ражение для I, если воспользоваться приближенной формулой $I_n \simeq \pi\varepsilon \exp(-2\varepsilon g_n)/g_n^{1/2}$, где $g_n \simeq 1{,}11[1+4(n-1)]^{2/3}$, и, принимая во внимание плавность изменения I_n от индекса n, заменить сумму соответствующим интегралом. В результате получим соотношение $I \simeq 2\delta/(2\delta+i\vartheta)$, справедливое при условиях ϑ_0, $\delta \ll (kR)^{-1/3}$, $kR \gtrsim 2\delta^{-1}$. Оно показывает, что с увеличением глубины локализации и при нарастании угла закругления модуль коэффициента прохождения монотонно уменьшается. Слабо локализованная волна Лява ($\delta \lesssim 0{,}001$) даже при небольших углах ϑ_0 «срывается» с закругления.

Представленные результаты пригодны для анализа прохождения через закругление поперечных поверхностных волн и других типов, например волны Гуляева – Блюстейна.

Автор благодарит И. А. Викторова за внимание к работе и Л. В. Седова за помощь при вычислениях на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Викторов И. А.* Прохождение и отражение рэлеевских волн на закруглениях различного радиуса.– Акуст. ж., 1961, т. 7, № 1, с. 90–91.
2. *Анисимкин В. И., Морозов А. И.* Циклическая ультразвуковая линия задержки с усилением на волнах Гуляева – Блюстейна.– Письма в ЖТФ, 1976, т. 2, № 9, с. 426–429.
3. *Пятаков П. А.* Возбуждение волн Лява, распространяющихся по цилиндрической поверхности.– Акуст. ж., 1980, т. 26, № 2, с. 237–241.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
10.I.1980

УДК 534.883.1:621.391.16

АДАПТИВНАЯ ОЦЕНКА МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ИСТОЧНИКА ЗВУКА В ОДНОРОДНОМ ВОЛНОВОДЕ

Решетов Л. А.

Оценкой местоположения по глубине распределенного источника звука, находящегося в акустическом волноводе, принято называть оценку совокупности параметров, характеризующих поведение плотности источников. Так, например, в работе [1] положение источника отождествляется с вертикальной координатой максимума функции плотности источников. Причем для синтеза оценки плотности источников в этой работе используется метод наименьших квадратов. Известно, что этот метод имеет существенный недостаток: имеющиеся у экспериментатора априорные данные о структуре распределенного источника не могут быть использованы для уточнения оценок. С целью обобщения результатов работы [1] ниже выполнено исследование оценки плотности источников, максимизирующей апостериорную плотность вероятности, применительно к условиям приема сигнала в волноводе, однородном по двум координатам.

Пусть волноводный канал единичной высоты $x\in[0, 1]$ образован акустически абсолютно мягкой поверхностью и абсолютно жестким дном, а профиль скорости звука является функцией лишь одной переменной x. Соответствующий данной задаче дифференциальный оператор является самосопряженным оператором Штурма-Лиувилля [2]. Отсюда следует, что система собственных функций $\Phi_m(x)$ оператора образует полную в L^2 систему функций, ортонормированных на единичном интервале, а собственные числа являются счетным множеством $\gamma_1<\gamma_2<\gamma_3\dots$. Используя теорему разложения, комплексную огибающую сигнала на выходе приемника можно представить сходящимся (в среднем) рядом [3, 4].

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{Q_m}{\gamma_m}\Phi_m(x),$$

где $Q_m=(S, \Phi_m)=\int\limits_0^1 S(x)\,\Phi_m(x)\,dx$, $S(x)$ – плотность источников звука.

Если максимум функции $S(x)$ расположен на глубине x_0, а расстояние между излучателем и приемником равно r, то для волновода единичной высоты с отражающими границами величина Q_m равна [1]

$$Q_m = \Phi_m(x_0)\, a_m r^{-1/2} \cos k_m r,$$

a_m – коэффициент возбуждения m-й моды, k_m – горизонтальная компонента волнового числа m-й моды связанная с γ_m дисперсионным уравнением $k_m^2+\gamma_m^2=\omega^2/c^2$, ω – круговая частота излученного гармонического сигнала, c – фазовая скорость волны. Заметим, что для сосредоточенного источника и δ-образной функции плотности $\delta(x-x_0)$ коэффициенты $a_m \cos k_m r$ должны быть одинаковы для любого номера m.

Пусть плотность источников $S(x)$ может быть представлена конечным набором из M собственных функций $\Phi_m(x)$, $m=1,\dots, M$, т. е. в матричной форме записи

$$S(x) = Q^{*}\Phi(x).$$

Здесь $Q=[Q_m]$, $\Phi(x)=[\Phi_m(x)]$, Q^{*} – эрмитово сопряженная матрица. Предположим, что Q является гауссовским случайным вектором со средним $Q_0=EQ=[Q_{m0}]$ и ковариационной матрицей $P_0=E\{(Q-Q_0)(Q-Q_0)^{*}\}$, где E – операция вычисления математического ожидания. Приемную антенну зададим в виде вертикальной решетки с элементами, локализованными в точках x_i, $i=1,\dots, n$ единичного интервала $x_i\in\in[0, 1]$. Тогда аддитивная смесь полезного сигнала $f(x)$ и шума $\varepsilon(x)$ на выходе антенны определяется выражением

$$Y=\Phi\Gamma^{-1}Q+\varepsilon,$$

$Y=[y(x_i)]$, Φ является $n\times M$ матрицей, у которой элемент с индексом i, m равен $\varphi_m(x_i)$, Γ – диагональная $M\times M$ матрица с элементами γ_m, $\varepsilon=[\varepsilon(x_i)]$ – вектор комплексных огибающих шума на частоте ω. Будем полагать, что вектор ε – комплексный гауссовский вектор с нулевым средним и ковариационной матрицей N.

В соответствии с формулой Байеса информативная часть логарифма апостериорной плотности вероятности описывается выражением

$$J=-\{[Q-Q_0]^{*}P_0^{-1}[Q-Q_0]+[Y-\Phi\Gamma^{-1}Q]^{*}N^{-1}[Y-\Phi\Gamma^{-1}Q]\}.$$

Вычисляя градиент J по вектору Q и приравнивая его нулевой матрице, получим оценку вектора Q с минимальной дисперсией [5]:

$$\hat{Q}=P_1^{-1}[P_0^{-1}Q_0+A^{*}N^{-1}Y], \tag{1}$$
$$P_1=P_0^{-1}+P,\quad P=A^{*}N^{-1}A,\quad A=\Phi\Gamma^{-1}.$$

Следовательно, оценка плотности источников имеет вид

$$\hat{S}(x)=\mathrm{Re}\,\hat{Q}^{*}\Phi(x).$$

Формула (1) показывает оптимальные весовые коэффициенты новой информации, поступающей из реализации по отношению к априорным данным. Оценка $\hat{Q}$ по методу наименьших квадратов следует из (1) при $P_0^{-1}=0$.

Оценку местоположения максимума плотности источников будем искать в предположении унимодальности функции $S(x)$ и оценки $\hat{S}(x)$ и при параболической аппроксимации этих функций в области максимального значения. В качестве одного из возможных методов оценки можно использовать процесс максимизации по x выборочной функции $\hat{S}(x)$, т. е. $\hat{S}(x)=\max \hat{S}(x)$, $0\leqslant x\leqslant 1$. Учитывая, что $S(x)$ достигает экстремального значения в точке x_0, а $\hat{S}(x)$ – в точке $\hat{x}$, разложим $\hat{S}(\hat{x})$ в ряд Тейлора относительно значения x_0 и вычислим производную $\dfrac{\partial\hat{S}(\hat{x})}{\partial x}$, ограничиваясь двумя первыми членами ряда

$$\frac{\partial\hat{S}(\hat{x})}{\partial x}\cong\frac{\partial}{\partial x}e(x_0)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}S(x_0)\,(\hat{x}-x_0)=0,$$

$$e(x)=\hat{S}(x)-S(x).$$

Следовательно,

$$\sigma_x=[E(\hat{x}-x_0)^2]^{1/2}=\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}S(x_0)\right]^{-1}\left\{E\left[\frac{\partial}{\partial x}e(x_0)\right]^2\right\}^{1/2}. \tag{2}$$

Обозначив $\Phi_I(x)=\left[\dfrac{\partial\Phi_m(x)}{\partial x}\right]$, найдем дисперсию производной

$$E_\varepsilon\left[\frac{\partial}{\partial x}e(x)\right]^2=\frac{1}{2}\,\Phi_I^{*}(x)P_1^{-1}PP_1^{-1}\Phi_I(x). \tag{3}$$

Рассмотрим в качестве примера случай многоэлементной вертикальной решетки, удовлетворяющей условию приближенной ортогональности отсчетов амплитуды нормальных волн

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Phi_m^2(x_i)\cong 1;\quad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Phi_m(x_i)\Phi_p(x_i)\cong 0,\quad m\neq p.$$

Для упрощения положим, что ковариационная матрица шумов равна $N=N_0I$, т. е. помеху будем задавать белым некоррелированным по каналам шумом. Пусть также $P_0=\mathrm{diag}\,[\sigma_{\theta m}^2]$, где $\sigma_{\theta m}^2$ – дисперсия m-й компоненты функции источника. Тогда из формул (2) и (3) получаем

$$\sigma(x)=\left(\frac{N_0}{2n}\right)^{1/2}\left[\frac{\partial}{\partial x^2}S(x_0)\right]^{-1}\left\{\sum_{m=1}^{M}\left[\gamma_m\frac{\partial}{\partial x}\Phi_m(x_0)\right]^2(1+q_m)^{-2}\right\}^{1/2},$$

где $q_m=\dfrac{N_0\gamma_m^2}{n\sigma^2{}_{\theta m}}$. Безразмерный параметр q_m определяет величину выигрыша в точности оценки (1) по сравнению с оценкой методом наименьших квадратов, соответствующей $q_m=0$. Таким образом, при увеличении энергии шума или уменьшении флуктуационной составляющей плотности источников дисперсия оценки $\hat{x}$ уменьшается. Это объясняется тем, что при увеличении шумов в соответствии с алгоритмом (1) резко уменьшается вес входных данных $P_1^{-1}A^*N^{-1}Y$ и в пределе оценка $\hat{Q}=Q_0$. Конечно, при этом увеличивается смещение оценки, но это смещение существенно меньше возможного разброса из-за зашумленности входной реализации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hinich M. J.* Maximum-likehood signal processing for a vertical array.— J. Acoust. Soc. America, 1973, v. 54, № 2, p. 499—503.
2. *Садовничий В. А.* Теория операторов, М.: Изд-во МГУ, 1979.
3. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах, М.: Изд-во АН СССР, 1957.
4. *Толстой И., Клей К. С.* Акустика океана, М.: Мир, 1969.
5. *Рао С. Р.* Линейные статистические методы и их применение, М.: Наука, 1968.

Северо-западный заочный политехнический институт

Поступила в редакцию 30.VIII.1979
После исправления 8.IV.1980

УДК 534.231.1

ПЕРЕДАЧА АКУСТИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПО ЕСТЕСТВЕННЫМ МОРСКИМ ВОЛНОВОДАМ

Семенов А. Т.

Оптические многомодовые волноводы некоторых типов обладают способностью воспроизводить изображение объекта, находящегося в его входном сечении, в дискретной последовательности так называемых синфазных сечений (см., например, обзор [1]). Следует ожидать, что данное явление будет наблюдаться как во всех спектральных интервалах электромагнитного излучения, так и для волновых процессов другой природы, например в акустике при многомодовом распространении звука по естественным морским волноводам. Наличие последних позволяет распространяться звуковым волнам низкой частоты на весьма большие расстояния за счет локализации поля внутри волноводного канала. В работе [2] исследованы основные закономерности сверхдальнего распространения звука и, в частности, фокусирующая способность подводного звукового канала. По аналогии с оптическими волноводами интересно рассмотреть способность акустических волноводов к передаче сложных изображений. Такой анализ удобно провести на хорошо изученных акустических волноводах в виде несимметричных слоев Эпштейна и Экарта.

Распределение поля в произвольном сечении многомодового волновода есть результат суперпозиции волновых полей разных мод, возбуждаемых на входе полем входного изображения. Волны разных мод распространяются вдоль волновода с разными фазовыми скоростями. Поэтому суперпозиция мод в произвольном сечении воспроизводит картину, совершенно непохожую на входную. Однако если существуют такие сечения z_s, где сдвиги фаз относительно входа для волн любой пары