АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXVII 1981 Вып. 5

УДК 534:2:532

ЧАСТОТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МЕХАНИЧЕСКОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА, ПОГРУЖЕННОГО В СРЕДУ

Голямина И. П., Исакович М. А.

Рассмотрены вынужденные колебания осциллятора с учетом реакции окружающей среды. Введены понятия «вынужденной» резонансной частоты и «вынужденной» добротности. На примере сферической оболочки показано, как влияние среды расширяет частотную полосу осциллятора, и даны оценки этого эффекта для осцилляторов с различной массой.

Колебательные свойства механического гармонического осциллятора обычно характеризуют частотно-независимыми параметрами: массой, коэффициентом упругости и коэффициентом потерь. Пользуясь этими величинами, можно построить его частотную характеристику — резонансную кривую — и найти резонансную частоту и добротность осциллятора.

Вышесказанное относится, однако, только к работе осциллятора в вакууме. Погружение осциллятора в какую-нибудь среду (как, например, при использовании его в качестве источника звука) меняет его колебательные свойства таким образом, что делается невозможно охарактеризовать их частотно-независимыми параметрами, какие бы «эффективные» значения им ни придавать. В самом деле, реакция среды эквивалентна добавлению к массе осциллятора присоединенной массы среды и добавлению к коэффициенту потерь величины, отвечающей излучению акустической энергии в среду, причем как добавочная масса, так и добавочный коэффициент потерь существенно зависят от вынуждающей частоты. Для иллюстрации такой зависимости на фиг. 1 представлены для осциллятора в виде пульсирующей сферы известные зависимости от безразмерной частоты ka отношения $\mu/(4\pi a^3\rho)=1/(1+(ka)^2)$ присоединенной массы μ к ее значению на нулевой частоте и отношения $\alpha/(\rho c)=(ka)^2/(1+(ka)^2)$ удельного коэффициента потерь на излучение α к его значению на бесконечной частоте; здесь a — радиус сферы, ρ — плотность среды, $k=\omega/c$ — волновое число звука частоты ω в среде со скоростью звука равной c.

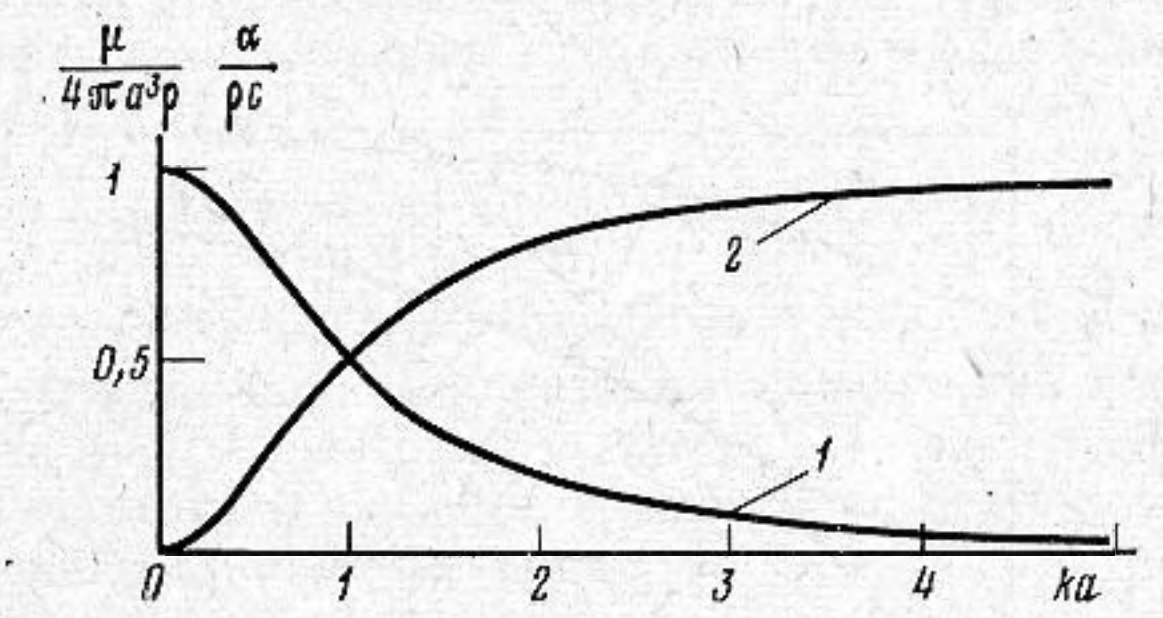
Самый факт частотной зависимости присоединенной массы и добавочного коэффициента потерь, конечно, хорошо известен (см., например, [1]). Тем не менее в литературе не приходилось встречать указаний на непосредственно следующий отсюда вывод, что погруженный осциллятор нельзя имитировать никаким осциллятором, работающим в вакууме, что, строго говоря, к погруженному осциллятору неприменимы понятия резонансной частоты и добротности и что этими понятиями можно продолжать пользоваться только в узкой полосе частот, например для узкополосных колебательных систем — вблизи резонансной частоты, где изменение «эффективных» параметров достаточно мало. До сих пор при изучении погруженных осцилляторов обычно подразумевалось, что это требование выполнено.

В связи со сказанным ниже проведено рассмотрение погруженного осциллятора в случае, когда пренебрегать частотным ходом «эффективных»

параметров уже нельзя. В этой же связи предложено также обобщение понятий резонансной частоты и добротности и на этот случай.

Расчеты проведем для простейшего примера: для осциллятора, выполненного в виде тонкостенной сферической оболочки, совершающей пульсационные колебания. Будем считать, что колебания оболочки возбуждаются переменным сторонним давлением П частоты ω, распределенным по оболочке равномерно (временной множитель $e^{-i\omega t}$ здесь и далее опущен). Такое устройство можно рассматривать как осциллятор с одной (пульсационной) степенью свободы. С точки зрения классификации осциллирующих тел, как излучателей звука [2], это — излучатель нулевого порядка.

Обозначим через ρ_0, E, ν плотность, модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки. Ее толщину δ будем считать малой по сравне-



Фиг. 1. Зависимости приведенных значений присоединенной массы (*1*) и удельного коэффициента потерь на излучение (*2*) от безразмерной частоты для пульсирующей сферы

нию с радиусом a оболочки и будем пренебрегать величинами порядка δ/a по сравнению с единицей.

Относительное удлинение e радиуса оболочки при колебаниях связано с радиальной скоростью v оболочки соотношением:

$$v=-i\omega ae. \tag{1}$$

Упругое восстанавливающее напряжение Ф равно:

$$\Phi=-\frac{2E\delta}{a(1-\nu)}e. \tag{2}$$

Диссипативное напряжение θ равно:

$$\theta=i\omega\alpha_0 ae, \tag{3}$$

где α_0 — удельный коэффициент потерь для оболочки в вакууме. Уравнение движения оболочки в вакууме можно записать в виде

$$-\omega^2\rho_0\delta ae=-\Pi+\Phi+\theta, \tag{4}$$

откуда, пользуясь (1)—(3), получим

$$e=e_0\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}-i\frac{\omega}{\omega_0}\frac{1}{Q_0}\right)^{-1}= \tag{5}$$
$$=e_0\left(1-\frac{(ka)^2}{(k_0a)^2}-i\frac{ka}{k_0a}\frac{1}{Q_0}\right)^{-1}$$

где $e_0=-\Pi a(1-\nu)/(2E\delta)$ — относительное удлинение радиуса оболочки при нулевой частоте (в статическом режиме), $\omega_0=\sqrt{\frac{2E}{a^2\rho_0(1-\nu)}}$ — резо-

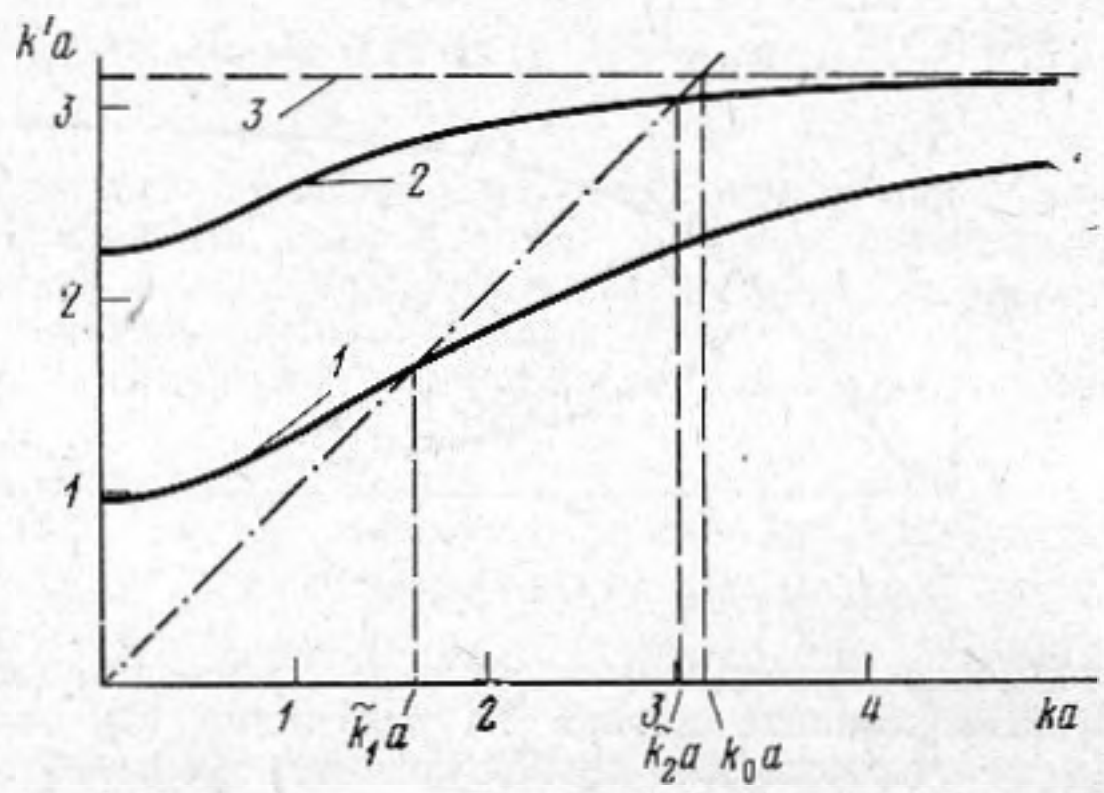
нансная частота колебаний оболочки, $k_0=\omega_0/c$, $Q_0=\omega_0\rho_0\delta/\alpha_0$ — добротность.

При погружении оболочки в среду на ее поверхность станет действовать дополнительно давление $p=-\omega^2\rho a^2\dfrac{1+ika}{1+(ka)^2}e$ со стороны среды. Уравнение движения погруженной оболочки имеет вид

$$-\omega^2\rho_0\delta ae=-\Pi+\Phi+\theta-p, \tag{6}$$

откуда найдем

$$e=e_0\left(1-\frac{\omega^2}{\omega'^2}-i\frac{\omega}{\omega'}\frac{1}{Q'}\right)^{-1}=e_0\left(1-\frac{(ka)^2}{(k'a)^2}-i\frac{ka}{k'a}\frac{1}{Q'}\right)^{-1}, \tag{7}$$



Фиг. 2. Зависимость вынужденной резонансной частоты от вынуждающей частоты для «легкого» (*1*) и «тяжелого» (*2*) осцилляторов; штриховая линия (*3*) — резонансная частота обоих осцилляторов в вакууме; штрихпунктиром показана биссектриса координатного угла

где введены обозначения

$$\omega'^2=\omega_0^2\frac{1+(ka)^2}{1+(ka)^2+\rho a/(\rho_0\delta)}; \tag{8}$$

$$k'=\omega'/c;\quad \frac{1}{Q'}=\frac{k'a}{k_0a}\frac{1}{Q_0}+\frac{(ka)^2}{k'a}\left[1-\frac{(k'a)^2}{(k_0a)^2}\right].$$

Удельная мощность излучения w звука в среду погруженным осциллятором оказывается равной:

$$w=\frac{1}{2}\rho c^3\frac{(ka)^4}{1+(ka)^2}|e|^2=\frac{1}{2}\rho c^3\frac{e_0^2(ka)^4}{1+(ka)^2}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\left[1-\dfrac{(k^a)^2}{(k'a)^2}\right]^2+\dfrac{(ka)^2}{(k'a)^2}\dfrac{1}{Q'^2}}.$$

Сравнивая (5) и (7), видим, что по форме они совпадают, однако по существу это совершенно разные формулы, поскольку величины ω' и Q', стоящие в (7) на месте величин ω_0 и Q_0, в (5) — не постоянные параметры, но сами зависят от вынуждающей частоты. Качественно различными оказываются и частотные характеристики осциллятора в вакууме и погруженного осциллятора.

Тем не менее именно ввиду совпадения выражений (5) и (7) по форме для каждой заданной вынуждающей частоты поведение погруженного

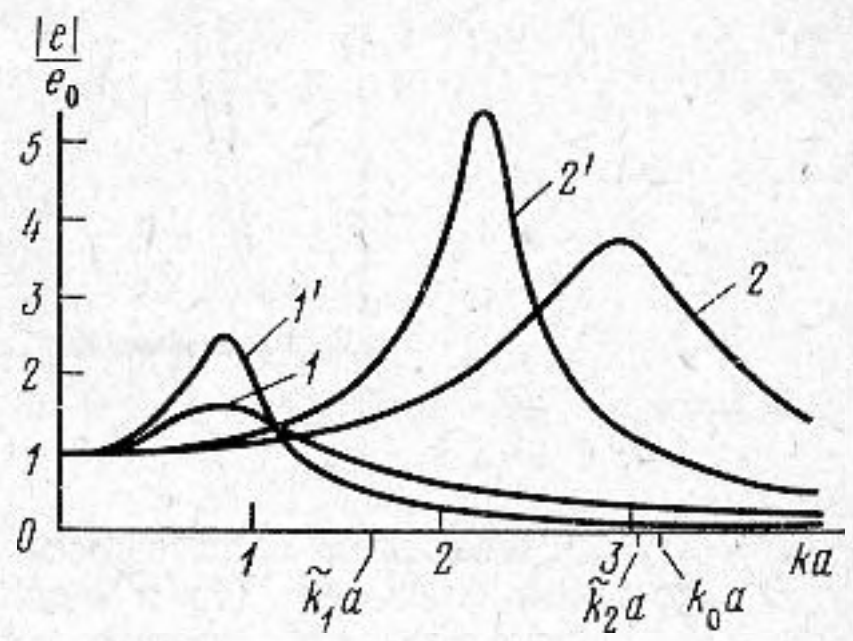
осциллятора можно определить по той же формуле (5), что и для осциллятора в вакууме, заменяя только резонансную частоту и добротность значениями ω' и Q', отвечающими выбранной вынуждающей частоте. Поэтому целесообразно называть частоту ω' «вынужденной» или «текущей» резонансной частотой, а величину Q' — «вынужденной» или «текущей» добротностью погруженного осциллятора.

Вынужденная резонансная частота всегда ниже резонансной частоты осциллятора в вакууме; при изменении вынуждающей частоты от нуля до бесконечности вынужденная резонансная частота растет от $\omega_0/\sqrt{1+\rho a/(\rho_0\delta)}$ до ω_0. «Истинную» резонансную частоту $\tilde{\omega}$ погруженного осциллятора целесообразно определить из условия совпадения вынужденной резонансной частоты с вынуждающей частотой: $\omega=\omega'=\tilde{\omega}$. На этой частоте упругостное сопротивление осциллятора компенсируется сопротивлением его эффективной массы. Величина $\tilde{k}a=\tilde{\omega}a/c$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$(\tilde{k}a)^4-\left[(k_0a)^2-\frac{\rho a}{\rho_0\delta}-1\right](\tilde{k}a)^2-(k_0a)^2=0.$$

При изменении вынуждающей частоты от нуля до бесконечности вынужденная добротность падает монотонно от значения $Q_0\sqrt{1+\rho a/(\rho_0\delta)}$ до $Q_0/(1+\rho c/\alpha_0)$. На малых частотах вынужденная добротность превышает добротность осциллятора в вакууме, несмотря на дополнительные потери, вызванные излучением звука в среду. Это обусловлено появлением присоединенной массы, увеличивающей эффективную массу осциллятора. При повышении частоты присоединенная масса уменьшается, а излучение растет, в результате чего добротность падает. При $ka=\dfrac{1/Q_0}{1/(k_0a)+1/(k'a)}$ вынужденная добротность равна добротности осциллятора в вакууме. «Истинной» добротностью $\tilde{Q}$ назовем вынужденную добротность на резонансной частоте:

$$\frac{1}{\tilde{Q}}=\frac{\tilde{k}a}{k_0a}\frac{1}{Q_0}+\tilde{k}a\left[1-\frac{(\tilde{k}a)^2}{(k_0a)^2}\right].$$

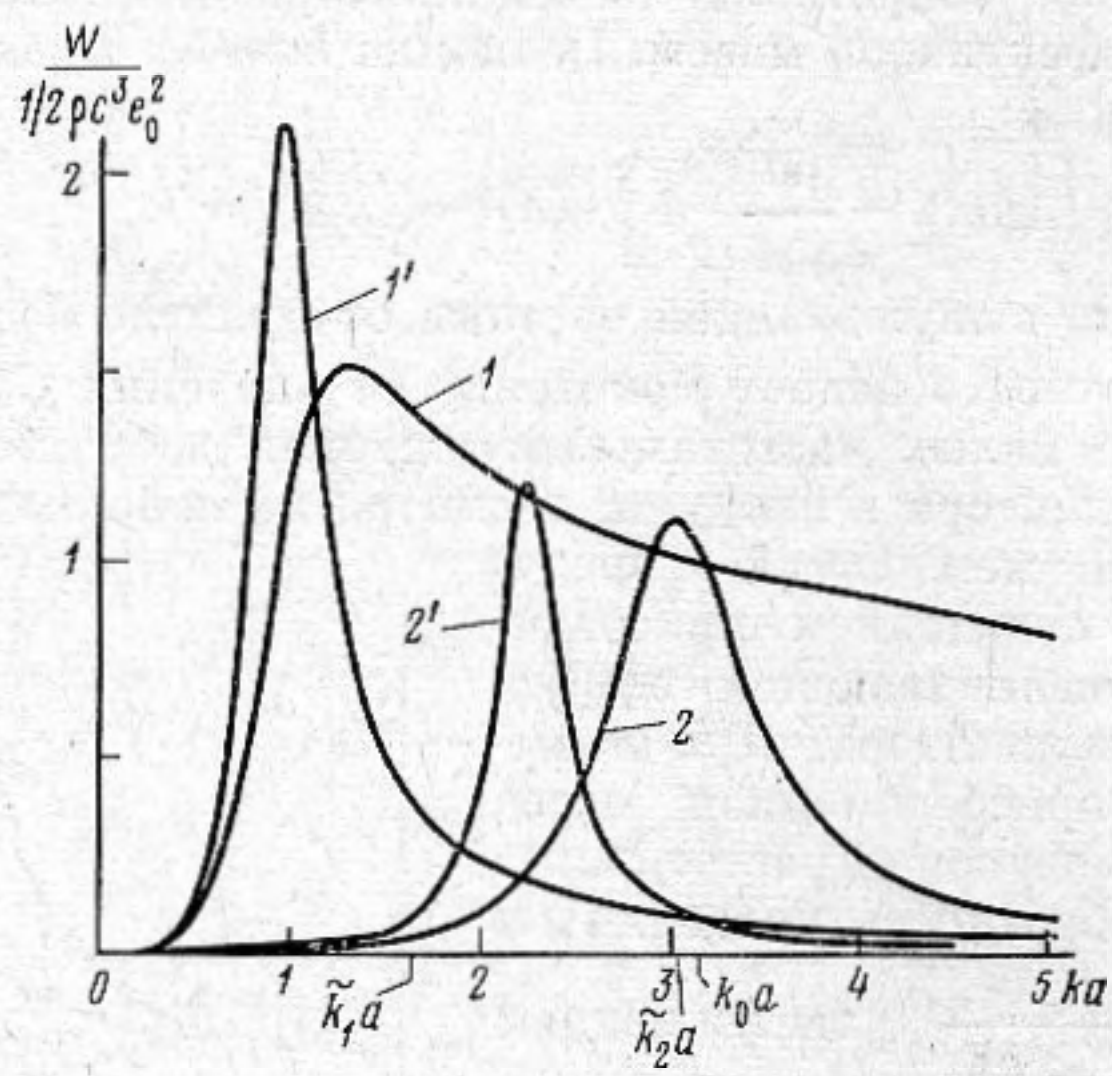


Фиг. 3. Частотная зависимость относительного удлинения радиуса сферы для «легкого» (*1*) и «тяжелого» (*2*) погруженных осцилляторов и для соответствующих осцилляторов сравнения (*1'*) и (*2'*)

Рассмотрим теперь частотные характеристики погруженного осциллятора, сопоставляя их для наглядности с характеристиками некоторого фиктивного «осциллятора сравнения», отличающегося от данного погруженного осциллятора только тем, что для него величина присоединенной массы принята независящей от частоты и равной ее значению $4\pi a^3\rho$ на нулевой частоте: резонансная частота осциллятора сравнения постоянна и равна вынужденной резонансной частоте данного погруженного осциллятора при нулевой вынуждающей частоте. Эффективные коэффициенты потерь для данного осциллятора и для осциллятора сравнения будем считать равными на каждой вынуждающей частоте. Такой выбор осциллятора сравнения позволит выявить интересующее нас влияние частотной зависимости присоединенной массы на поведение погруженного осциллятора. Очевидно, это влияние должно быть тем бо́льшим, чем меньше собственная масса погруженного осциллятора. Поэтому ниже для иллюстрации рассмотрим два осциллятора, имеющих одинаковую резонансную частоту при колебаниях в вакууме, но различающихся собственной массой. В первом варианте («легкий» осциллятор) положим $\mu_0/(4\pi a^3\rho)=\rho_0\delta/(\rho a)=0{,}1$; во втором варианте («тяжелый» осцил-

лятор) положим $\mu_0/(4\pi a^3\rho)=1$. Очевидно, коэффициенты упругости этих осцилляторов должны различаться во столько же раз, во сколько различаются их собственные массы (в данном случае в 10 раз). Резонансную частоту для колебаний в вакууме примем для обоих осцилляторов соответствующей значению $k_0a=3{,}16$ ($(k_0a)^2=10$). Для простоты примем $\alpha_0=0$.

Частотная зависимость вынужденной резонансной частоты погруженных осцилляторов показана на фиг. 2. Как и следовало ожидать, для «легкого» осциллятора вынужденная частота растет быстрее и проходит больший диапазон значений, чем для «тяжелого» осциллятора. «Истинные» значения резонансных частот $\tilde{k}_1a$ и $\tilde{k}_2a$ соответствуют на чертеже точкам пересечения кривых с биссектрисой координатного угла. Для «легкого» осциллятора «истинная» резонансная частота почти вдвое меньше



Фиг. 4. Частотная зависимость приведенной удельной излучаемой мощности для «легкого» (*1*) и «тяжелого» (*2*) погруженных осцилляторов и для соответствующих осцилляторов сравнения (*1'*) и (*2'*)

резонансной частоты k_0a в вакууме: $\tilde{k}_1a=1{,}64$. Для «тяжелого» осциллятора понижение частоты незначительное: $\tilde{k}_2a=3{,}02$.

Рост вынужденной резонансной частоты вместе с ростом вынуждающей частоты как бы «подстраивает» осциллятор к меняющейся вынуждающей частоте: осциллятор дольше находится в режиме, близком к резонансному, и его частотная характеристика расширяется, причем этот эффект также сильнее выражен для «легкого» осциллятора. Термин «резонансная кривая» можно применять к такому погруженному осциллятору только условно, поскольку форма его частотной характеристики существенно отлична от формы резонансных кривых осцилляторов с постоянными параметрами. Можно говорить о ширине $\Delta\omega$ частотной характеристики погруженного осциллятора на уровне $1/\sqrt{2}$ от максимальной амплитуды или на уровне половинной мощности, однако эта величина не связана с резонансной частотой и добротностью простым соотношением вида $Q=\omega_0/\Delta\omega$, как это имеет место для осцилляторов, колеблющихся в вакууме.

Расширение частотной характеристики осцилляций на уровне $1/\sqrt{2}$ максимальной амплитуды по отношению к резонансной кривой осциллятора сравнения видно на фиг. 3, на которой приведены частотные зависимости величин $|e|/e_0$ для «легкого» и «тяжелого» погруженных осцилляторов и для соответствующих им осцилляторов сравнения. Величина $\Delta\omega$ для «легкого» осциллятора и для соответственного осциллятора срав-

нения составляет приблизительно 2 октавы и $^2/_3$ октавы соответственно: «подстройка» погруженного осциллятора дает дополнительные $1^1/_3$ октавы. Для «тяжелого» осциллятора соответственные значения $\Delta\omega$ составляют всего $^1/_2$ октавы и $^1/_4$ октавы, так что выигрыш в результате подстройки составляет всего $^1/_4$ октавы. Таким образом, и сама ширина частотных характеристик и различие между ними у «легкого» осциллятора больше, чем у «тяжелого», что и следовало ожидать, поскольку для «легкого» осциллятора роль присоединенной массы и ее изменения с частотой больше, чем для «тяжелого».

Еще сильнее эффект «подстройки», обусловленный частотной зависимостью присоединенной массы, сказывается на частотном ходе удельной мощности излучения. На фиг. 4 даны частотные зависимости величины $w/\left(\frac{1}{2}\rho c^3 e_0^2\right)$ для «легкого» и «тяжелого» погруженных осцилляторов и для осцилляторов сравнения. Ширина частотной характеристики для «легкого» осциллятора и для соответственного осциллятора сравнения составляет соответственно 3 октавы и $^2/_3$ октавы (выигрыш $2^1/_3$ октавы). Для «тяжелого» осциллятора эффект меньше: соответственные ширины кривых равны $^1/_2$ октавы и $^1/_4$ октавы (выигрыш $^1/_4$ октавы). Любопытно отметить, что максимумы частотных характеристик погруженных осцилляторов на фиг. 3 сдвинуты от «истинных» резонансных частот в сторону низких частот, причем этот эффект сильно выражен для «легкого» осциллятора. Аналогичный сдвиг для кривых удельной мощности излучения заметен меньше: он частично маскируется общим ростом удельной мощности излучения при повышении частоты.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лепендин Л. Ф.* Акустика. М.: Высшая школа, 1978, с. 207–208.
2. *Исакович М. А.* Излучение звука.– В кн.: Ультразвук, маленькая энциклопедия. М.: Сов. энциклопедия, 1979, с. 145–148.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
22.VII.1980