

УДК 534.26

ДИФРАКЦИЯ В ДВУХСЛОЙНЫХ ВОЛНОВОДАХ  
ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ РАСПОЛОЖЕНИИ КРОМКИ ДИАФРАГМЫ

Григорьян Ф. Е.

Рассмотрена дифракция нормальных волн двухслойного волновода на диафрагме, кромка которой может занимать произвольное положение относительно границы слоев. Для расчета матриц рассеяния применен метод переразложения граничных условий по системам классических ортогональных многочленов.

В [1] было рассмотрено распространение звукового поля в плоском двухслойном волноводе с диафрагмой, кромка которой находится на границе слоев. В данной работе предполагается произвольное расположение кромки диафрагмы, т. е. устраняется обязательное равенство ширины диафрагмы и толщины слоя, прилегающего к стенке волновода, к которой диафрагма прикреплена.

В методическом плане решение такой более общей задачи основывается на дальнейшем развитии метода, использованного в [1]. При этом оказывается необходимым рассмотреть отдельно два случая: случай, когда диафрагма не пересекает границы слоев, т. е. находится полностью в одном из слоев, и случай, когда диафрагма пересекает границу слоев. В обоих случаях кромка диафрагмы может лежать и на границе слоев (предельное положение).

Расчетные схемы приведены на фиг. 1, 2. В обоих случаях плоский волновод, образованный двумя абсолютно жесткими поверхностями  $y=0$  и  $y=a$ , включает два слоя, имеющие, вообще говоря, различные комплексные волновые параметры  $W, \gamma$ . Диафрагма, имеющая высоту  $\delta$ , находится при  $x=0$ , причем может быть  $\delta \leq h$  (фиг. 1) или  $\delta \geq h$  (фиг. 2).

Целью исследования является нахождение эффективного метода вычисления матриц рассеяния нормальных волн. Система нормальных волн двухслойного волновода описана в [1]. Потенциал нормальной волны номера  $j$  для двухслойного волновода имеет вид

$$(1) \quad \psi_j(x, y) = \varphi_j(y) e^{\pm \Gamma_j x},$$

где

$$\varphi_j(y) = \begin{cases} \Lambda_j \cos \mu_j(y-a) & \text{при } h \leq y \leq a, \\ \cos \nu_j y & \text{при } 0 \leq y \leq h. \end{cases}$$

Здесь  $\mu_j = \sqrt{\Gamma_j^2 - \gamma_0^2}$ ,  $\nu_j = \sqrt{\Gamma_j^2 - \gamma_1^2}$ ,

$\Lambda_j$  — множители, обеспечивающие обычные условия непрерывности на границе слоев,  $\{\varphi_j(y)\}$  — ортогональная система с весовой функцией

$$G(y) = \begin{cases} W_0 \gamma_0 & \text{при } h < y \leq a, \\ W_1 \gamma_1 & \text{при } 0 \leq y < h. \end{cases}$$

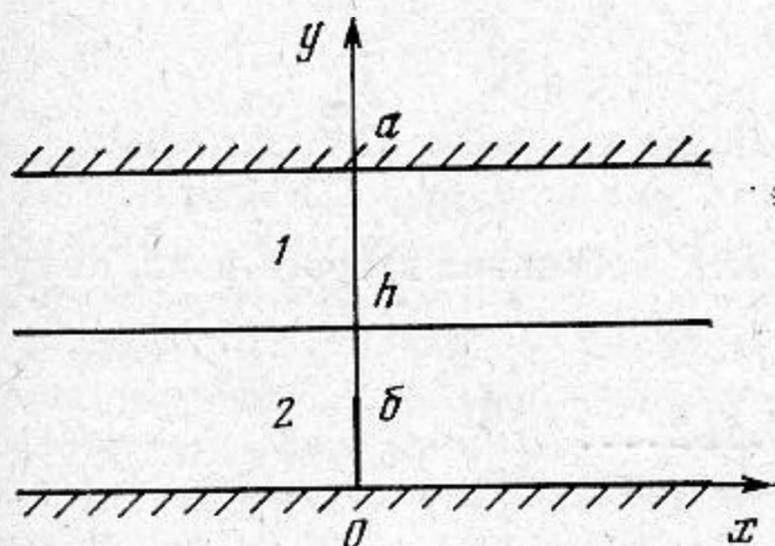
Рассмотрим случай  $\delta \leq h$ . Пусть  $\Psi^-(x, y)$ ,  $\Psi^+(x, y)$  — функции, описывающие потенциал слева и справа от диафрагмы. Введем в рассмотре-

ние функцию скачка потенциала в плоскости диафрагмы:

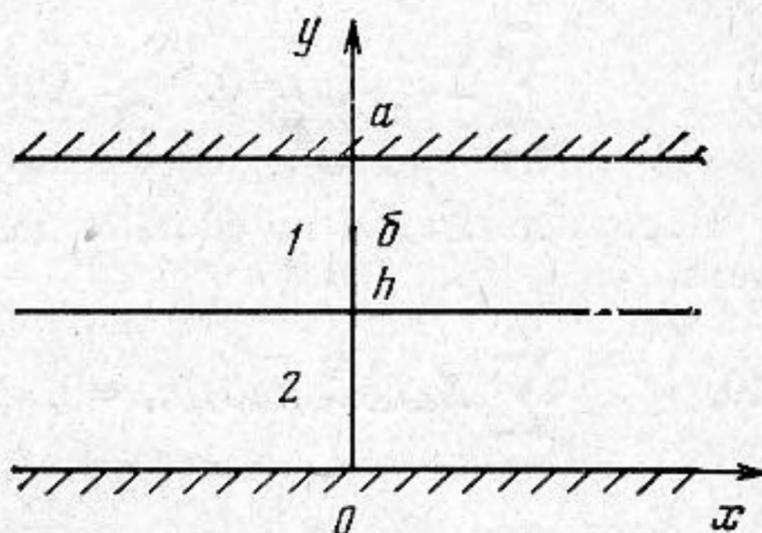
$$\delta\Psi(y) = \Psi^-(-0, y) - \Psi^+(+0, y).$$

Тогда можно записать, что

$$(2) \quad \delta\Psi(y) \sum_{m=0}^{\infty} \delta Y_m \varphi_m(y) = \begin{cases} 0, & y \in (\delta, a), \\ \sqrt{1-t^2} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k U_{2k}(t), & t=y/\delta, \quad y \in [0, \delta], \end{cases}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Схема двухслойного волновода с диафрагмой (случай, когда диафрагма не пересекает границу слоев) 1 —  $W_0, \gamma_0$ , 2 —  $W_1, \gamma_1$

Фиг. 2. Схема двухслойного волновода с диафрагмой (случай, когда граница слоев не проходит через апертуру), 1 —  $W_0, \gamma_0$ , 2 —  $W_1, \gamma_1$

где  $U_{2k}(t)$  — полиномы Чебышева 2-го рода четных номеров. Выбор в (2) разложения на  $[0, \delta]$  по системе функций ортогональных с весом  $\sqrt{1-t^2}$  обусловлен видом особенности потенциала на кромке диафрагмы. Эффективность применения такого принципа для выбора базиса разложений показана в [1].

Используя граничные условия в плоскости диафрагмы для нормальной составляющей колебательной скорости, можно получить [1], что

$$(3) \quad \delta Y_m = 2(\delta_{mi} - X_m/\Gamma_m),$$

где  $\delta_{mi}$  — символ Кронекера,  $i$  — номер нормальной падающей слева волны,  $X_m$  — коэффициенты разложения нормальной колебательной скорости при  $x=0$  по системе  $\{\varphi_m(y)\}$ ,  $y \in [0, a]$ . Из (3), в частности, следует, что

$$(4) \quad X_m = \delta_{mi}\Gamma_m - \Gamma_m \delta Y_m / 2.$$

Разложим теперь в равенстве (2) функцию  $\delta\Psi(y)$  по системе  $\{\varphi_m(y)\}$ , получим:

$$(5) \quad \delta Y_m = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A_{km},$$

где

$$(6) \quad A_{km} = W_1 \gamma_1 \delta \int_0^1 U_{2k}(t) \cos(v_m \delta t) \sqrt{1-t^2} dt / N_m,$$

$$(7) \quad N_m = \int_0^a \varphi_m^2(y) G(y) dy.$$

Интеграл (6) является частным случаем более общего интеграла, приведенного в [2], в котором фигурируют полиномы Гегенбауэра. Подставляя надлежащее значение верхнего индекса полинома Гегенбауэра (равное единице), получаем, что

$$(8) \quad A_{km} = W_1 \gamma_1 \kappa_k J_{2k+1}(v_m \delta) / v_m N_m,$$

где  $\kappa_k$  — некоторый коэффициент, зависящий от  $k$ ,  $J_{2k+1}(v_m \delta)$  — функции Бесселя 1-го рода.

С другой стороны, в силу равенства нулю нормальной колебательной скорости на диафрагме,

$$(9) \quad \sum_{m=0}^{\infty} X_m \varphi_m(y) = 0, \quad y \in [0, \delta].$$

Переразлагая (9) по системе полиномов Чебышева второго рода, получаем:

$$(10) \quad \sum_{m=0}^{\infty} X_m J_{2l+1}(v_m \delta) / v_m = 0, \quad l=0, 1, 2, \dots$$

Подставляя (4) в (10), получаем систему уравнений относительно  $\delta Y_m$

$$(11) \quad \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \delta Y_m \Gamma_m J_{2l+1}(v_m \delta) / v_m = \Gamma_i J_{2l+1}(v_i \delta) / v_i.$$

Затем с помощью линейного преобразования (5) получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно  $\beta_k = \kappa_k \alpha_k / 2$ :

$$(12) \quad \sum_{k=0}^{\infty} B_{kl} \beta_k = \Gamma_i J_{2l+1}(v_i \delta) / v_i, \quad l=0, 1, 2, \dots,$$

где

$$(13) \quad B_{kl} = \theta^2 \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \Gamma_m a J_{2k+1}(v_m \delta) J_{2l+1}(v_m \delta) / (v_m \delta)^2,$$

$\theta = \delta/a$ ,  $\varepsilon_m = W_1 \gamma_1 a / N_m$ . Коэффициенты  $\varepsilon_m$  играют здесь роль обобщенных коэффициентов Неймана, поскольку при переходе к однородному заполнению ( $W_0 = W_1$ ,  $\gamma_0 = \gamma_1$ )  $\varepsilon_0 = 1$  и  $\varepsilon_m = 2$  для  $m > 0$ .

После решения системы (12) обратный переход к амплитудам нормальных волн может быть осуществлен по формулам

$$\delta Y_m / 2 = W_1 \gamma_1 \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k J_{2k+1}(v_m \delta) / v_m N_m,$$

$$(14) \quad X_m = \Gamma_m (\delta_{mi} - \delta Y_m / 2).$$

Тогда элементы матрицы прохождения (по потенциалу)

$$(15) \quad T_{im} = \delta_{mi} - \delta Y_m / 2,$$

а элементы матрицы отражения (по потенциалу)

$$(16) \quad R_{im} = \Gamma_i \delta_{mi} / \Gamma_m - T_{im}.$$

Случай  $\delta \geq h$  (фиг. 2) может быть рассмотрен аналогично работе [1], с переразложением нормальной колебательной скорости в апертуре по полиномам Чебышева 1-го рода. Ширина апертуры здесь уже будет отличаться от толщины верхнего слоя  $l$ , поэтому для нее вводим  $d = a - \delta$ . Окончательные формулы будут лишь немного отличаться от соответствующих формул в [1]:

$$(17) \quad \sum_{n=v}^{\infty} B_{jn} \beta_n = J_{2j}(\mu_i d), \quad j=0, 1, 2, \dots,$$

где

$$(18) \quad B_{jn} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{\Gamma_m a} J_{2j}(\mu_m d) J_{2n}(\mu_m d),$$

$\varepsilon_m = W_0 \gamma_0 \Lambda_m^2 a / N_m$  — обобщенные коэффициенты Неймана. Разумеется, что вычислительные формулы для величин, характеризующих систему нормальных волн ( $\Gamma_m$ ,  $\mu_m$ ,  $\Lambda_m$ ,  $N_m$ ), остаются неизменными.

Обратный переход к амплитудам колебательной скорости нормальных волн, соответствующих падающей волне номера  $i$ , осуществляется по формуле

$$(19) \quad X_{mi} = \frac{W_0 \gamma_0 \Lambda_i \Lambda_m}{N_m} \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n}(\mu_m d) \beta_n = \frac{\varepsilon_m \Lambda_i}{\Lambda_m a} \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n}(\mu_m d) \beta_n.$$

Элементы матриц рассеяния выражаются через  $X_{mi}$  элементарным образом:

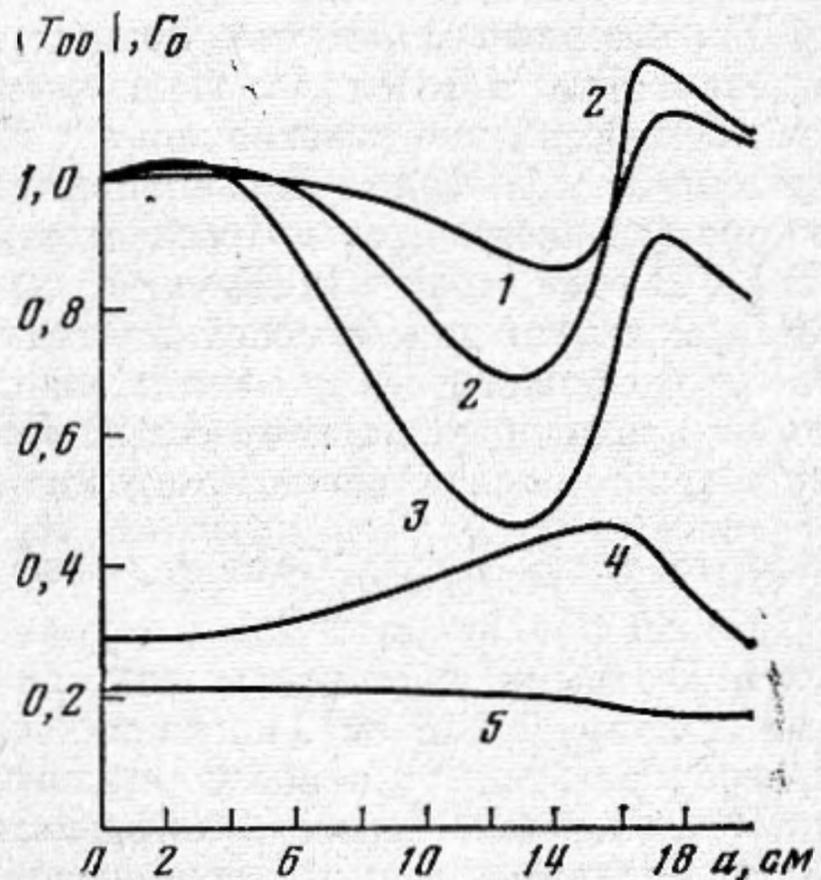
$$(20) \quad T_{im} = X_{mi} / \Gamma_m; \\ R_{im} = \Gamma_i \delta_{mi} / \Gamma_m - T_{im}.$$

Элементы этих матриц численно равны амплитудам прошедших (отраженных) нормальных волн при падении нормальной волны вида (1), номера  $i$ -й, с единичной амплитудой. Недиagonальные элементы являются, разумеется, коэффициентами трансформации типов нормальных волн (по потенциалу).

Матрицы систем (12) и (17) удовлетворяют некоторому принципу «предельной диагональности». Суть его заключается в том, что при  $W_1 \rightarrow W_0$ ,  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_0$  и малых  $\delta$  или  $d$  системы (12), (17) становятся «почти диагональными» в силу того, что в этом случае внедиагональные  $B_{ni}$  и  $B_{jn}$  приблизительно пропорциональны интегралу Вебера — Шафхейтлина:

$$\frac{\pi}{2} (v^2 - \mu^2) \int_0^{\infty} J_{\mu}(at) J_{\nu}(at) \frac{dt}{t} = \sin \left[ (v - \mu) \frac{\pi}{2} \right] = 0$$

при  $v \neq \mu$ ,  $\text{Re}(v + \mu) > 0$ .



Фиг. 3. Зависимости модуля коэффициента прохождения основной нормальной волны  $|T_{00}|$  (кривые 1-3), а также  $\text{Re } \Gamma_0$ ,  $\text{Im } \Gamma_0$  (кривые 4, 5) от высоты волновода  $a$  при  $h/a = 1/2$ : 1 — случай  $\delta/a = 1/4$ ; 2 —  $\delta/a = 1/2$ ; 3 —  $(a - \delta)/a = 1/4$ ; 4 —  $10 \text{Re } \Gamma_0$ ; 5 —  $\text{Im } \Gamma_0$

Значения коэффициентов (13), (18) вычислялись с использованием способов усиления сходимости рядов, описанных в [1]. Для вычисления входящих в (18) функций Бесселя комплексного аргумента  $z$  применялась подпрограмма DCBJIN из пакета научных подпрограмм для ЕС ЭВМ [3]. Для вычисления слагаемых в (13) при малых  $|v_m \delta|$  подпрограмма DCBJIN дополнялась специальной подпрограммой вычисления функций  $J_{2h+1}(z)/z$  при  $|z| < 1$  с помощью отрезка степенного ряда.

Для решения систем (12), (17) последовательно возрастающих рангов использовался метод итераций. Оказалось, что для получения достаточной для практики точности (порядка 0,1% для коэффициентов прохождения (отражения) основной нормальной волны) можно ограничиться системами не выше третьего ранга.

На фиг. 3 приведены кривые для  $|T_{00}|$  в зависимости от  $a$  при  $h/a = 1/2$ , а также зависимости  $\text{Re } \Gamma_0(a)$  и  $\text{Im } \Gamma_0(a)$ . Акустические параметры слоев (частота 1 кГц):  $W_0 = 1$ ,  $\gamma_0 = (i\pi/17)$  см<sup>-1</sup> (воздух),  $W_1 = 1,5 - i0,3$ ,  $\gamma_1 = (0,1 + i0,25)$  см<sup>-1</sup> (величины, характерные для одного довольно широкого класса реальных волокнистых материалов).

Кривая 1 рассчитана с помощью системы (12). Случай  $\delta = h$  (кривая 2) рассчитывался как с помощью (12), так и с помощью (17). Результаты совпали в пределах точности счета. Кривая 3 рассчитана по результатам решения системы (17).

Характерные минимумы кривых 1-3 лежат вблизи  $\lambda/4$  — волнового резонанса нижнего слоя с некоторым сдвигом в сторону больших значений  $a$ , что особенно заметно для случая  $\delta/a = 1/4$ . Еще более сдвинут вправо максимум поглощения основной нормальной волны (максимум  $\text{Re } \Gamma_0$ ), которому приблизительно соответствует точка слабого перегиба кривой  $\text{Im } \Gamma_0$ . В этой точке  $\text{Im } \Gamma_0 \approx k = \omega/c_0$ . Заметим, что поскольку значения  $\text{Re } \Gamma_0$  малы, то для большей наглядности построена кривая  $10 \text{Re } \Gamma_0$ .

На графиках имеются значительные участки, где  $|T_{00}| > 1$ , что, конечно, не противоречит закону сохранения энергии поскольку это объясняется неортогональностью в эрмитовом смысле нормальных волн в данной системе, т. е.

$$\int_{\sigma} \psi_m \psi_n^* G d\sigma \neq 0, \quad \text{где } \sigma \text{ — поперечное сечение волновода и}$$

$m \neq n$ . С этим же обстоятельством связано и парадоксальное явление (кривые 1, 2 при  $a > 16$  см), когда меньшей апертуре соответствует большая прозрачность для основной нормальной волны.

В заключение отметим, что развитые в настоящей работе методы могут быть использованы и для волноводов с числом слоев большим двух при условии, что либо диафрагма не пересекает границы слоев, либо граница слоев не проходит через апертуру. Для расчета распространения звуковых волн в волноводах с периодически расположенными вдоль продольной оси диафрагмами можно использовать уравнения, приведенные в работе [4], в которой способ вычисления матрицы  $\{T_{im}\}$  предполагается известным.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьян Ф. Е. Дифракция в двухслойных волноводах. — Акуст. ж., 1978, т. 24, № 1, с. 59-65.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
3. Математическое обеспечение ЕС ЭВМ. Вып. 12. Минск: Изд-во Ин-та математики АН БССР, 1974.
4. Григорьян Ф. Е. Распространение звука в слоисто-неоднородном диафрагмированном волноводе. — Акуст. ж., 1980, т. 26, № 4, с. 533-539.

Научно-производственное объединение по исследованию и проектированию энергетического оборудования им. И. И. Ползунова

Поступила в редакцию  
24.VII.1980