

УДК 534.222

ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ
НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН ПРИ РАСЧЕТЕ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ
В ПОДВОДНОМ ВОЛНОВОДЕ

Явор М. И.

Построена коротковолновая асимптотика звукового поля в подводном волноводе, учитывающая интерференцию нормальных волн. Величина поля определяется вкладом небольших групп нормальных волн. Число нормальных волн в группах зависит от частоты. Приведены результаты расчетов, подтверждающие теоретические выводы.

В задаче о распространении звука в глубоких слоисто-неоднородных подводных волноводах представляет интерес определение вклада различных групп нормальных волн в суммарное поле. В монографиях [1, 2] отмечалось, что на высоких частотах наиболее существенный вклад в поле вносят те нормальные волны, волновые числа которых близки к горизонтальным составляющим волновых чисел для лучей, приходящих в точку наблюдения, поскольку именно такие нормальные волны складываются в фазе, а остальные гасят друг друга. В монографии [3] этот факт используется для интерпретации положения максимумов и минимумов на горизонтальном разрезе поля. В настоящей работе поведение частных сумм нормальных волн изучается на основе анализа точного интегрального представления поля и выделения большого безразмерного параметра p , связанного с высокой частотой и малостью градиентов скорости звука в океане.

Мы будем рассматривать модельную задачу с параболической зависимостью квадрата показателя преломления от глубины z

$$(1) \quad n^2(z) = \frac{c_i^2}{c^2(z)} = 1 - \frac{(z-z_i)^2}{4d^2},$$

где z_i — глубина, на которой расположен минимум скорости звука, $c_i = c(z_i)$, d — характерная ширина волновода. Метод эталонной задачи позволяет без существенных изменений распространить описанные результаты на случай произвольной зависимости скорости звука от глубины, имеющей один минимум. Аналогичное исследование можно провести и в случае общей зависимости скорости звука от глубины.

Рассмотрим высокочастотную асимптотику поля G точечного источника звуковых колебаний частоты ω в водном слое глубины H (плотность воды $\rho=1$, скорость звука в слое задана соотношением (1)), лежащем на жидкостном однородном полупространстве плотности $\rho_L > 1$, со скоростью звука в нем c_L .

Введем большой безразмерный параметр задачи $p = \omega d / c_i$, наличие которого позволяет получить все требуемые асимптотические формулы. Введем также безразмерные координаты $l = r/d$, где r — горизонтальное расстояние между источником и наблюдателем, $x_{1,2} = (z_i - z_{1,2})/d$, где z_1, z_2 — соответственно меньшая и большая из глубин источника и наблюдателя. Будем считать, что $z_1 \leq z_2 < z_i$.

Обозначим $\Phi_1(t, \xi) = D_{-p\tau-1/2}(ip^{1/2}t)$, $\Phi_2(t, \xi) = D_{-p\tau-1/2}(-ip^{1/2}t)$ — функции параболического цилиндра [4], $\tau = 1 - \xi^2$. Введем функции

$$R_0(\xi) = \frac{\Phi_1(-x_0, \xi)}{\Phi_2(-x_0, \xi)}$$

$$R_H(\xi) = \frac{\frac{d}{dx} \Phi_2(x_H, \xi) + \sigma(\xi) \Phi_2(x_H, \xi)}{\frac{d}{dx} \Phi_1(x_H, \xi) + \sigma(\xi) \Phi_1(x_H, \xi)},$$

где $x_0 = z_i/d$, $x_H = (H - z_i)/d$, $\sigma(\xi) = p\rho_L^{-1}(\xi^2 - n_L^2)^{1/2}$, $n_L = c_i/c_L$. В дальнейшем будем считать $z_i < H/2$, т. е. $c(0) < c(H) < c_L$.

Поле G может быть написано в виде [5]

$$G(r, z_1, z_2, \omega) = \frac{i}{2d^3} \sqrt{\frac{p}{2\pi}} \sum_{k=1}^4 G^{(k)} + G_c,$$

где

$$(2) \quad G^{(k)} = \int_C \frac{F_0^{(k)}(\xi) d\xi}{1 - R_0(\xi) R_H(\xi)},$$

$$F_0^{(1)}(\xi) = -p\xi H_0^{(1)}(p\xi l) \Phi_1(-x_1, \xi) \Phi_2(-x_2, \xi) \Gamma\left(p\tau + \frac{1}{2}\right),$$

$$F_0^{(2)}(\xi) =$$

$$= -p\xi H_0^{(1)}(p\xi l) \Phi_2(-x_1, \xi) \Phi_1(-x_2, \xi) \Gamma\left(p\tau + \frac{1}{2}\right) R_0(\xi) R_H(\xi),$$

$$F_0^{(3)}(\xi) = p\xi H_0^{(1)}(p\xi l) \Phi_1(-x_1, \xi) \Phi_1(-x_2, \xi) \Gamma\left(p\tau + \frac{1}{2}\right) R_H(\xi),$$

$$F_0^{(4)}(\xi) = p\xi H_0^{(1)}(p\xi l) \Phi_2(-x_1, \xi) \Phi_2(-x_2, \xi) \Gamma\left(p\tau + \frac{1}{2}\right) R_0(\xi).$$

Контур C охватывает вещественные полюса ξ_m , $m=1, 2, \dots, M$ подынтегральных функций (2) (волновые числа соответствующих нормальных волн), расположенные на комплексной плоскости ξ на интервале $(n_L, 1)$ вещественной оси. Слагаемое G_c отвечает вкладу комплексных нормальных волн и боковой волны. Расчет G_c удобно вести в лучевом представлении. Подробно метод такого расчета обсуждается в работе [5].

По теореме о вычетах интегралы (2) равны

$$(3) \quad G^{(k)} = 2\pi i \sum_{m=1}^M R_m^{(k)},$$

где $R_m^{(k)}$ — вычеты подынтегральной функции $G^{(k)}$ в полюсах ξ_m . Число M при этом на высоких частотах (выше 50 Гц) велико (сотни или даже тысячи). Покажем, что асимптотика $G^{(k)}$ определяется значительно меньшим числом слагаемых.

Введем функции $F_j^{(k)}(\xi) = F_0^{(k)}(\xi) \{R_0(\xi) R_H(\xi)\}^j$. Напишем их в виде

$$F_j^{(k)}(\xi) = A_j^{(k)}(\xi) \exp\{ip\Psi_j^{(k)}(\xi)\},$$

где $\Psi_j^{(k)}(\xi)$ — сумма показателей экспонент асимптотик всех входящих в $F_j^{(k)}(\xi)$ специальных функций (асимптотики функций параболического цилиндра подробно описаны

в работе [6]). Выделим на промежутке $(n_L, 1)$ интервалы $\Delta_j^{(k)} = (a_j^{(k)}, b_j^{(k)})$, на которых выполняется условие

$$(4) \quad |\Psi_j^{(k)}(\xi)| < c_j^{(k)} p^{-1/2+\delta},$$

где $0 < \delta < 1/2$, $c_j^{(k)}$ — коэффициенты, не зависящие от p . Конкретное значение этих коэффициентов определяется при расчетах. Такие интервалы существуют при $j_1 \leq j \leq N$ (j_1, N — некоторые числа).

Сгруппируем слагаемые суммы (3)

$$G^{(k)} = 2\pi i \left\{ \sum_{j=j_1}^N \sum_{\xi_m \in \Delta_j^{(k)}} R_m^{(k)} + \sum_{j=j_1}^{N+1} \sum_{\xi_m \in (b_j^{(k)}, a_{j-1}^{(k)})} R_m^{(k)} \right\},$$

где $a_{j_1-1}^{(k)} = 1$, $b_{N+1}^{(k)} = n_L$.

Можно показать, что для $j = j_1, j_1+1, \dots, N+1$ справедлива оценка

$$(5) \quad \sum_{\xi_m \in (b_j^{(k)}, a_{j-1}^{(k)})} R_m^{(k)} = O(p^{-1/2-\delta}).$$

Таким образом,

$$(6) \quad G^{(k)} = 2\pi i \sum_{j=j_1}^N \sum_{\xi_m \in \Delta_j^{(k)}} R_m^{(k)} + O(p^{-1/2-\delta}).$$

Эта формула является искомым представлением поля в виде суммы групп нормальных волн. Можно показать, что вошедшие в нее группы вычетов дают вклад в поле порядка $p^{-1/2}$, т. е. по сравнению с ними сумма остальных вычетов дает вклад порядка $p^{-\delta}$. Практический выбор δ связан с конкретными параметрами задачи. При $\delta \rightarrow 0$ уменьшается точность расчета по формуле (6), но уменьшается и число нормальных волн в выделенных группах; при $\delta \rightarrow 1/2$ происходит обратное.

Из формул (4), (6) следует, что с ростом параметра p число нормальных волн, вносящих наиболее существенный вклад в поле, растет пропорционально $p^{1/2+\delta}$, в то время как общее число нормальных волн растет пропорционально p .

Поясним коротко способ получения оценки (5). Имеет место равенство

$$2\pi i \sum_{\xi_m \in (b_j^{(k)}, a_{j-1}^{(k)})} R_m^{(k)} = \int_{C_j^{(k)}} \frac{F_0^{(k)}(\xi) d\xi}{1 - R_0(\xi) R_N(\xi)} = \sum_{l=0}^{j-1} \int_{C_j^{(k)}} F_l^{(k)}(\xi) d\xi + I_j^{(k)},$$

где

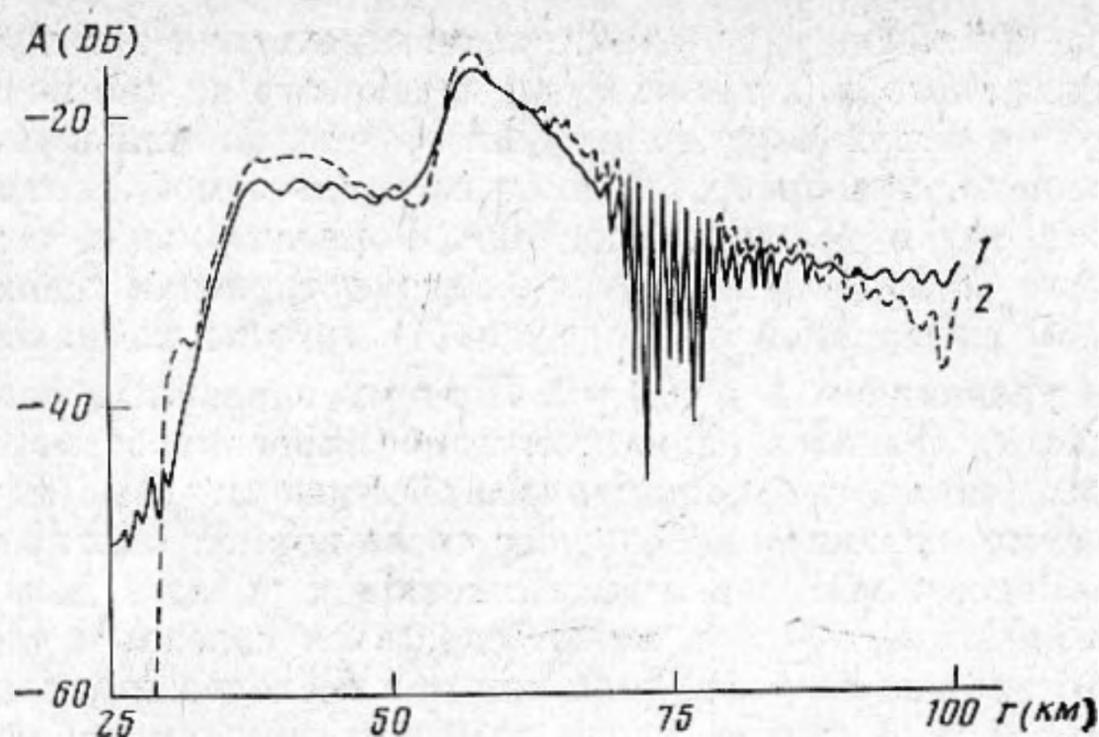
$$I_j^{(k)} = \int_{C_j^{(k)}} \frac{F_j^{(k)}(\xi) d\xi}{1 - R_0(\xi) R_N(\xi)}.$$

Контур $C_j^{(k)}$ охватывает полюса ξ_m , лежащие на интервале $(b_j^{(k)}, a_{j-1}^{(k)})$.

Функции $F_j^{(k)}$ могут внутри этого контура иметь только полюса, вычеты в которых экспоненциально малы. Исследование подынтегральной функции $I_j^{(k)}$ показывает, что она на контуре $C_j^{(k)}$ имеет максимум в окрестностях точек пересечения этим контуром вещественной оси, а на оставшейся части контура экспоненциально мала. Раскладывая показатели экспонент в асимптотиках этой подынтегральной функции в ряд Тейлора в точках

$b_j^{(k)}, a_{j-1}^{(k)}$, получим для интеграла $I_j^{(k)}$ требуемую оценку.

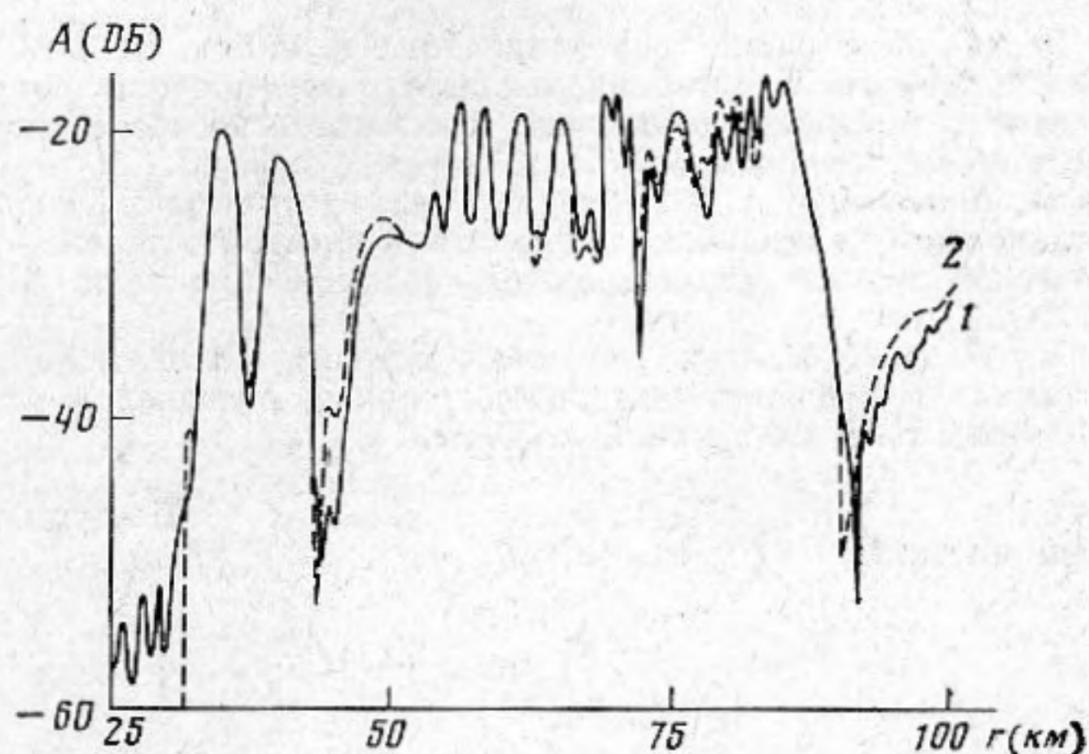
Для выяснения точности асимптотической формулы (6) при конкретных значениях p , характерных для глубокого океана, и эффективности расчета поля по этой формуле была составлена программа для ЭВМ ЕС-1030, включающая в себя определение интервалов $\Lambda^{(k)}$, расчет нормальных волн, для которых соответствующие полюса расположены на этих интервалах, и их суммирование. Нормальные волны при этом рассчитыва-



Фиг. 1. Горизонтальный разрез поля на частоте 40 Гц. 1 — метод нормальных волн, 2 — расчет по формуле (6)

лись асимптотически [7]. Результаты расчетов по формуле (6) сравнивались с расчетом по методу нормальных волн с использованием равномерных асимптотик, имеющему высокую точность на используемых частотах.

Расчет проводился для модели океана глубиной $H=5$ км, с параметрами профиля скорости звука $z_i=1,6$ км, $c_i=1,4908$ км/с, $d=6,7783$ км (что соответствует $c(0)=1,5013$ км/с, $c(H)=1,54$ км/с). При этом большой параметр задачи равен, например, на частоте 100 Гц, $p=2860$. Были выбраны параметры дна $c_L=1,57$ км/с, $\rho_L=1,65$ г/см³. Источник и наблюдатель счи-



Фиг. 2. Горизонтальный разрез поля на частоте 500 Гц. 1 — метод нормальных волн, 2 — расчет по формуле (6)

тались расположенными на глубине 50 м. В соотношении (4) было положено $\delta=1/6$, $c_j^k=7$ для всех j и k .

Расчет показал в соответствии с теоретическими выводами, что на высоких частотах число нормальных волн, вносящих существенный вклад в поле в заданной точке, мало относительно общего числа вещественных нормальных волн. Например, при $r=75$ км на частоте 40 Гц существенный вклад в поле вносят 24 нормальных волны из общего числа 77, на частоте 500 Гц — 115 из 958. За счет этого время расчета поля в заданной точке сокращается на частоте 40 Гц в 1,5 раз, на частоте 500 Гц — в 5 раз.

Результаты расчетов горизонтального разреза поля для различных частот приведены на фиг. 1 и 2. Сравнение их с результатами расчетов по методу нормальных волн показывает хорошую точность расчета по формуле (6), причем эта точность растет с частотой.

Если точка наблюдения не лежит вблизи каустики или лучей, касающихся границ волновода, а также луча, падающего на дно под углом полного внутреннего отражения, то каждая группа нормальных волн, дающих вклад в поле, преобразуется в лучевое слагаемое, соответствующее лучу, приходящему в точку наблюдения. Горизонтальная составляющая волнового числа (стационарная точка), соответствующая такому лучу, является центром выделенной по формуле (4) группы нормальных волн и определяется уравнением $\Psi_j^{(k)}(\xi) = 0$. Поэтому описанный способ расчета поля по существу является вариантом комбинированного метода, в котором поле в тех точках, где неприменимы обычные лучевые формулы, рассчитывается суммированием небольшого числа нормальных волн.

Знание номеров нормальных волн, вносящих вклад в поле на различных расстояниях от источника, может оказаться полезным для интерпретации горизонтальных разрезов поля или при исследовании структуры дна океана. Кроме того, в случае, когда источник звука и наблюдатель расположены на небольшой глубине, и поэтому амплитуда возбуждения мод изменяется медленно при изменении номера, знание асимптотического поведения нормальных волн дает возможность, не проводя сложных расчетов, предсказывать характер поведения поля на горизонтальной трассе (положение максимумов и минимумов, наличие быстрых осцилляций или их отсутствие, их величину).

Автор приносит благодарность В. С. Булдыреву за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
2. Толстой И., Клей К. С. Акустика океана. М.: Мир, 1969.
3. Ocean acoustics. Editor J. A. De Santo. Springer — Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Ч. 2. М.: Наука, 1974.
5. Булдырев В. С., Явор М. И. Комбинированный метод представления поля точечного источника в подводном волноводе и асимптотическое суммирование нормальных волн. — Зап. науч. сем. ЛОМИ, 1981, т. 104, с. 66–83.
6. Булдырев В. С., Неделкин А. А. Равномерные асимптотические формулы для функций параболического цилиндра на комплексной плоскости значка. — В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л.: Наука, 1974, вып. 14, с. 61–83.
7. Мильруд Э. М., Явор М. И. Поле точечного источника в подводном волноводе. — В кн.: Рассеяние и дифракция радиолокационных сигналов и их информативность. Л.: Изд-во СЗПИ, 1981, вып. 5, с. 36–43.

Северо-западный
политехнический институт

Поступила в редакцию
17.XI.1980