АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXVII 1981 Вып. 3

УДК 534.231.1

К ВЫЧИСЛЕНИЮ ЗВУКОВЫХ ПОЛЕЙ В ОКЕАНЕ МЕТОДОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Авилов К. В., Мальцев Н. Е.

Показано, что метод параболического уравнения является операторным аналогом метода ВКБ (Вентцеля – Крамерса – Бриллюэна); обосновано его применение к решению цилиндрически-симметричных задач для трехмерного уравнения Гельмгольца. Приведен пример численного расчета.

Имея в виду применение эффективных численных методов [1], мы выбрали акустическую модель океана в виде жидкого слоя, ограниченного двумя плоскопараллельными свободными границами. Для ослабления отражений от нижней границы мы располагаем вблизи нее сильно поглощающий слой. Для такой модели поле звукового давления p точечного гармонического источника объемной скорости есть решение следующей краевой задачи для уравнения Гельмгольца [2]:

$$\Delta u+K^2(x,y,z)u=4\pi\delta(x,y,z-z_1),$$
$$u(x,y,+0)=0,\quad u(x,y,H-0)=0,$$
$$\text{(1)}\qquad \operatorname{Im}K^2>0\Rightarrow \lim_{x^2+y^2+z^2\to\infty} u=0,\qquad p=u\sqrt{\rho},$$

где $\rho=\rho(x,y,z)$ – комплексная плотность среды,

$$K^2=\frac{\omega^2}{c^2(x,y,z)}+\frac{1}{2\rho}\Delta\rho-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{\rho}\nabla\rho\right)^2,$$

$c=c(x,y,z)$ – комплексная скорость звука в среде, ω – круговая частота, H – толщина слоя, начало декартовых координат (x,y,z) расположено на верхней границе, ось глубин Oz направлена к нижней границе и перпендикулярна к ней, z_1 – глубина источника.

Метод параболического уравнения, предложенный впервые М. А. Леонтовичем и В. А. Фоком [3], мы разберем вначале на примере краевой задачи для более простого двумерного уравнения Гельмгольца

$$\text{(2)}\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+K^2(z)u=0$$

в полосе $0<z<H$ со свободными границами. Для уравнения (2) подход Леонтовича и Фока заключается в выделении в решении быстро меняющегося множителя $\exp(iK_0x)$, т. е. замене искомой функции $u=\exp(iK_0x)v$ и пренебрежении затем в получающемся дифференциальном уравнении для v сравнительно малым при удачном выборе среднего волнового числа K_0 членом $\partial^2v/\partial x^2$, что приводит к следующему приближенному уравнению для u:

$$\text{(3)}\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=iK_0v+\frac{i}{2K_0}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+(K^2(z)-K_0^2)v\right).$$

В работах [4, 5] для вывода уравнения (3) применялся способ факторизации. Мы излагаем ниже уточненный вариант этого способа.

Определим, следуя [5], поперечный дифференциальный оператор T соотношением $T=\partial^2/\partial z^2+K^2(z)$. Область определения $D(T)$ оператора T — достаточно гладкие функции $v(z)$, удовлетворяющие краевым условиям $v(+0)=0$, $v(H-0)=0$. Используя оператор T, перепишем задачу (2) в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+Tu=0. \tag{4}$$

Теперь u — элемент $D(T)$. Если рассматривать T как квадрат операторного волнового числа, то уравнение (4) совпадает по записи с одномерным уравнением Гельмгольца. При этом имеет место замечательное обстоятельство: любое решение уравнения (4) может быть записано в виде, также совпадающем по написанию с общим решением одномерного уравнения Гельмгольца [6], а именно в виде суммы двух операторных плоских волн, бегущих вправо и влево

$$u(x)=\exp(ix\sqrt{T})\,v_++\exp(-ix\sqrt{T})\,v_-. \tag{5}$$

Здесь v_+ и v_- — некоторые элементы $D(T)$. Операторная плоская волна есть совокупность нормальных волн, бегущих в одну сторону, например, согласно определению функции от оператора:

$$e^{ix\sqrt{T}}v_+=(\psi_1(z),\ldots,\psi_i(z),\ldots)\begin{pmatrix} e^{ix\sqrt{\lambda_1}} & & 0 \\ \ldots & & \\ \ldots & & \\ & & e^{ix\sqrt{\lambda_i}} \\ 0 & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_i \\ \ldots \end{pmatrix}=$$

$$=\sum_i a_i\psi_i(z)\,e^{ix\sqrt{\lambda_i}}.$$

Здесь λ_i и $\psi_i(z)$ — собственные значения и собственные функции оператора T, a_i — коэффициенты разложения функции v_+ по базису $\psi_i(z)$. Операторная плоская волна удовлетворяет обобщенному параболическому уравнению

$$\frac{\partial u_\pm}{\partial x}=\pm i\sqrt{T}\,u_\pm, \tag{6}$$

где мы обозначили $u_\pm=\exp(\pm ix\sqrt{T})\,v_\pm$.

Уравнение первого порядка (6) точно описывает распространение волн, бегущих в одну сторону, как и аналогичное одномерное уравнение. Параболическое уравнение Леонтовича — Фока (3) получается из (6) путем разложения $\sqrt{T}$ в ряд Тейлора до членов первого порядка [5]

$$\sqrt{\frac{\partial^2}{\partial z^2}+K^2(z)}=K_0\sqrt{1+\frac{K^2(z)-K_0^2}{K_0^2}+\frac{1}{K_0^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}}\approx$$

$$\approx K_0+\frac{K^2(z)-K_0^2}{2K_0}+\frac{1}{2K_0}\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Эта аппроксимация удовлетворительна только в достаточно малом интервале углов скольжения и при слабо переменном $K^2(z)$.

Представление об ошибке, возникающей при таком разложении, можно получить, оценив разность результатов действия точного и приближенного операторов на собственную функцию оператора T:

$$|\delta_i|=\left|\left(\sqrt{T}-\frac{K_0}{2}-\frac{1}{2K_0}T\right)\psi_i\right|=\left|\sqrt{\lambda_i}-\frac{K_0}{2}-\frac{\lambda_i}{2K_0}\right|\,|\psi_i|$$

Если $K_0=\sqrt{\lambda_i}$, то, как и следовало ожидать из (6), $\delta_i=0$. В противном случае, положив $\sqrt{\lambda_i}=K_0\cos\vartheta_i$ мы получаем при малых ϑ_i

$$|\delta_i|\approx\frac{K_0}{16}\vartheta_i^4$$

и, например, ошибочный набег фазы на π по сравнению с точным решением случится на частоте 50 Гц и углах $\vartheta\sim10^0$ на расстояниях порядка 360 км. Отметим еще формулу для поля точечного источника $\delta(x, y)$ [6]

$$u(x)=\frac{\exp(i|x|\sqrt{T})}{\sqrt{T}}\delta(z-z_1). \tag{7}$$

Рассмотрим теперь двумерное уравнение Гельмгольца с волновым числом, зависящим об обеих координат, $K=K(x,z)$, с прежними краевыми условиями. Оператор T зависит теперь от x: $T(x)=\partial^2/\partial z^2+K^2(x,z)$ и соответствующее операторное уравнение приобретает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+T(x)u=0. \tag{8}$$

Если переменные в (8) разделяются, то его решение можно записать в виде

$$u(x)=R(T,x)v_++L(T,x)v_-,$$

где R и L — функции, образующие фундаментальную систему решений продольного дифференциального уравнения. Если переменные не разделяются, то, как и в одномерном случае, приходится прибегнуть к приближенным методам. Если T плавно зависит от x, то можно искать решение в виде двух приближенно плоских волн, т. е. поступить как в одномерном методе ВКБ [7]. Представление решения в виде двух приближенно плоских волн осуществляет замена искомой функции

$$\begin{pmatrix} u \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P^{-1} & P^{-1} \\ P & -P\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_+ \\ v_-\end{pmatrix},\quad P=(-T(x))^{\frac{1}{4}}$$

Переходя в уравнении (8) к новым искомым функциям, мы получаем.

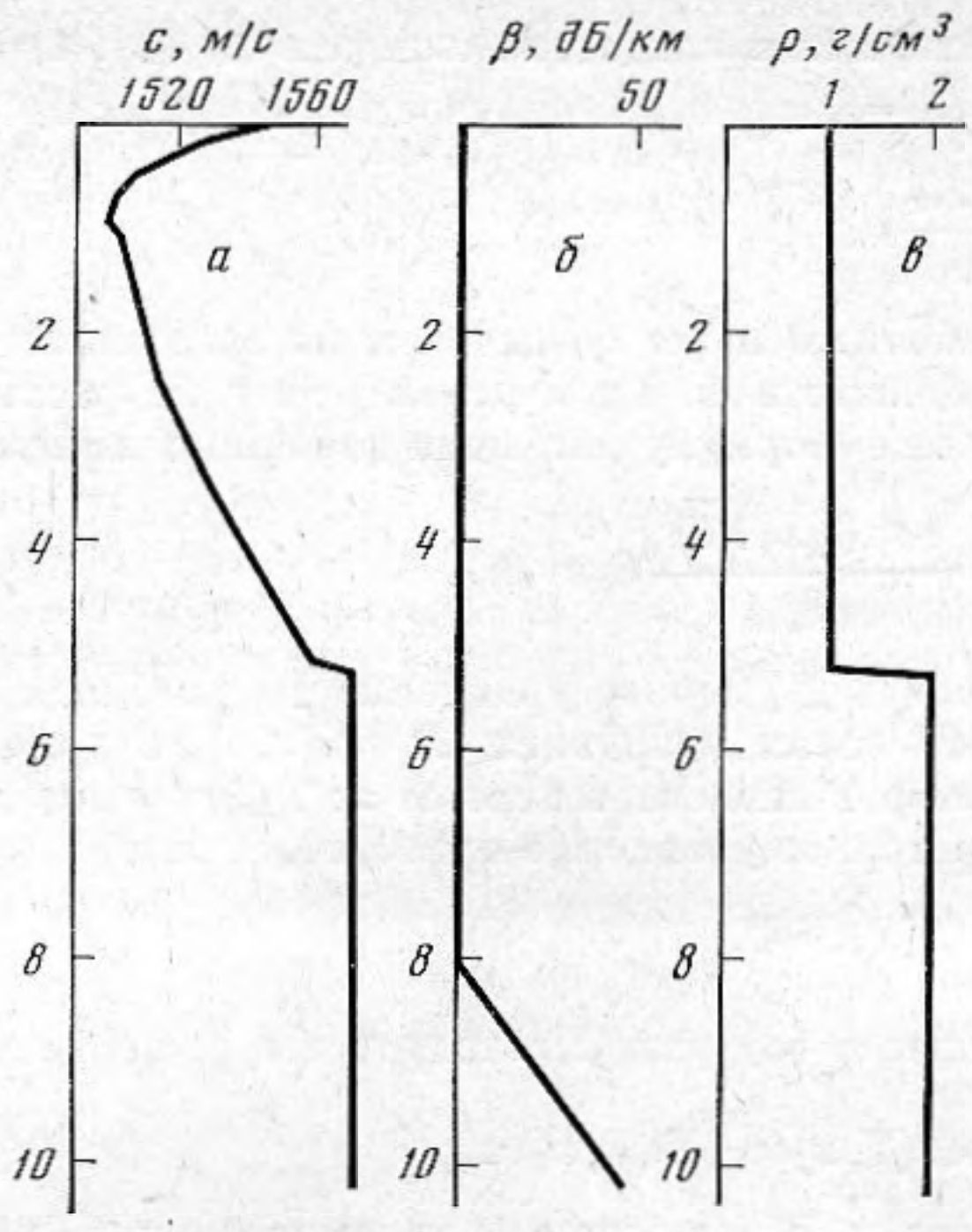
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} v_+ \\ v_-\end{pmatrix}=\Bigg[\begin{pmatrix} P^2 & 0 \\ 0 & -P^2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\left(P\frac{\partial P^{-1}}{\partial x}+P^{-1}\frac{\partial P}{\partial x}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}+\\ +\frac{1}{2}\left(P\frac{\partial P^{-1}}{\partial x}-P^{-1}\frac{\partial P}{\partial x}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} v_+ \\ v_-\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{9}$$

Пренебрегая взаимодействием волн, бегущих вправо и влево, т. е. недиагональными членами в (9), получим уравнения отдельно для v_+ и v_-

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_+}{\partial x}&=\left[iT^{1/2}+\frac{1}{2}T^{1/4}\frac{\partial T^{-1/4}}{\partial x}+\frac{1}{2}T^{-1/4}\frac{\partial T^{1/4}}{\partial x}\right]v_+\\ \frac{\partial v_-}{\partial x}&=\left[-iT^{1/2}+\frac{1}{2}T^{1/4}\frac{\partial T^{-1/4}}{\partial x}+\frac{1}{2}T^{-1/4}\frac{\partial T^{1/4}}{\partial x}\right]v_-,\\ T&=T(x)\end{aligned} \tag{10}$$

Обобщенные параболические уравнения (10) приближенно описывают распространение волн, бегущих вправо или влево, учитывая взаимодействие между волнами, бегущими в одну сторону.

Если точечной источник не находится вблизи точки поворота, т. е. в таком месте, где относительная ошибка отброшенных в (9) членов велика, то может быть получена формула, аналогичная (7).



Фиг. 1. Профили скорости звука (*а*), километрического поглощения (*б*) и плотности среды (*в*)

Перейдем к рассмотрению цилиндрически-симметричных задач для трехмерного уравнения Гельмгольца. Уравнение Гельмгольца (1) приобретает в цилиндрических координатах вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+K^2(r,z)u=4\pi\delta(z-z_1)\frac{\delta(r)}{r}. \tag{11}$$

В слоистой среде решение задачи (1) может быть записано в виде

$$u(r)=\pi i H_0^{(1)}(r\sqrt{T})\,\delta(z-z_1), \tag{12}$$

где $T=\partial^2/\partial z^2+K^2(z)$, $H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля. Решение (12) имеет асимптотику по Kr:

$$u(r)=\pi i\exp(ir\sqrt{T})\sqrt{2/i\pi r\sqrt{T}}\,\delta(z-z_1). \tag{13}$$

В двумерно-неоднородной среде путем замены переменной $r=\exp(x)$ мы переводим уравнение (11) в уравнение (8) и, применяя асимптотическую факторизацию (9), (10), получаем после возвращения к старым переменным уравнения, асимптотически описывающие поле расходящейся от источника волны

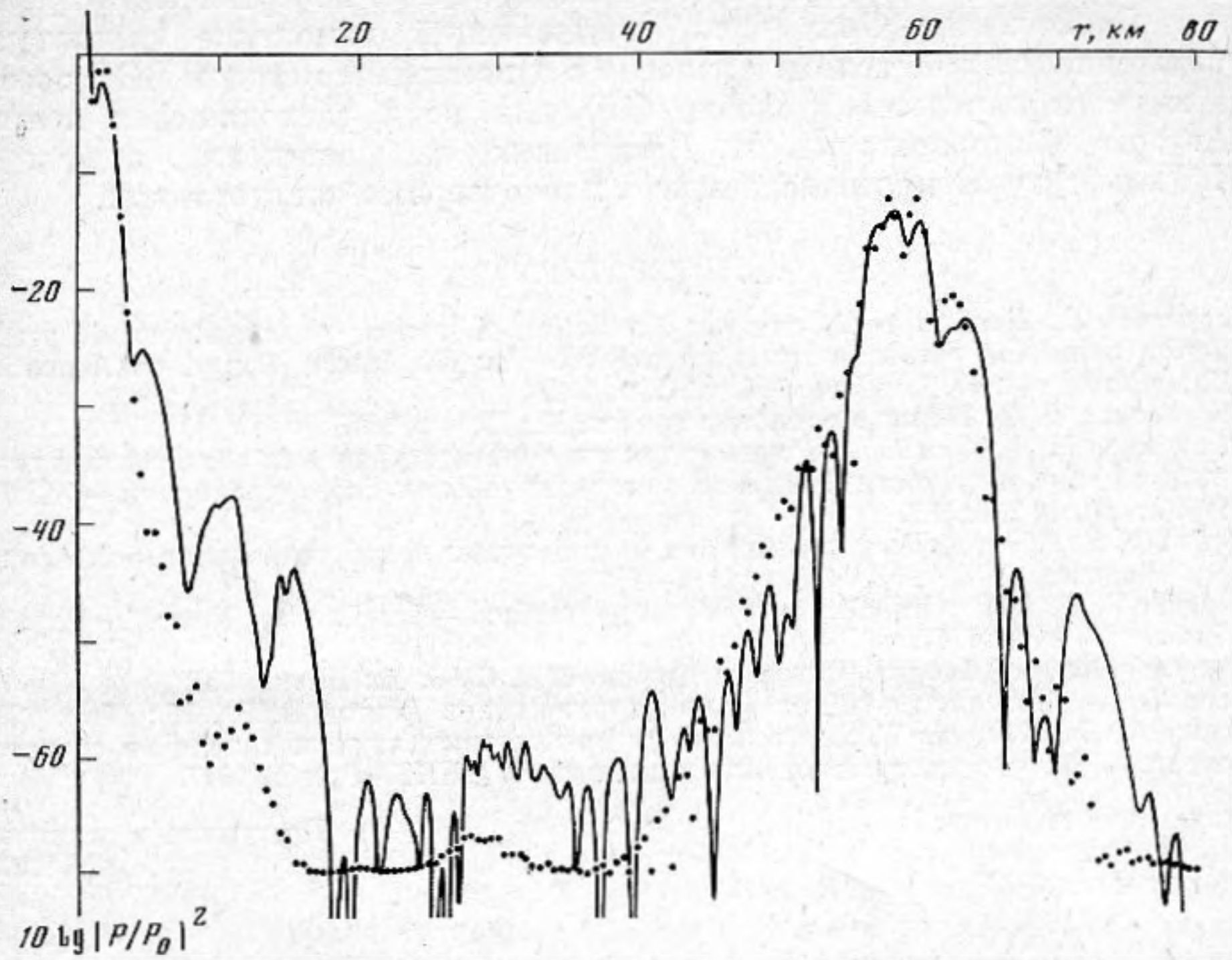
$$u_+(r)=r^{-1/2}T^{-1/4}v_+(r),\quad T=T(r)$$

$$\frac{\partial v_+}{\partial r}=\left[iT^{1/2}+\frac{1}{2}T^{1/4}\frac{\partial T^{-1/4}}{\partial r}+\frac{1}{2}T^{-1/4}\frac{\partial T^{1/4}}{\partial r}\right]v_+ \tag{14}$$

где $T(r)=\partial^2/\partial z^2+K^2(r,z)$. Источник, однако, находится в точке поворота уравнения (11). Чтобы найти начальные условия для (14), мы предположим, что среда вблизи источника слоистая вплоть до расстояний, на которых применима асимптотика (13), и, пренебрегая сходящейся волной, так как $K^2(r,z)$ зависит от r плавно, получим

$$v_+(0)=(2\pi i)^{1/2}\delta(z-z_1) \tag{15}$$

так как асимптотика (13) удовлетворяет уравнениям (14).



Фиг. 2. Разрез интенсивности поля точечного источника, рассчитанный согласно (16) с применением численной схемы [1] (сплошная кривая) и методом суммирования нормальных волн [8] (точки)

Простейшие тейлоровские аппроксимации операторов, входящих в (14), (15), приводят к уравнениям:

$$u_+(r,z)=\frac{1}{\sqrt{K_0 r}}\left(1-\frac{K^2(r,z)-K_0^2}{4K_0^2}-\frac{1}{4K_0^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)v_+(r,z)$$

$$\frac{\partial v_+}{\partial r}=i\left(K_0+\frac{K^2(r,z)-K_0^2}{2K_0}+\frac{1}{2K_0}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)v_+ \tag{16}$$

$$v_+(0,z)=\sqrt{2\pi}i\delta(z-z_1).$$

Численные расчеты согласно (16) содержат ошибки четырех типов: ошибки асимптотической факторизации, ошибки аппроксимации операторов, ошибки аппроксимации обобщенной функции $\delta(z-z_1)$ и ошибки численной схемы решения уравнений (16). Представление о величине результирующей ошибки может дать следующий пример расчета. На фиг. 1 показаны профиль скорости звука, профиль километрического поглощения β и профиль плотности среды в слоистом волноводе толщиной $H=10{,}24$ км. В окрестности глубины 5,2 км расположен плавный переходный слой плотности толщиной 0,1 км. На фиг. 2 сплошной линией показан разрез интенсивности звукового поля точечного источника, расположенного на глубине 0,15 км и имеющего частоту 50 Гц, рассчитанный согласно (16) с применением численной схемы «дробных шагов с преобразованием Фурье» [1]. Точками показана интенсивность поля того же источника, рассчитанная методом суммирования нормальных волн с помощью алгоритма [8], для модели океана, у которой ниже глубины 5,2 км расположен не слой, а однородное полупространство и плотность на этой глубине изменяется скачком. Оба разреза сделаны по горизонту источника. Совпадение результатов можно считать удовлетворительным.

Итак, введение операторной формы записи позволило прояснить физический смысл метода параболического уравнения и сформулировать

уравнения (10) и (16), содержащие дополнительный по сравнению с уравнением Леонтовича — Фока член, описывающий изменение амплитуды приближенно плоской волны. Аналогия с одномерным методом ВКБ позволила вывести начальные условия (15) для поля расходящейся волны.

Авторы благодарны Л. М. Бреховских за постановку задачи и В. И. Гельфгату за многочисленные и плодотворные консультации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tappert F. D., Hardin R. H.* Computer simulation of long-range ocean acoustic propagation using the parabolic equation method.— In: 8th Intern. Congr. on Acoustics, Contributed papers. London, 1974, v. II, p. 452.
2. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
3. *Леонтович М. А., Фок В. А.* Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности Земли по методу параболического уравнения.— ЖЭТФ, 1946, т. 16, № 7, с. 557.
4. *McDaniel S. T.* Parabolic approximation in underwater sound propagation.— J. Acoust. Soc. America, 1975, v. 58, № 6, p. 1178—1185.
5. *Tappert F. D.* The parabolic approximation method.— In: Lecture Notes in Physics. Springer-Verlag, 1977, v. 70.
6. Функциональный анализ. / Под ред. Крейна С. Г. СМБ. М.: Наука, 1972.
7. *Хединг Дж.* Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). М.: Мир, 1965.
8. *Вагин А. В., Мальцев Н. Е.* Расчеты низкочастотных звуковых полей в слоистом океане.— Вопр. судостроения. Акустика. вып. 9. ЦНИИ «Румб», 1977.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
12.VI.1980