  $p_1 = p_1(p_2, p_3)$ , где уравнение поверхности  $S(3)$  разрешается относительно  $p_1$  в окрестности стационарной точки. И пусть, например, плоскость симметрии кристалла  $\{x_3 = 0\}$ , тогда плоскостью симметрии поверхности рефракции  $S$  является  $\{p_3 = 0\}$  и, следовательно,  $g(p_2, p_3) = g(p_2, -p_3)$ . Для направлений  $\mathbf{x}_0$  с  $x_{03} = 0$  всегда найдется стационарная точка из условия (4) с  $p_{03} = 0$ . В ее окрестности

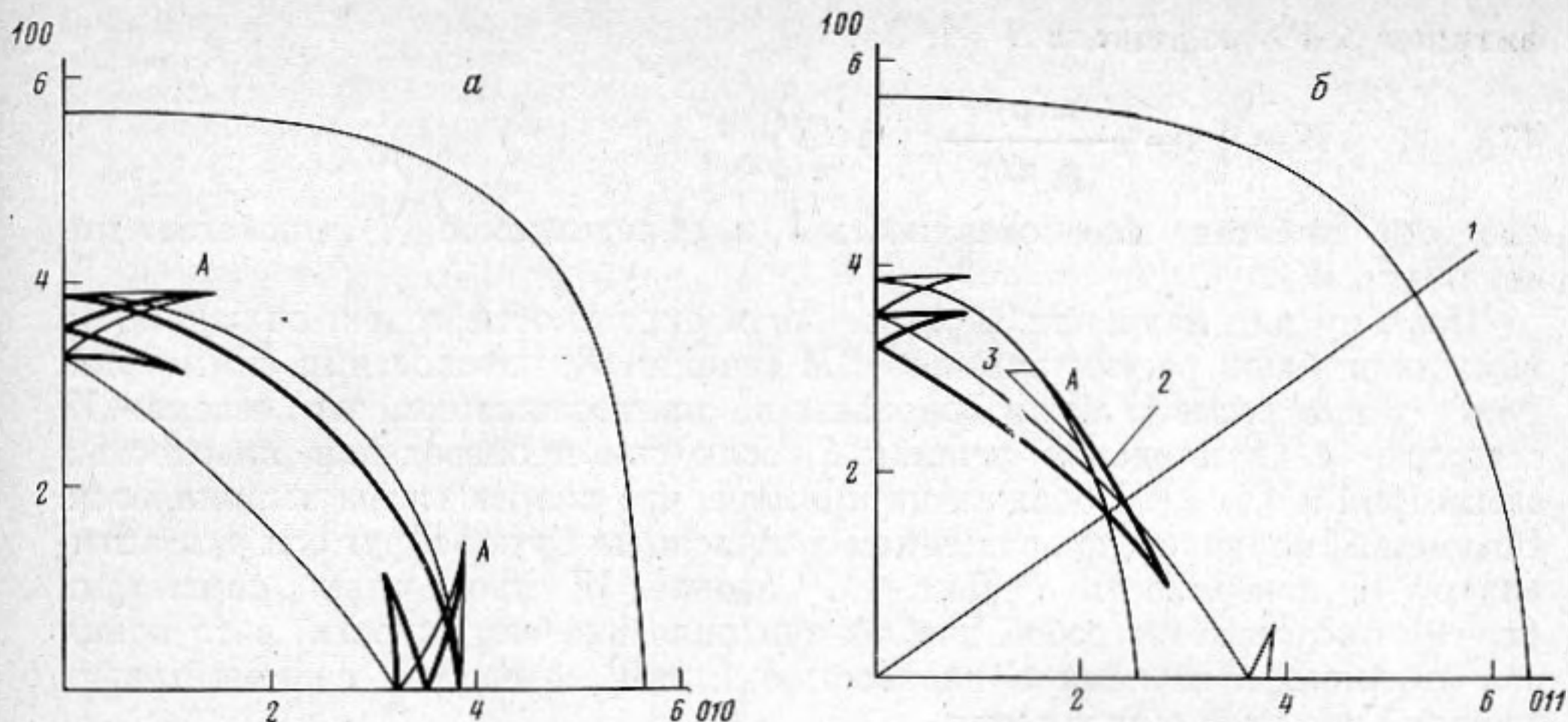
$$g(\mathbf{p}) = a(\mathbf{x}_0) p_3^2 + b(\mathbf{x}_0) p_3^4 + c(\mathbf{x}_0) (p_2 - p_{02})^2 + \dots$$

Но может существовать  $\mathbf{x}_0$  такое, что

$$(5) \quad a(\mathbf{x}_0) = 0,$$

тогда  $g(\mathbf{p}) = b p_3^4 + c (p_2 - p_{20})^2 + \dots$  и главный член асимптотики (2) выписывается на основе результатов [5] для вырожденных стационарных точек

$$(6) \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t) \cong \tau^{-3/2} \omega I e^{i\omega((\mathbf{p}_0, \mathbf{x}_0) - t)} H((\mathbf{p}_0, \mathbf{x}_0)) \tilde{L}(\mathbf{p}_0) \mathbf{f},$$



Фиг. 3. Сечения волновой поверхности кристалла  $\alpha$ -Fe плоскостями симметрий (км/с):  $a$  — координатной;  $b$  — диагональной; 1 — акустическая ось; 2, 3 — кривые, соответствующие кривым на фиг. 4

где

$$I = \left| \frac{\nabla F(\mathbf{p}_0)}{\partial F / \partial p_1} \right| \frac{\Gamma(1/4)\Gamma(1/2)}{b^{1/4}c^{1/2}} e^{\frac{3\pi i}{8}}$$

Возможность такой асимптотической зависимости амплитуды упругого возмущения в анизотропном теле ранее не была отмечена. Существование таких направлений, лежащих в плоскостях симметрий, доказано расчетом на ЭВМ решений уравнения (5) для 44 кристаллов кубической сингонии. Приведенные в таблице углы отсчитываются между координатной осью (100) и направлениями вида (1Z0) или (1ZZ) (Z — вещественно). Все остальные каустики получаются применением преобразований симметрии.

Как известно [2, 6], существует связь порядка главного члена асимптотики (2) по  $\tau$  с особенностями волновой поверхности  $W$ , являющейся

	Pb	Ni	CuZn	Li	Cu	Ge	Si	GaAs	ZnS	LiF	$\alpha$ -Fe
(1Z0)	26°32'	21°37'	38°10'	38°47'	26°13'	4°30'	3°26'	8°49'	14°30'	11°50'	18°40'
(1ZZ)	24°26'	35°07'	12°28'	11°28'	29°58'	45°31'	47°03'	43°10'	36°58'	43°29'	36°45'
	Na	Ag	Au	K	Cu <sub>3</sub> Au	Th	GaSb	InSb	MgO	Kal (SO <sub>4</sub> ) <sub>2</sub> 12H <sub>2</sub> O	Al
(1Z0)	37°12'	23°05'	9°58'	35°54'	16°25'	29°27'	6°32'	10°37'	1°50'	—	—
(1ZZ)	13°32'	30°20'	30°54'	16°18'	34°33'	26°50'	43°32'	41°02'	48°11'	53°22'	52°19'
	C	Cr <sub>2</sub> FeO <sub>4</sub>	Fe <sub>3</sub> O <sub>4</sub>	KBr	KI	KCl	AgBr	AgCl	Ba(NO <sub>3</sub> ) <sub>2</sub>	CaF <sub>2</sub>	NaBrO <sub>3</sub>
(1ZZ)	52°30'	50°53'	53°10'	77°52'	78°53'	75°39'	73°12'	74°40'	72°24'	72°14'	52°29'
(1ZZ)	—	—	—	25°11'	22°58'	30°40'	43°31'	18°19'	42°03'	42°29'	28°36'
	NH <sub>4</sub> Br	NH <sub>4</sub> Cl	TlCl	Mo	NaCl	Fe <sub>2</sub> S	NaBr	NaClO <sub>3</sub>	TlBr	NaI	PbS
(1ZZ)	75°14'	75°43'	72°29'	50°12'	71°47'	71°54'	71°34'	71°43'	72°17'	71°49'	73°47'
(1ZZ)	32°14'	30°49'	42°56'	6°36'	46°43'	34°07'	45°33'	44°51'	45°13'	46°30'	36°32'
(1ZZ)	—	—	—	—	0°07'	8°27"	7°19"	7°15"	7°24"	7°12"	8°30"

антиподерой поверхности  $S$  [1, 2]

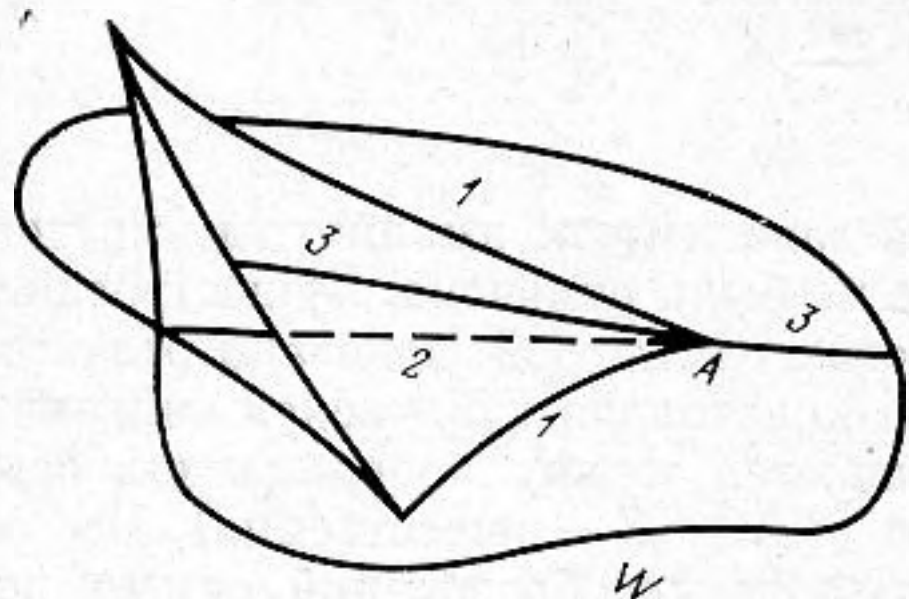
$$(7) \quad W = \left\{ \mathbf{x} = \frac{\mathbf{n}(\mathbf{p})}{(\mathbf{p}, \mathbf{n}(\mathbf{p}))} \quad \mathbf{p} \in S \right\}$$

(когда  $\mathbf{p}$  пробегает всю поверхность  $S$ ,  $\mathbf{x}$ , определяемое (7), пробегает поверхность  $W$ ).

Поэтому для изучения ее строения в окрестности точек, лежащих на каустиках, были рассчитаны на ЭВМ сечения  $W$  плоскостями симметрий. Ранее такие расчеты были основаны на предположении, что сечение  $W$  совпадает с антиподерой сечения  $S$ , если они производятся плоскостью симметрий  $\pi$  [1, 2]. Покажем на примере, что оно не всегда выполняется. Возьмем  $S$ , получаемую вращением лемнискаты Бута вокруг оси  $p_1$  и антиподеру  $W$  поверхности  $S$  (фиг. 1). Сечение  $W$  плоскостью симметрии  $\{x_1=0\}$  представляет собой две concentric окружности, в то время как антиподера сечения  $S$  плоскостью  $\{p_1=0\}$ , очевидно, состоит только из одной внешней окружности.

Из определения (7) следует, что если существует (8)  $\mathbf{p} \in S$ , такое что  $\mathbf{p} \notin \pi$ ,  $\mathbf{n}(\mathbf{p}) \parallel \pi$ , (нормаль к поверхности  $S$  в точке  $\mathbf{p}$  параллельна плоскости симметрии  $\pi$ , хотя вектор  $\mathbf{p}$  и не лежит в  $\pi$ ), то упомянутое выше пред-

положение не выполняется. Это означает, что для расчета полного сечения  $W$  помимо расчета антиподеры сечения  $S$  нужны также расчеты на основе (7) по всей поверхности рефракции  $S$ . Назовем (8) критерием необходимости дополнительных расчетов. Эти расчеты были проведены для двух кристаллов кубической сингонии и дали новые по сравнению с работами [2, 4, 7] результаты. На фиг. 2 и 3 изображен только 1-й квадрант, так как остальные симметричны ему. Рассчитанные новые кривые (выделены на сечениях большей толщиной) являются линиями самопересечения  $W$ . Каустики (см. таблицу) проходят



Фиг. 4. Строение волновой поверхности в окрестности особенности типа «ласточкин хвост»: 1 — ребра возврата; 2, 3 — кривые, попадающие в сечение плоскостью симметрий

на сечениях через точки  $A$ , являющиеся вершинами «ласточкиных хвостов» [6, 8].

Результаты работы [6] говорят о том, что устойчивые более сильные особенности у волновых фронтов общего положения отсутствуют и могут возникать только при распространении фронта в неоднородной среде в отдельных точках на каустиках с особенностью меньшего порядка. Исключения из этого правила объясняются высокой симметрией кристалла и, следовательно, волнового фронта [4].

Отметим также, что амплитуда упругих колебаний на каустиках (6) оказывается пропорциональной  $\omega^4$ . Это означает, что прежде всего на каустиках при росте частоты источника могут возникнуть возмущения, приводящие к неупругой деформации кристалла.

В заключение автор благодарит В. П. Маслова и В. В. Кучеренко за постоянное внимание к работе и обсуждение результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965, с. 390.
2. Musgrave M. J. P. Crystal Acoustics. San-Francisko, Holden-Day, 1970, p. 288.
3. Burridge R. The singularity on the plane lids of the wave surface of elastic media with cubic symmetry.— Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1967, v. 20, № 1, p. 41—62.

4. *Buchwald V. T.* Elastic waves in anisotropic media.— Proc. Roy. Soc., London, 1959, Ser. A, 253, p. 563—580.
5. *Варченко А. Н.* Многогранники Ньютона и оценки осциллирующих интегралов.— Функциональный анализ, 1976, т. 10, № 3, с. 13—39.
6. *Арнольд В. И.* Критические точки гладких функций и их нормальные формы.— Успехи мат. наук., 1975, т. 30, № 5, с. 1—62.
7. *Подгорный А. Н., Гузь И. С., Дружинин А. Г.* Волновой фронт, возбуждаемый нестационарным источником в однородной анизотропной среде.— Прикладная механика, 1976, т. 12, № 12, с. 28—35.
8. *Залгаллер В. А.* Теория огибающих. М.: Наука, 1975, с. 102.

Московский инженерно-строительный  
институт им. В. В. Куйбышева

Поступила в редакцию  
15.IV.1980