АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXVII 1981 Вып. 4

УДК 534.83

ОБ АКТИВНОМ ГАШЕНИИ ЗВУКА МОНОПОЛЯМИ, РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПО ОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Урусовский И. А.

Рассмотрены три варианта задачи активного гашения звука вне или внутри некоторой сферы монополями, распределенными по этой сфере и управляемыми приемниками звукового давления и приемниками радикальной колебательной скорости, распределенными по поверхности другой сферы, концентрической с первой. Требуемые объемные скорости гасящих монополей выражены через показания приемников. Особенности рассмотренных вариантов задачи обсуждены на одномерном примере.

В обычной постановке задачи активного гашения звука предполагается, что гасящие монополи и диполи располагаются по некоторой поверхности (для открытого пространства — по замкнутой поверхности [1—4], для волновода — по его поперечному сечению [5, 6]) и что по каждую сторону от поверхности их действие гасит поле источников, расположенных по другую ее сторону. Так же ставится задача и при использовании для гашения только монополей при распределении их по двум гасящим поверхностям [7—10].

В большинстве случаев, могущих представить практический интерес, можно изменить постановку задачи, ограничиваясь гашением поля только по одну сторону от поверхности. Это позволяет располагать гасящие монополи только по одной поверхности[1]. Ниже такое решение получено для гашения волн во внешней или во внутренней области относительно заданной сферы при расположении источников поля, подлежащего гашению, соответственно во внутренней или внешней области. Гасящие монополи распределяются непрерывно по заданной сфере и управляются приемниками звукового давления и приемниками радиальной составляющей колебательной скорости, также распределенными непрерывно по концентрической сфере соответственно меньшего или большего радиуса. При этом предполагается, что между гасящей и управляющей поверхностями нет ни источников поля, ни рассеивающих тел. Задачу будем считать решенной, если удастся выразить требуемые для гашения объемные скорости гасящих монополей через показания управляющих приемников.

При такой постановке задачи гашения она не всегда имеет решение во внешней области: как указал еще Лэмб [12], при частотах, при которых поверхность сферы является узловой поверхностью для стоячей сферической волны какого-либо типа внутри сферы, никакое расположение монополей по ее поверхности не может создать уходящую волну того же типа снаружи ее; следовательно, в этом случае погасить соответственную сферическую пространственную гармонику во внешней области будет невозможно. Практически гашение будет неосуществимым уже вблизи

[1] Соответственное решение для гашения однонаправленного поля в волноводе было получено в работе [11].

таких частот, поскольку требуемые амплитуды объемной скорости гасящих монополей будут расти безгранично при приближении к этим частотам. Если, однако, во внутренней области имеется достаточное поглощение волн, то гашение снова делается возможным даже на указанных частотах, поскольку тогда узловые поверхности отсутствуют.

Особенности измененной постановки задачи продемонстрируем на простом примере — гашении гармонической волны в узкой трубе, закрытой с одного конца ($x=0$) жесткой стенкой и заполненной средой, плотность и скорость звука в которой обозначим через ρ и c соответственно. В качестве внутренней области выберем участок $0\leqslant x<L$, располагая единственный гасящий монополь в сечении $x=L$ и располагая управляющие приемники в сечении $x=l<L$. Пусть в области $x<l$ существуют произвольные рассеиватели и неоднородности и единственный (монопольный) источник звука частоты ω с объемной скоростью W, расположенный в сечении $x=a$, $0<a<l$, и пусть из внешней области $x>L$ на внутреннюю падает из бесконечности волна $A\exp(-ikx-i\omega t)$. Будем рассматривать три варианта задачи. В первом варианте следует найти такую объемную скорость V гасящего монополя, чтобы при его работе поле во внешней среде было бы таким же, как и в отсутствие рассеивателей и неоднородностей и источников звука, т. е. было бы равно $2A\cos kx$. Действие рассеивателей и неоднородностей на поле во внешней области может быть заменено приписыванием стенке эффективного коэффициента отражения K. В отсутствие поглощения во внутренней области следует полагать $|K|=1$, а при наличии поглощения $|K|<1$. Суммарное звуковое давление $p(x)$ в области $x>a$ при работе гасящего монополя можно записать в виде

$$p(x)=A(e^{-ikx}+Ke^{ikx})+\frac{\rho c}{2s}\{W(e^{-ika}+Ke^{ika})e^{ikx}+ \\ +V[e^{ik|x-L|}+Ke^{ik(x+L)}]\}, \tag{1}$$

где s — площадь сечения трубы. Искомая объемная скорость выразится формулой

$$V=\frac{\frac{2s}{\rho c}(1-K)A-W[\exp(-ika)+K\exp(ika)]}{1+K\exp(2ikL)}\exp(ikL), \tag{2}$$

за исключением случаев обращения в нуль знаменателя этого выражения, что соответствует, согласно Лэмбу, совпадению узла стоячей волны для данной частоты с точкой $x=L$. В этом случае гашение осуществимо только при наличии поглощения во внутренней области. Действие любого вида поглощения эквивалентно уменьшению модуля эффективного коэффициента отражения K. Исключив величины A, W и K из уравнений (1), (2) и $ik\rho cv=\partial p/\partial x$, выразим требуемую объемную скорость гасящего монополя через показания приемников: звуковое давление p и скорость частиц v в сечении $x=l$:

$$V=\frac{s}{2\rho c}[(\rho-\rho cv)\exp(ikl)-(p+\rho cv)\exp(-ikl)]/\cos(2kL), \tag{3}$$

что и дает решение задачи.

Обобщение этого решения на случай негармонических волн имеет вид

$$V(t)=\frac{s}{\rho c}\left\{[p-\rho cv]_{t-\frac{L+l}{c}}-[\rho+\rho cv]_{t-\frac{L-l}{c}}\right\}-V\left(t-\frac{2L}{c}\right). \tag{4}$$

При L, равном нечетному числу четвертой волны, правая часть формулы (3) имеет неопределенность типа 0/0. Однако если $|K|<1$, то, как видно из формулы (2), при этом $|V|$ остается конечным. Например, при $|K|\leqslant 1/2$ требуемая объемная скорость гасящего монополя всегда остается меньшей величины $6(s/\rho c)A+3W$.

Во втором варианте требуется погасить все волны, уходящие во внешнюю область. В этом случае решение имеет вид

$$V(t) = -\frac{s}{\rho c}[p + \rho c v]_{t-\frac{L-l}{c}}. \tag{5}$$

Здесь гасящая поверхность действует как «абсолютно черное тело» по отношению к волне, падающей из внешней области.

В третьем варианте требуется звукоизолировать внутреннюю область от волны, приходящей из внешней области. В этом случае $l>L$ и решение имеет вид

$$V(t) = -\frac{s}{\rho c}[\rho - \rho c v]_{t-\frac{l-L}{c}}. \tag{6}$$

Рассмотрим теперь, какой вид примут три рассмотренные варианта для пространственного случая гашения звука внутри или вне сферы.

В первом варианте требуется, чтобы при работе гасящих монополей поле во внешней области было бы равным полю $\mathscr{P}$, все источники которого расположены снаружи сферы,— падающему полю. В однородном сферическом слое D, содержащем гасящую и приемную поверхности, это поле можно представить суперпозицией пространственных сферических гармоник

$$\mathscr{P}(r, \theta, \varphi) = \sum_{q \geqslant 0} A_q j_n(kr)\, \psi_q(\theta, \varphi). \tag{7}$$

Здесь r, θ, φ — сферические координаты с началом в центре гасящей сферы, $j_n(kr)$ — сферические бесселевы функции, $\psi_q(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos\theta) \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} m\varphi$, $P_n^m(x)$ — присоединенные полиномы Лежандра, $m=m(q)$, $n=n(q)$; каждому значению q соответствует единственная пара индексов m и n, m пробегает значения от 0 до n, $n=0, 1, 2, \ldots$, нумерация пространственных гармоник ведется в порядке возрастания m при каждом фиксированном n и в порядке возрастания n; четным q соответствует косинус, нечетным — синус. Полное звуковое давление p в слое D можно представить суммой $p=\mathscr{P}+\bar{p}+\tilde{p}$, где $\bar{p}$ — звуковое давление, создаваемое гасящей поверхностью в однородном пространстве, $\tilde{p}$ — звуковое давление, создаваемое рассеивателями и источниками звука, содержащимися во внутренней области. В слое D $\bar{p}$ и $\tilde{p}$ могут быть представлены на заданной частоте суперпозицией пространственных сферических гармоник по формулам

$$\bar{p}(r, \theta, \varphi) = \sum_{q \geqslant 0} w_q R_n(kr)\, \psi_q(\theta, \varphi), \tag{8}$$

$$\tilde{p}(r, \theta, \varphi) = \sum_{q \geqslant 0} a_q h_n^{(1)}(kr)\, \psi_q(\theta, \varphi), \tag{9}$$

где $R_n(kr) = j_n(kR)\, h_n^{(1)}(kr)$ при $r>R$, $R_n(kr) = j_n(kr)\, h_n^{(1)}(kR)$ при $r<R$, $h_n^{(1)}(kr)$ — сферические ганкелевы функции, R — радиус гасящей сферы.

Амплитуды пространственных гармоник гасящего поля w_q связаны с распределением поверхностной плотности объемной скорости гасящих монополей $V(\theta, \varphi)$ формулами

$$V(\theta, \varphi) = \sum_{q \geqslant 0} V_q \psi_q(\theta, \varphi), \qquad V_q = w_q/(\rho c k^2 R^2). \tag{10}$$

Условие гашения поля $\tilde{p}$ во внешней области имеет вид $\bar{p}+\tilde{p}=0$, откуда, согласно формулам (8) и (9),

$$a_q + w_q j_n(kR) = 0, \quad q = 0, 1, 2, \ldots. \tag{11}$$

При w_q, удовлетворяющих условию (11), поле во внешней области будет равно падающему полю $\mathscr{P}$.

Формулировка второго варианта в пространственном случае противоречива: «абсолютно черных тел» ограниченных размеров быть не может [13]. В самом деле, если представить себе, что пространственные гармоники падающего поля $\mathscr{P}$ разбиты на сходящиеся $\mathscr{P}_q^{(2)}$ и расходящиеся $\mathscr{P}_q^{(1)}$ гармоники путем замены в формуле (7) функций Бесселя j_n полусуммами функций Ганкеля $h_n^{(1,2)}$ первого и второго рода $\left(\mathscr{P}_q^{(1,2)} = \frac{1}{2} A_q h_n^{(1,2)}(kr)\psi_q(\theta,\varphi)\right)$, то «абсолютно черная» сфера должна была бы гасить все волны $\mathscr{P}_q^{(1)}$ (поглощать волны $\mathscr{P}_q^{(2)}$). Однако поскольку функции $h_n^{(1,2)}(kR)$, а следовательно, и $\mathscr{P}_q^{(1,2)}$ на гасящей сфере быстро возрастают по абсолютной величине с ростом n при $n>kR$, то для гашения волн $\mathscr{P}_q^{(1)}$ высоких номеров $(n\gg kR)$ потребовались бы неограниченно большие объемные скорости гасящих монополей. Однако практически гашения волн высоких номеров и не требуется, поскольку как раз начиная с тех номеров, для которых $|\mathscr{P}_q^{(1)}|$ начинают расти, излучение этих гармоник во внешнюю область быстро падает, а сумма $\mathscr{P}_q^{(1)}$ и $\mathscr{P}_q^{(2)}$ по мере увеличения номера быстро стремится к нулю и суммарный вклад в поле $\mathscr{P}$ членов ряда (7) высоких номеров мал. Поэтому во втором варианте мы поставим задачу гашения во внешней области, помимо поля $\tilde{p}$, еще и только конечного числа первых расходящихся гармоник $\mathscr{P}_q^{(1)}$. Приравнивая нулю во внешней области сумму гармоник этих полей и гасящего поля $\bar{p}$ для этих номеров, находим, что требуемое гашение будет достигнуто при выполнении условия

$$\frac{1}{2} A_q + a_q + w_q j_n(kR) = 0 \tag{12}$$

для этих номеров и условия (11) — для остальных. Такой вариант соответствует не только гашению звука, источники которого расположены во внутренней области, но и уменьшению реверберации в шумном помещении.

В третьем варианте требуется погасить во внутренней области $r<R$ поле внешних источников звука. Приравнивая нулю во внутренней области сумму падающего и гасящего поля, для этого варианта получим

$$A_q + w_q h_n^{(1)}(kR) = 0, \quad q=0,1,2,\ldots. \tag{13}$$

Для всех трех вариантов задачи амплитуды a_q и A_q выразим через w_q, звуковое давление p и радиальную скорость частиц v на приемной сферической поверхности радиуса (a), меньшего чем R для первого и второго вариантов и большего чем R для третьего варианта. Из уравнений (7)—(9) получим

$$p-\bar{p} = \sum_{q\geqslant 0} \psi_q(\theta,\varphi)\left[a_q h_n^{(1)}(ka) + A_q j_n(ka)\right], \tag{14}$$

$$i\rho c(v-\bar{v}) = \sum_{q\geqslant 0} \psi_q(\theta,\varphi)\left[a_q h_n^{(1)\prime}(ka) + A_q j_n'(ka)\right], \tag{15}$$

где $\bar{v}$ — радиальная скорость частиц на приемной поверхности, соответствующая полю $\bar{p}$, штрихом отмечено дифференцирование функции по аргументу. С учетом ортогональности сферических функций на сфере и равенства

$$\gamma_{mn} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \psi_q^2(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta = 1$$

при $\psi_q \neq 0$, где $\gamma_{mn}=(n-m)!(2n+1)/[(n+m)!2\pi(1+\delta_m)]$, $\delta_0=1$, $\delta_m=0$ при $m\neq 0$, уравнения (14) и (15) после интегрирования по θ и φ с весовой функцией $\psi_q(\theta, \varphi)$ сводятся к виду

$$\Pi_q-\overline{\Pi}_q=a_q h_n^{(1)}(ka)+A_q j_n(ka), \tag{16}$$

$$i(\Pi_q'-\overline{\Pi}_q')=a_q h_n^{(1)'}(ka)+A_q j_n'(ka). \tag{17}$$

Здесь

$$\Pi_q=\gamma_{mn}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} p(a, \theta, \varphi)\psi_q(\theta, \varphi)\sin\theta\, d\theta,$$

$$\Pi_q'=\gamma_{mn}\rho c\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} v(a, \theta, \varphi)\psi_q(\theta, \varphi)\sin\theta\, d\theta,$$

а $\overline{\Pi}_q$ и $\overline{\Pi}_q'$ получаются заменой p и v в этих формулах соответственно на $\bar{p}$ и $\bar{v}$. Из уравнений (16) и (17), учитывая соотношение

$$j_n(x)h_n^{(1)'}(x)-j_n'(x)h_n^{(1)}(x)=i/x^2, \tag{18}$$

получим:

$$a_q=(ka)^2[i(\Pi_q-\overline{\Pi}_q)j_n'(ka)+(\Pi_q'-\overline{\Pi}_q')j_n(ka)], \tag{19}$$

$$A_q=-(ka)^2[i(\Pi_q-\overline{\Pi}_q)h_n^{(1)'}(ka)+(\Pi_q'-\overline{\Pi}_q')h_n^{(1)}(ka)]. \tag{20}$$

Подставляя в формулу для $\overline{\Pi}_q$ выражение для $\bar{p}$ по формуле (8), а в формулу для $\overline{\Pi}_q'$ — соответственное выражение для $\bar{v}$, найдем:

$$\overline{\Pi}_q=R_n(ka)w_q, \quad i\overline{\Pi}_q'=R_n'(ka)w_q.$$

Отсюда, учитывая соотношение (18), получим

$$(ka)^2[i\overline{\Pi}_q j_n'(ka)+\overline{\Pi}_q' j_n(ka)]=\begin{cases} 0 & \text{при } a<R, \\ w_q j_n(kR) & \text{при } a>R, \end{cases}$$

$$(ka)^2[i\overline{\Pi}_q h_n^{(1)'}(ka)+\overline{\Pi}_q' h_n^{(1)}(ka)]=\begin{cases} -w_q h_n^{(1)}(kR) & \text{при } a<R \\ 0 & \text{при } a>R. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в формулы (19) и (20), а получившиеся при этом значения a_q и A_q — в формулы (11)—(13), напишем эти три формулы, относящиеся к трем вариантам задачи, соответственно в виде

$$[j_n(kR)w_q]_{\mathrm{I}}=-(ka)^2[i\Pi_q j_n'(ka)+\Pi_q' j_n(ka)], \quad a<R, \tag{21}$$

$$[h_n^{(2)}(kR)w_q]_{\mathrm{II}}=-(ka)^2[i\Pi_q h_n^{(2)'}(ka)+\Pi_q' h_n^{(2)}(ka)], \quad a<R, \tag{22}$$

$$[h_n^{(1)}(kR)w_q]_{\mathrm{III}}=(ka)^2[i\Pi_q h_n^{(1)'}(ka)+\Pi_q' h_n^{(1)}(ka)], \quad a>R \tag{23}$$

При наличии достаточного поглощения внутри сферы, по крайней мере когда поле каждого монополя на гасящей сфере имеет ненулевые амплитуды рассматриваемых пространственных гармоник во внешней области, величины w_q для первого и второго вариантов задачи остаются конечными при всех kR, причем в случае совпадения kR с одним из корней бесселевой функции соответственного номера w_q для первого варианта представляет неопределенность типа 0/0, аналогично описываемому формулами (2) и (3) одномерному случаю. В случае ограниченного внешнего пространства при достаточном в нем поглощении величины w_q для третьего варианта также ограничены при всех kR. Формулы (21)—(23) и (10) дают искомые решения. Для низкочастотного поля выражения для w_q можно разложить по степеням kR. Учитывая, что умножение функции на $-ikc$ соответствует дифференцированию ее по времени, и пренебрегая

величинами порядка $(kR)^4$ по сравнению с единицей, при этом получим соответственно для трех рассматриваемых вариантов задачи:

$$(24)\qquad \left[\rho R\frac{\partial}{\partial t}V_q(t)\right]_{\mathrm{I}}=\alpha^{n+1}\left[-n\Pi_q(t)+\right.$$
$$\left.+\frac{(2+n)(1-\alpha^2)-2}{2n+3}\left(\frac{R}{c}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Pi_q(t)+\ldots\right]+$$
$$+\alpha^{n+2}\left[-\frac{R}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Pi_q'(t)+\frac{1-\alpha^2}{2n+3}\left(\frac{R}{c}\right)^3\frac{\partial^3}{\partial t^3}\Pi_q'(t)+\ldots\right],\ \alpha<1,$$

$$(25)\qquad \left[\rho R\frac{\partial}{\partial t}V_q(t)\right]_{\mathrm{II}}=\left[\Pi_q(t)-\delta_n\frac{R}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Pi_q(t)+\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha^2+1-2\delta_n}{2(2n-1)}\left(\frac{R}{c}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Pi_q(t)-\frac{1}{3}\gamma_n\left(\frac{R}{c}\right)^3\frac{\partial^3}{\partial t^3}\Pi_q(t)+\ldots\right]-$$
$$-\alpha\left[\frac{R}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Pi_q'-(1-\alpha)\delta_n\left(\frac{R}{c}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Pi_q'(t)+\right.$$
$$\left.+\frac{1-\alpha}{2(2n-1)}(\alpha+1-2\delta_n)\left(\frac{R}{c}\right)^3\frac{\partial^3}{\partial t^3}\Pi_q'+\ldots\right],\quad \alpha<1,$$

$$(26)\qquad \left[\rho R\frac{\partial}{\partial t}V_q(t)\right]_{\mathrm{III}}=-\Pi_q(t)-\delta_n\frac{R}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Pi_q(t)-$$
$$-\frac{\alpha^2+1-2\delta_n}{2(2n-1)}\left(\frac{R}{c}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Pi_q(t)-\frac{1}{3}\gamma_n\left(\frac{R}{c}\right)^3\frac{\partial^3}{\partial t^3}\Pi_q(t)+\ldots$$
$$\ldots+\alpha\left[\frac{R}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Pi_q'(t)-(\alpha-1)\delta_n\left(\frac{R}{c}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Pi_q'(t)-\right.$$
$$\left.-\frac{\alpha-1}{2(2n-1)}(\alpha+1-2\delta_n)\left(\frac{R}{c}\right)^3\frac{\partial^3}{\partial t^3}\Pi_q'(t)+\ldots\right],\quad \alpha>1,$$

где $\alpha=a/R$, $\gamma_0=\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)(\alpha-1)^2$, $\gamma_1=-(1+2\alpha^3)$, $\gamma_n=0$ при $n\geqslant 2$. Формулы (24)–(26) пригодны для области частот, в которой

$$(kR)^4\{(1-\alpha)^2+[1/(n+1)]\}\ll(2n+3)^2.$$

Для высокочастотной части поля выражения для w_q и V_q по аналогии с формулами (3)–(6) можно представить в виде линейной комбинации величин w_q (или V_q), Π_q и Π_q' с коэффициентами, являющимися произведениями простых фазовых множителей на соответственный ряд по степеням $1/(kR)$. Для этого заменим в формуле (21) функции Бесселя полусуммами функций Ганкеля первого и второго рода и поделим обе части равенств (21) и (22) на $h_n^{(2)}(kR)$, а обе части равенства (23) – на $h_n^{(1)}(kR)$. Затем, представив содержащиеся в этих преобразованных уравнениях отношения вида $h_n^{(1)}(x)/h_n^{(1,2)}(z)$ и $h_n^{(1)\prime}(x)/h_n^{(1,2)}(z)$ произведениями функций $\exp[i(\pm z-x)]$ на соответственные ряды по степеням $1/z$ при $x/z=\mathrm{const}$ и учитывая, что деление функции на $(-ikc)$ соответствует интегрированию ее по времени, после простых, но громоздких преобразований получим соответственно для трех рассматриваемых задач при $(kR)^3\gg[(n+1)n]^3$:

$$(27)\qquad \left[\rho R\frac{\partial}{\partial t}V_q(t)\right]_{\mathrm{I}}=-F_n(t_2)-G_n(t_2)+\rho c(-1)^n\left\{\frac{R}{c}\frac{\partial}{\partial t}V_q(t_0)+\right.$$

$$+(n+1)nV_q(t_0)+(n+1)^2n^2\frac{c}{2R}\int\limits_{-\infty}^{t_0}V_q(\tau)d\tau+\ldots\Big\}+$$

$$+(-1)^n\Big\{\frac{a}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\Pi_q'(t_1)-\Pi_q(t_1)]+\frac{(n+1)n}{2}\Pi_q'(t_1)-$$

$$-\left[1+(n+1)n\frac{1+\alpha}{2}\right]\Pi_q(t_1)-(n+1)n\frac{c}{2a}\left[1+\frac{1}{2}b_n(1+\alpha)^2\right]\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{t_1}\Pi_q(\tau)d\tau-(n+1)n\frac{c}{2a}\Big[(n+1)n\alpha-(1-\alpha)\times$$

$$\times\left(\frac{1-\alpha}{2}b_n-1\right)\Big]\int\limits_{-\infty}^{t_1}\Pi_q'(\tau)d\tau+\ldots\Big\},$$

$$\left[\rho R\frac{\partial}{\partial t}V_q(t)\right]_{\text{II}}=-F_n(t_2)-G_n(t_2), \tag{28}$$

$$\left[\rho R\frac{\partial}{\partial t}V_q(t)\right]_{\text{III}}=F_n(t_3)-G_n(t_3), \tag{29}$$

где
$$F_n(t)=\frac{a}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Pi_q'(t)-\left[1+(n+1)n\frac{1-\alpha}{2}\right]\Pi_q(t)-$$

$$-(n+1)n(1-\alpha)\left(1-\frac{1-\alpha}{2}b_n\right)\frac{c}{2a}\int\limits_{-\infty}^{t}\Pi_q'(\tau)d\tau+\ldots,$$

$$G_n(t)=\frac{a}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Pi_q(t)-\frac{(n+1)n}{2}\Big\{(1-\alpha)\Pi_q'(t)-$$

$$-[2+(1-\alpha)^2b_n]\frac{c}{2a}\int\limits_{-\infty}\Pi_q(\tau)d\tau+\ldots\Big\},$$

$$t_0=t-2\frac{R}{c},\quad t_1=t-\frac{R+a}{c},\quad t_2=t-\frac{R-a}{c},$$

$$t_3=t-\frac{a-R}{c},\quad b_n=1+\frac{(n+1)n}{2},\quad \alpha=\frac{a}{R}.$$

Формулы (28) и (29) в отличие от формулы (27) содержат сравнительно небольшие задержки по времени t_2-t и t_3-t, равные $|R-a|/c$, но не содержат больших задержек $|R+a|/c$ и $2R/c$ [2]. В случае $n=0$ ряды в формулах (27)–(29) обрываются и эти формулы становятся справедливыми при всех kR.

Полученные результаты приложимы и к случаю дискретного распределения гасящих излучателей, поскольку исходные формулы (14), (15) справедливы и в этом случае. Для решения задачи гашения в этом случае дополнительно потребуется выразить объемные скорости U_s гасящих монополей через их спектральные компоненты V_q. Разумеется, N монополями можно погасить только N пространственных гармоник. Соответст-

---

[2] В работе [10] избавление от больших задержек достигается имитацией гасящей системой «черной» сферы Макдональда [13], дифракционное поле которой равно сумме дифракционных полей мягкой и жесткой сфер.

венные этому объемные скорости U_s мы найдем из системы уравнений

$$\sum_{s=1}^{N} U_s \psi_q(\theta_s, \varphi_s) = V_q 2\pi R^2 (1+\delta_m)(n+m)!/[(n-m)!(2n+1)], \tag{30}$$

где q пробегает все N значений номеров подлежащих гашению пространственных гармоник, θ_s, φ_s — угловые координаты s-го монополя. При этом координаты θ_s, φ_s должны быть такими, чтобы определитель системы (30) был отличен от нуля. Отсюда видно, что U_s представляются линейными комбинациями N величин V_q, входящих в систему (30):

$$U_s(t) = \sum_q a_{q,s} V_q(t) 2\pi R^2 (1+\delta_m)(n+m)!/[(n-m)!(2n+1)]$$

с коэффициентами $a_{q,s}$, не зависящими от вида звукового поля и удовлетворяющими системе уравнений

$$\sum_{s=1}^{N} a_{\varkappa,s} \psi_q(\theta_s, \varphi_s) = \delta_{\varkappa-q},$$

где $\varkappa$ пробегает те же N значений, что и q. При расположении монополей в вершинах правильных многогранников $a_{q,s}$ оказываются пропорциональными $\psi_q(\theta_s, \varphi_s)$ для первых N пространственных гармоник. Соответственные объемные скорости монополей будут

при $N=1$ $U_1=4\pi R^2 V_0$;

при $N=2$, $\theta_1=0$, $\theta_2=\pi$ $U_1=2\pi R^2\left(V_0+\frac{1}{3}V_1\right)$, $U_2=2\pi R^2\left(V_0-\frac{1}{3}V_1\right)$;

при четырех монополях, расположенных в вершинах тетраэдра $\theta_1=0$, $\theta_2=\theta_3=\theta_4=\arccos(-1/3)$, $\varphi_2=0$, $\varphi_3=-\varphi_4=2\pi/3$

$$U_1=\pi R^2(V_0+V_1), \quad U_2=\pi R^2\left(V_0-\frac{1}{3}V_1-\frac{2}{3}\sqrt{2}V_2\right),$$

$$U_{3,4}=\pi R^2\left(V_0-\frac{1}{3}V_1+\frac{1}{3}\sqrt{2}V_2\mp\sqrt{2/3}V_3\right);$$

при шести монополях, расположенных в вершинах октаэдра $\theta_1=\theta_2=\pi/4$, $\theta_3=\theta_4=\pi/2$, $\theta_5=\theta_6=3\pi/4$, $\varphi_1=\varphi_5=0$, $\varphi_3=-\varphi_4=\pi/2$, $\varphi_2=\varphi_6=-\pi$

$$U_{1,6}=\frac{2}{3}\pi R^2\left[V_0\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(V_1-V_2)+\frac{2}{5}V_4-\frac{3}{5}V_5\right],$$

$$U_{2,5}=\frac{2}{3}\pi R^2\left[V_0\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(V_1+V_2)+\frac{2}{5}V_4+\frac{3}{5}V_5\right]$$

$$U_{3,4}=\frac{2}{3}\pi R^2\left[V_0\mp V_3-\frac{4}{5}V_4\right],$$

где первому из индексов соответствует верхний знак в формулах, второму — нижний.

Для замены непрерывного распределения излучателей (приемников) дискретным существенно, что поскольку излучение пространственных гармоник быстро уменьшается по мере того, как их структура на излучающей поверхности становится более мелкой, актуальным является гашение лишь определенного числа гармоник начальных номеров, при больших волновых размерах гасящей системы — тех из них, масштаб изменения поля которых на излучающей поверхности больше или порядка половины длины звуковой волны. Поэтому удовлетворительная аппроксимация непрерывного распределения излучателей (приемников) дискретным

достигается уже при расстояниях между соседними приемниками, несколько меньших масштаба изменения поля самой мелкоструктурной из гармоник, подлежащих гашению; в случае больших волновых размеров системы — при расстояниях, несколько меньших половины длины звуковой волны. Этот результат для рассматриваемой здесь задачи можно получить из рассуждений, аналогичных приведенным в работах [14, 15].

Амплитуды пространственных гармоник, подлежащих гашению, можно также приближенно выразить через показания N приемников звукового давления $p(\theta_\sigma, \varphi_\sigma)$ и N приемников колебательной скорости $v(\theta_\sigma', \varphi_\sigma')$, где θ_σ, φ_σ и θ_σ', φ_σ' — угловые координаты соответственных приемников, расположенных на сфере, $\sigma=1, 2, \ldots, N$, способом, приведенным в [6] для случая волновода. Для этого умножим обе части уравнений (14), (15), написанных для координат соответственных приемников, соответственно на $\varphi_\varkappa(\theta_\sigma, \varphi_\sigma)\Delta_{\sigma,\varkappa}$ и $\psi_\varkappa(\theta_\sigma', \varphi_\sigma')\Delta_{\sigma,\varkappa}'$, где $\Delta_{\sigma,\varkappa}$ и $\Delta_{\sigma,\varkappa}'$ удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{\sigma=1}^{N} \psi_q(\theta_\sigma, \varphi_\sigma)\psi_\varkappa(\theta_\sigma, \varphi_\sigma)\Delta_{\sigma,\varkappa}=\delta_{q-\varkappa},$$

$$\sum_{\sigma=1}^{N} \psi_q(\theta_\sigma', \varphi_\sigma')\psi_\varkappa(\theta_\sigma', \varphi_\sigma')\Delta_{\sigma,\varkappa}'=\delta_{q-\varkappa}$$

для всех комбинаций индексов N волн, амплитуды которых требуется найти, и просуммируем по σ от 1 до N. Выбрав N достаточно большим, чтобы можно было пренебречь вкладом остальных пространственных гармоник, мы получим уравнения (16), (17) для интересующих нас N значений q и все последующие уравнения (19)—(29) с той лишь разницей, что входящие в них коэффициенты Π_q и Π_q' здесь будут равны

$$\Pi_q = \sum_{\sigma=1}^{N} p(\theta_\sigma, \varphi_\sigma)\psi_q(\theta_\sigma, \varphi_\sigma)\Delta_{\sigma,q},$$

$$\Pi_q' = \sum_{\sigma=1}^{N} \rho c v(\theta_\sigma', \varphi_\sigma')\psi_q(\theta_\sigma', \varphi_\sigma')\Delta_{\sigma,q}'.$$

При расположении приемников по вершинам правильных многогранников коэффициенты $\Delta_{\sigma,q}$ и $\Delta_{\sigma,q}'$ не зависят от σ.

Автор благодарит М. А. Исаковича и А. И. Бойко за полезное обсуждение настоящей статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малюжинец Г. Д.* Нестационарные задачи теории дифракции для волнового уравнения с финитной правой частью.— Тр. Акуст. ин-та, 1971, вып. 15, с. 124—139.
2. *Jessel M.* Acoustique théorique. Paris: Masson et C^le, 1973.
3. *Федорюк М. В.* О работах Г. Д. Малюжина по теории волновых потенциалов.— Тр. Акуст. ин-та, 1971, вып. 15, с. 169—179.
4. *Федорюк М. В.* Об одном методе активного гашения звука.— Акуст. ж., 1974, т. 20, № 5, с. 809—810.
5. *Федорюк М. В.* О гашении звука в волноводах активным методом.— Акуст. ж., т. 21, № 2, с. 281—285.
6. *Урусовский И. А.* Об активной звукоизоляции в волноводе.— Акуст. ж., 1977, т. 23, № 2, с. 304—312.
7. *Мазаников А. А., Тютекин В. В., Уколов А. Т.* Активная система гашения акустических полей в многомодовом волноводе.— Акуст. ж., 1977, т. 23, № 3, с. 485—487.
8. *Poole J. H. B., Leventhall H. G.* An experimental study of Swinbank's method of active attenuation of sound in ducts.— J. Sound and Vibration, 1976, v. 49, № 2, p. 257—262.
9. *Федорюк М. В.* Активное гашение звука непрерывными решетками из монополей.— Акуст. ж., 1979, т. 25, № 1, с. 113—118.

10. *Маваников А. А., Тютекин В. В., Федорюк М. В.* Активное гашение звуковых полей методом пространственных гармоник.— Акуст. ж., 1980, т. 26, № 5, с. 759—763.
11. *Урусовский И. А.* Об активной звукоизоляции волновода с излучателями-монополями и приемниками-диполями.— Акуст. ж., 1980, т. 26, № 2, с. 281—287.
12. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.— Л.: ГИТТЛ, 1947, § 290, с. 625.
13. *Захарьев Л. Н., Леманский А. А.* Рассеяние волн «черными» телами. Сов. радио, М.: 1972.
14. *Коняев С. И., Лебедев В. И., Федорюк М. В.* Дискретная аппроксимация сферической поверхности Гюйгенса.— Акуст. ж., 1977, т. 23, № 4, с. 650—651.
15. *Коняев С. И., Лебедев В. И., Федорюк М. В.* Факторизация звукового поля с помощью концентрических сферических приемных поверхностей.— Акуст. ж., 1979, т. 25, № 5, с. 732—736.

Акустический институт им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
30.VI.1980